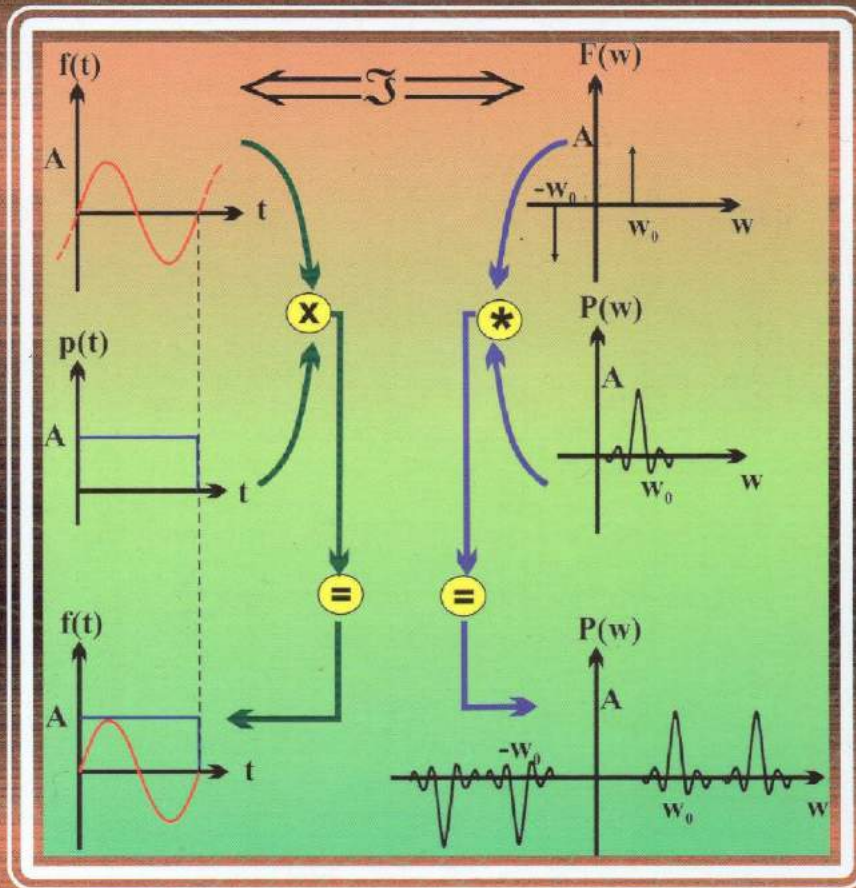




DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ  
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ YAYINLARI NO: 339



# JEOFİZİKTE SİNYAL ANALİZİ



Prof. Dr. Rahmi PINAR

İZMİR - 2017

# **JEOFİZİKTE SİNYAL ANALİZ**

**Prof. Dr. Rahmi PINAR**

**Mart 2017**

NOT: Kitabın bedeli 15 TL dir ve aşağıdaki adresten sağlanabilir

İletişim:

Tel:0232 301 75 97

Fax: 0232 301 72 10

[ramazan.gode@deu.edu.tr](mailto:ramazan.gode@deu.edu.tr)

Hesap numarası: Ziraat Bankası Balçova-İzmir Şubesi IBAN: TR 3800  
0100

1506 0679 9887 5055

Not :Fatura için T.C numarası gerekmektedir.

Dışarıdan yapılan taleplerde kargo ücreti karşı ödemeli olarak alıcıya aittir.

Tüm varlığım,  
AİLEME

## **TEŐEKKÜR**

Bu günlere ulaŐmamda etkisi olan iki değerli insan.

İlk tanışmamdan bu yana gereksinimim olduğu her an yanımda olan Prof. Dr. Önder Kırmılıya teŐekkür ederim

2014 Eylül ayında girdiğim ikinci yaŐam uęraŐında, bilgisiyle, deneyimiyle, yaŐam çizgisinin bu tarafında kalmam için her zaman bana yardım eden Prof. Dr. Mahmut TÖBÜ' ye çok teŐekkürler.

## ÖNSÖZ

Sinyal, içeriğinde bilgi barındıran, soyut bir kavramdır. Analiz edilmeden, işlenmeden, içerdiği bilgiye ulaşılamaz. Yerden alınan sinyaller, yeraltının gizemlerini barındırır. İzlerin çözümlenerek yeraltının gizlerinin aydınlatılması ise tümüyle Jeofizik biliminin konusudur. Böylece yerin derinlikleri hakkında bilgiler elde edilir, yeraltı modellenir.

Yerden alınan sinyaller iyi tanınmalı, özellikleri iyi bilinmelidir. Sinyallerin tanınması, kendini oluşturan daha basit bileşenlerin saptanmasıyla yapılır. Sözü edilen olgu, sinyallerin analizidir.

Sinyallerin analizi konusunda “Jeofizikte Sinyal Kuramı ve Dönüşümler” isimli kitap, 1995 yılında, tarafımızdan yayınlanmıştır. Kitap, Jeofizik öğrencilerine katkı sağlayan temel kitaplardan birisi olmuştur. Ancak eksiklikleri bulunmaktadır.

Bu kitapta, basitten başlanarak, gittikçe daha zor konulara ulaşılması, hedeflenmiştir. Konuların anlaşılması için basit güncel olaylardan örnekler verilmiştir. Problem ve sayısal örnek sayısı arttırılmıştır. Kuramsal bilgiler ve verilen örneklerde kullanılan matematik bağıntılar, birbirilerini izleyecek biçimde, kopukluk olmaksızın ve kullanılacak bilgisayar programları da her konunun sonunda verilmiştir.

Öğrencilerin ve araştırmacıların yararlanabileceği bir kaynak olacağını düşünüyorum ve bu konuda çalışacak olanlara başarılar diliyorum.

15.03.2017, İzmir  
Prof. Dr. Rahmi PINAR

# İÇİNDEKİLER

## BÖLÜM 1

### SİNYAL VE SPEKTRUM

1.1 GİRİŞ .....	1
1.2 SİNYAL .....	3
1.2.1 Sinyal kavramı.....	5
1.2.2 Sinüzoidal hareket bağıntısının farklı biçimlerde gösterilmesi.....	12
EK-A JEOFİZİK SİNYALLER.....	15
EK-B SİNÜSODİAL HAREKET.....	20
EK-C SAYILAR – KARMAŞIK (COMPLEX) ORTAM.....	22
EK PR-1 KURAMSAL SİNYALLER HESABI.....	26

## BÖLÜM 2

### FOURIER SERİLERİ (FS)

2.1 SİNYAL TÜRLERİ.....	32
2.2 DÖNEMLİ İŞLEVLER (PERIODIC FUNCTIONS).....	33
2.2.1 Dönemli işlevlerin özellikleri.....	38
2.3 ORTOGONAL İŞLEVLER.....	39
2.3.1 Tanım.....	39
2.3.2 Ortogonallik koşulları.....	40
2.3.3 Norm, normalleştirme.....	41
2.4 SERİLER, FOURIER SERİLERİ (FS).....	44
2.4.1 Giriş.....	44
2.4.2 Fourier serilerinin trigonometrik biçimi.....	45
2.4.2.a Trigonometrik Fourier serilerinin katsayılarının bulunması.....	48
2.4.3 Karmaşık (eksponansiyel) Fourier serileri .....	53
2.4.3.a Karmaşık Fourier serilerinde ortogonallik .....	56
2.4.4 Harmonik Fourier serileri .....	60
2.4.5 Kutupsal koordinatlarda Fourier serileri .....	61
2.5 SONLU FOURIER SERİLERİNE YAKLAŞIM.....	61
2.6 DRICHLET KOŞULLARI.....	62
2.7 İŞLEV TÜRLERİ VE FS. İLE İLİŞKİLERİ.....	63

2.7.1 Tek (odd functions) ve çift işlevler (even functions).....	63
2.7.2 Tek ve çift işlevlerin toplamından oluşan (karışık) işlevler..	65
2.8 YARIM DALGA BAKIŞIMI.....	68
2.9 BAKIŞIK İŞLEVLERİN FOURIER KATSAYILARI.....	70
2.10 (2L) DÖNEMLİ İŞLEVLERİN FOURIER SERİSİ.....	70
2.11 FOURIER SERİSİNİN TÜREVİ.....	76
2.12 DİKDÖRTGEN DALGA KATARININ FREKANS SPEKTRUMU.....	76
EK1 BOYUT, PARAMETRE TANIMLARI.....	86

### **BÖLÜM 3**

#### **FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ (FD)**

3.1. GİRİŞ.....	92
3.2. KARMAŞIK İŞLEVLERİN GÖSTERİLMESİ.....	94
3.3. FOURIER SERİLERİNDEN FOURIER DÖNÜŞÜMLERİNE.....	96
3.4. ENERJİ VE GÜCE GÖRE SINIFLAMA.....	99
3.4.1 Enerji Sinyalleri.....	99
3.4.2 Güç Sinyalleri.....	100
3.5. FOURIER DÖNÜŞÜMLERİNE AİT BAZI BAĞINTILAR...106	
3.6. FOURIER DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ.....112	
3.6.1 Doğrusallık özelliği.....112	
3.6.2 Zaman ölçekleme özelliği.....112	
3.6.3 “-“1 ile çarpma .....113	
3.6.4 Zaman kayma (öteleme) özelliği.....113	
3.6.5 Frekans kayma(öteleme) özelliği.....113	
3.6.6 Bakışım (simetri) özelliği.....114	
EK1 EK 2 DE KULLANILAN SİMGELER.....	133
EK2 BAZI İŞLEVLERİN İKİ ORTAM GÖRÜNÜMLERİ.....	134

### **BÖLÜM 4**

#### **VERİLERE UYGULANAN TEMEL SPEKTRAL İŞLEMLER**

4.1 GİRİŞ.....	140
4.2 EVRİŞİM (CONVOLUTION - FOLDING) KURAMI.....	140
4.2.1 Zaman evrişim kuramı.....	143
4.2.2 Frekans evrişim kuramı.....	143

4.2.3	Evrişim yöntemleri.....	144
4.2.4.	Evrişimin geometrik olarak gösterimi.....	150
4.3	SİNYALLERİN ENERJİ, GÜÇLERİNİN HESAPLANMASI VE PARSEVAL KURAMI.....	160
4.3.1	Giriş.....	160
4.3.2	Parseval Kuramı.....	162
4.3.3	Çapraz enerji spektrumu.....	164
4.3.4	Özilişki (autocorrelation).....	170
4.3.5	Ayrık verilerde özilişki .....	173
4.3.6	Çapraz (veya karşıt) ilişki (cross correlation), çapraz spektrum (cross spectrum).....	174
4.4	GÜÇ YOĞUNLUĞU/GÜÇ SPEKTRUMU.....	183
4.5	WIENER-KİNTCHINE KURAMI.....	188
4.6	GÜÇ SPEKTRUMUNUN ÖZELLİKLERİ.....	189
4.7	KARMAŞIK KEPSTRUM.....	191
Ek 1	DOĞAL POTANSİYELDE (SP) GÜÇ SPEKTRUMU.....	196
Ek 2	PR1 ÖZİLİŞKİ PROGRAMI.....	201
Ek 3	PR2 ÇAPRAZ İLİŞKİ PROGRAMI.....	203

## BÖLÜM 5

### DÜRTÜ (DIRAC IMPULSE) İŞLEVİ

5.1	GİRİŞ.....	210
5.2	DAĞILIM İŞLEVLERİ.....	212
5.3	DÜRTÜ İŞLEVINİN MATEMATİKSEL TANIMI.....	212
5.4	DÜRTÜ İŞLEVINİN ÖZELLİKLERİ.....	214
5.5	DÜRTÜ İŞLEVINİN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ.....	215
5.5.1	Tanımdan yararlanarak dürtü işlevinin FD'ü.....	215
5.5.2	Dikdörtgen dalgadan yararlanarak dürtü işlevinin FD'ü...216	
5.5.3	" $t_0$ " kadar ötelenmiş dürtü işlevinin $[\delta(t - t_0)]$ FD.....	216
5.6	TOPARLAMA.....	217

## BÖLÜM 6

### JEOFİZİKTE ÇOK KULLANILAN BAZI DÖNÜŞÜMLER

6.1	İKİ VE ÜÇ BOYUTLU FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ.....	228
6.1.1	Tanımlar.....	228
6.1.2.	İki, üç ve çok boyutlu FD. leri.....	229



<b>6.2 HANKEL DÖNÜŞÜMLERİ</b> .....	232
<b>6.3 HİLBERT DÖNÜŞÜMLERİ (HD)</b> .....	239
<b>6.3.1 Analitik Sinyal</b> .....	239
<b>6.3.2 Önbilmez, önbilmezlik (nedensel, causal)</b> .....	243
<b>6.3.3 Hilbert Dönüşümleri</b> .....	244
<b>6.3.3.a. Hilbert Dönüşümleri nin FD. kullanılarak elde edilmesi</b> .....	245
<b>6.3.3.b. Hilbert Dönüşümleri nin dizge işlevi olarak elde edilmesi</b> .....	246
<b>6.3.3.c. Hilbert Dönüşümünün sayısal olarak elde edilmesi</b> ...	248
<b>6.3.4. İki boyutlu HD işleçleri</b> .....	253
<b>6.3.4.5 Jeofizikte Hilbert Dönüşümleri</b> .....	257
<b>6.3.5.a Potansiyel alanlarda HD'nün kurulması</b> .....	257
<b>6.3.5.b Potansiyel alan uygulamaları</b> .....	260
<b>6.3.5.c Sismik uygulamalar</b> .....	271
<b>6.4 "Z" DÖNÜŞÜMLERİ</b> .....	275
<b>6.5 HARTLEY DÖNÜŞÜMLERİ</b> .....	283
<b>6.5.1 Genel bağıntılar</b> .....	283
<b>6.5.2 Ayrık Hartley Dönüşümü (AHD)</b> .....	285
<b>EK-A DENKLEM ÇÖZÜMLERİ</b> .....	298
<b>EK-B DENKLEM ÇÖZÜMLERİ</b> .....	298
<b>EK-C DENKLEM ÇÖZÜMLERİ</b> .....	299
<b>EK-D ERDELYİ (1954) TÜRLEME KALIBLARI</b> .....	300
<b>EK PR-1 TEK BOYUTLU HİLBERT DÖNÜŞÜMÜ KATSAYILARI PROGRAMI</b> .....	302
<b>EK PR-2 TEK BOYUTLU HİLBERT DÖNÜŞÜMÜ PROGRAMI</b> .....	304

## **BÖLÜM 7**

### **AYRIK FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ**

<b>7.1 GİRİŞ</b> .....	315
<b>7.2 SAYISALLAŞTIRILMADA, SPEKTRAL ORTAM DA KARŞILAŞILAN SORUNLAR</b> .....	315
<b>7.2.1. Katlanma</b> .....	315
<b>7.2.2. Sızma (Leakage)</b> .....	316
<b>7.2.3. Çit etkisi (Picket-fence effect)</b> .....	316
<b>7.3 AYRIK FOURIER DÖNÜŞÜMÜ (AFD)</b> .....	317

7.3.1 AFD' nün elde edilmesi.....	317
7.3.2 AFD dizeyi.....	319
7.3.3 Hızlı Ayrık Fourier dönüşümü (HAFD) .....	321
7.3.4 Frekans içinde kümelenme yöntemi.....	321
<b>EK PR-1 FOURIER DÖNÜŞÜM PROGRAMI.....</b>	<b>338</b>
<b>EK PR-2 “NLOGN” HIZLI FD PROGRAMI.....</b>	<b>342</b>

## **BÖLÜM 8**

### **ÖRNEKLEME KURAMI**

<b>8.1 GİRİŞ.....</b>	<b>344</b>
<b>8.2 ÖRNEKLEME ÇEŞİTLERİ.....</b>	<b>344</b>
<b>8.2.1 Kasıtlı örnekleme.....</b>	<b>344</b>
<b>8.2.2 Gelişigüzel örnekleme.....</b>	<b>345</b>
<b>8.2.2.1 Basit gelişigüzel örnekleme.....</b>	<b>345</b>
<b>8.2.2.2 Eşit aralıklı örnekleme.....</b>	<b>346</b>
<b>8.3 SÜREKLİ VE AYRIK SİNYALLER.....</b>	<b>347</b>
<b>8.4 SİNYALLERDE ÖRNEKLEME.....</b>	<b>347</b>
<b>8.4.1 Tarak işlevleri kullanılarak örnekleme.....</b>	<b>347</b>
<b>8.4.2 Uzay sinyallerinde örnekleme.....</b>	<b>348</b>
<b>8.5 ÖRNEKLEMENİN FREKANS ORTAMI DAVRANIŞI.....</b>	<b>349</b>
<b>8.6 FREKANS KATLANMASI (ALIASING).....</b>	<b>352</b>
<b>8.7 BANT SINIRLI VERİLERDE KATLANMA .....</b>	<b>355</b>

## **BÖLÜM 9**

### **PENCERELER**

<b>9.1 GİRİŞ.....</b>	<b>362</b>
<b>9.2 PENCERELEME ETKİSİ.....</b>	<b>363</b>
<b>9.2.1 Pencere nedeniyle sinyal şeklinin bozulması.....</b>	<b>364</b>
<b>9.2.2 Enerji sızması (leakage).....</b>	<b>366</b>
<b>9.3 ZAMAN VE FREKANS ORTAMINDA PENCERE İŞLEMİ.....</b>	<b>369</b>
<b>9.4 PENCERENİN ASİMPOTİK DEĞİŞİNTİSİ (VARYANS)..</b>	<b>373</b>
<b>9.5 PENCERE TÜRLERİ.....</b>	<b>374</b>
<b>9.5.1 Dikdörtgen pencere (Daniell pencere).....</b>	<b>376</b>
<b>9.5.2 Kosinüs pencere.....</b>	<b>376</b>
<b>9.5.3 Üçgen pencere (Bartlett).....</b>	<b>376</b>
<b>9.5.4 Hanning penceresi (geliştirilmiş kosinüs</b>	

pencere).....	376
9.5.5 Hamming pencere.....	377
9.5.6 Papoulis pencere.....	377
9.5.7 Blackman pencere.....	377
9.5.8 Parzen pencere.....	377
9.5.9 Tukey pencere.....	378
9.5.10 Üç katsayılı pencere.....	378
9.6 İKİ BOYUTLU PENCERELER.....	379

## **BÖLÜM 10**

### **DİZGELER**

10.1 GİRİŞ.....	383
10.2 DİZGE.....	385
10.2.1 Tanım.....	385
10.2.2 Dizgenin dürtü tepkisi (birim dürtüye verdiği yanıt)....	385
10.2.3 Dizge işlevine ait bağıntıların geliştirilmesi.....	387
10.2.4 Dizge dönüşüm işlevi ve özellikleri.....	389
10.2.5 Sayısal süzgeç düzenlemede karşılaşılan sorunlar .....	391
10.3 ÖZELLİKLERİNE GÖRE DİZGELERİN SINIFLAMASI....	392
10.3.1 Bozulmasız dizgeler.....	393
10.3.2 Genliği değiştiren dizgeler.....	393
10.3.2.1 İdeal alçak geçişli dizgeler.....	394
10.3.2.2 Genliğin bölünmesiyle elde edilen bant geçişli dizgeler.....	394
10.3.2.3 Yüksek geçişli dizgeler.....	394
10.3.2.4 Evre bozan dizgeler.....	397
10.4 GÜRÜLTÜLÜ SİNYALLER .....	398
10.4.1 Gürültülü sinyallerin süzülmesi.....	400
10.5 DİZGELERİN JEOFİZİKTE KULLANILMASI.....	401
10.5.1 Tek boyutlu dizgeler.....	401
10.5.1.1 Kuram.....	401
10.5.1.2 Tek boyutlu dizgenin sayısallaştırılması.....	403
10.5.2 İki boyutlu dizgeler.....	404
10.5.2.1 Kuram.....	404
10.5.2.2 İki boyutlu dizgenin sayısallaştırılması.....	405
10.5.3 Frekans-dalga sayısı (f-k) veya hız dizgeleri.....	406
10.5.3.1 Hız dizgelerine ait bağıntıların geliştirilmesi.....	409

<b>10.6 DESİBEL ÖLÇEKLEMESİ.....</b>	<b>422</b>
<b>10.7 BUTTERWORTH DİZGELERİ.....</b>	<b>424</b>

## **BÖLÜM 11**

### **TERS SÜZGEÇLEME (DEKONVOLUSYON)**

<b>11.1 GİRİŞ.....</b>	<b>427</b>
<b>11.2 DETERMİNİSTİK TS.....</b>	<b>427</b>
<b>11.3 İSTATİSTİKSEL TERS SÜZGEÇLEME.....</b>	<b>428</b>
<b>11.4 TERS SÜZGEÇLEME İÇİN FARKLI YÖNTEMLER.....</b>	<b>428</b>
<b>11.4.1 EKK yöntemi ile ters süzgeç katsayılarının         oluşturulması.....</b>	<b>430</b>
<b>11.4.2 Özilişki yöntemi ile TS katsayılarının oluşturulması         (dalga biçimi TS katsayılarının saptanması).....</b>	<b>435</b>
<b>11.4.3 Önceden kestirmeli ters evrişim.....</b>	<b>438</b>
<b>11.4.4 İğnecikleştirme ters evrişimi.....</b>	<b>442</b>
<b>11.4.4.1 Dalga biçimi yaklaşımı ile iğnecikleştirme.....</b>	<b>442</b>
<b>11.4.4.2 Ön kestirme yaklaşımı ile iğnecikleştirme.....</b>	<b>442</b>
<b>EK PR-1 LEVİNSON ALGORİTMASI.....</b>	<b>446</b>

## **BÖLÜM 1**

## *SİNYAL VE SPEKTRUM*

### **1.1 GİRİŞ**

Sinyallerin (iz, im, işaret, Jeofizikte anomali) mühendislik alanlarında yaygın kullanımı, elektroniğin gelişmesi ile başlamıştır. Elektronik geliştikçe, uzun sayısal dizilerin işlenebileceği bilgisayarlar üretilmiştir. Bilgisayarların yapılmasıyla birlikte, uygulama olanağı bulan kuram da gelişmiştir. Özellikle, mühendislik alanlarındaki, hızlı gelişim, 2. dünya savaşına rastlamaktadır. Söz konusu savaş; orduların savaşı olduğu kadar, teknolojik ilerlemenin de önemli bir sürecini kapsamaktadır. Savaş süresince, düşman kuvvetlerinin davranışının anlaşılabilmesi için iletişim ve dinleme sistemleri (telli, telsiz) geliştirilmiştir. Almanların geliştirip kullandıkları “ENİMAG” şifreleme cihazının şifre bilgileri, radyo sinyalleri üzerine bindirilerek haberleşmede kullanılmıştır. Sinyallerde bulunan, daha önceden belirlenmiş frekanslar, giderilerek şifreli bilgilere ulaşılmıştır. Şifreli bilgiler, Enimag cihazı tarafından çözülerek, kusursuz bir haberleşme, bir süre, Almanlar tarafından kullanılmıştır. Almanların kurduğu sistem, müttefik kuvvetlerin, Polonya da bir baskında, cihazı ele geçirene dek sürmüştür. Enimag cihazında bir şifrenin çözülebilmesi olasılığı, 3 rakamlı bir sayının arkasına 18 adet sıfır eklenerek bulunacak sayıda biridir. Müttefik kuvvetler, bu cihazın şifresini kısa sürede (20 dakikadan az) kırmak için çalışmalara başlamıştır. Bunun için İngilizler bir çalışma ekibi kurmuştur. Bu ekipte Mathison Turing ve Thomas Harold Flowers bulunmaktadır. Dahi bir matematikçi olan Mathison Turing, kısa sürede şifrenin çözümlenebilmesi için programlanabilir bir cihaz geliştirmiştir. “Colossus” adını verdiği bu cihaz ilk bilgisayardır. Böylece yapılan dinlemelere ait şifreler kırılmış ve İngiliz “MI5” örgüt elemanları, karşı taraf ajanlarını yakalamıştır. Almanların savaş taktiklerine karşı önlemler alabilen müttefik kuvvetler, kısa sürede savaşı kazanmıştır. Savaşın 2 sene önce bitirildiği ve yaklaşık 14.000.000 insanın daha az öldüğü, dönemin yetkilileri tarafından dile getirilmiştir. Savaştan sonra ise bu konuda çalışan bilim adamları, sayısal sinyallerin işlenmesi ve bilgisayar bilimlerinin kuruluşunun öncüleri olmuşlardır. Savaşla başlayan bu süreç, zamanla, önemli gelişmeler göstermiştir.

Günümüzde, çok uzaklara (uzay) gönderilen ve alınan sinyallerle haberleşmeler, uzaya atılmış uydu araçlarından yapılan yayınlar, sinyal teknolojisinin gelişmesi ile çok kolaylaşmıştır.

Sinyaller zaman (bağımsız değişken zaman ise) veya uzay (bağımsız değişken uzunluk ise) ortamlarında alınabilir. Örneğin 2 m. Uzunluğunda bir demir çubuk bir ucundan ısıtılır. Diğer ucuna bir termometre yerleştirilerek, belirli sürelerde (örneğin 10 dakikada bir) sıcaklık değişimi elde edilebilir. Elde edilen, zaman sinyali dizisidir. Ancak, belirli aralıklarla (örneğin 50 cm. de bir) termometreler yerleştirilerek herhangi bir anda, tüm termometrelerde sıcaklık değerleri elde edilebilir. Bu kez, elde edilen dizi, uzunluk (uzay) sinyali dizisidir. Jeofizik çalışmalarda ise, yapılan tüm arazi gözlemlerinde sinyal veya sinyaller topluluğu, zaman veya uzunluk ortamlarında, sayısal olarak elde edilir. Analog kayıt edilen izler ise önce, doğru biçimde örneklenerek sayısallaştırılır. Daha sonra istenen veri işleme teknikleri uygulanır.

Sinyaller ve bileşenlerine ait bilgiler, zaman veya uzay ortamında görülemezler. Bu nedenle, analiz işlemleri yapılır. En kolay yol, sinyallerin başka bir ortama (zaman veya uzay ortamından farklı) geçirilmesi ve analiz işlemlerinin orada yapılmasıdır. Analiz olarak geçirilen ortam, yaygın olarak, “frekans ortamı”dır. Frekans ortamına aktarma sırasında, değerlendirme yöntemleri de geliştirilebilir. Geliştirilen yöntemlerden yararlanarak, yapı parametreleri doğrudan bulunabilir. Örneğin güç spektrumu, Hilbert dönüşümleri ve diğer dönüşümler gibi spektral analiz yöntemleri, jeofiziğin birçok dalında, değerlendirmede doğrudan kullanılır.

Bu kitapta, zaman/uzunluk ortamı işlevleri, küçük harflerle  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $f(t)$ ; frekans ortamı büyük harflerle  $X(f)$ ,  $Y(f)$  ve  $F(f)$  gösterilecektir. “f” harfi frekans ortamı bağımsız değişkenidir ve çizgisel frekanstır. Çizgisel ve açısal frekanslar birbirlerine “ $2\pi$ ” ölçeklemesi ile bağlıdır. Açısal frekans “w” ile gösterilecektir. Açısal frekans kullanılması durumunda, frekans ortamı işlevleri ise  $X(w)$ ,  $Y(w)$  ve  $F(w)$ , dır. İki ortamdan, birbirilerine geçiş ise “ $\mathcal{F}$ ” simgesiyle, uzunluk ortamının bağımsız değişkeni “x”, dalga sayısı ortamı (frekans karşılığı) ise “k”, “f”, “w” ile gösterilecektir.

## 1.2 SİNYAL

Sinyaller, bir anlam taşıyan izlerdir. Her ne kadar soyut bir kavram gibi gözükse de gerçekte, somut olayları simgelerler. Sinyal kavramı, ses sinyali kullanılarak somutlaştırılabilir.

Ses, konuşma sırasında, havaya yapılan basınç ve basınç dalgalarından oluşan titreşimlerden oluşur. Bu titreşimler, kulak tarafından algılanır ve kulak içinde bulunan salyangoz tarafından, elektromanyetik dalgalara dönüştürülür. Bu dalgalar, beyine iletilerek anlamlandırılır. Gelen sinyal, artık bir anlam içerir, kişide bir algı oluşturur. Sinyalin yaratıldığı kaynak (konuşan kimse) ve algılamamanın (kişinin dinlemesi ve sesin kayıt edilmesi) bulunduğu konumlar, bir uzay dağılımını gösterir. Sesin gidişi ise süre ile ilgilidir (sesin yayıldığı ortamın özelliklerine bağlıdır). Bu nedenle bağımsız değişkenler uzay ve zaman ortamlarıdır. Örneğin konuşma (kaynak) sırasında “e” harfinin dalga biçimi, zaman ortamında, şekil 1.1 de verilmektedir. Kaynağı, (ses) oluşturan bileşenler;

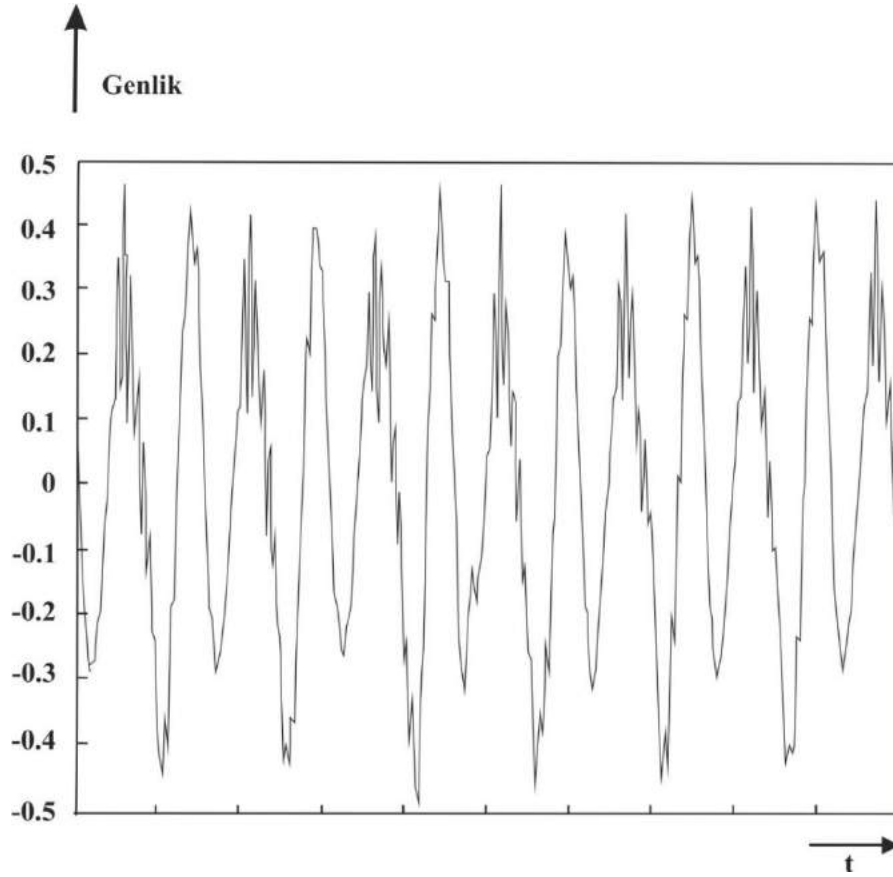
- ses basıncı : sesin oluşması sırasındaki hava basıncının değişim miktarı,
- genlik : oluşan basınç değişiminin en büyük değeri,
- dönem (periyot): basınç değişiminin tekrarlanması sırasında geçen zaman aralığı,
- frekans : basınç değişiminin birim zamandaki yinelenme sayısıdır.

Ses, öncelikle, havadaki titreşimlerden oluşur ve frekansları (saniyedeki titreşim sayısı, sıklık) farklıdır. Söz konusu bu frekans farklılığı, kalın ve ince (bas ve tiz) sesleri oluşturur ve sesin tınısı adını alır. İnsanlarda en kalın sesin frekansı 85 Hz, en ince sesin frekansı ise 1050 Hz dir. İnsan kulağı, 20 Hz – 20 KHz 20.000 Hz frekanslarına duyarlıdır. Kalın ve ince sese örnek olarak, kalın ve ince “do” sesi verilebilir. Çizelge1 de müzik aletlerinde kullanılan nota frekansları verilmektedir. Kullanma nedeniyle müzik aletlerinde frekansların bozulması durumunda, cihazlar bu frekanslara göre ayarlanır (akord). Çizelge 1 de verilen ince ve kalın “do” arasındaki notaların tümüne “1 oktav” denilir. 1 oktav üstü için frekanslar 2 ile

çarpılır. Örneğin kalın “do” nun 1 oktav üstü, ince “do” dur ve frekansı 523.5 Hz dir.

NOTALAR	DO	RE	Mİ	FA	SOL	LA	Sİ	DO
FREKAN	261,	293,	329,	349,	392,	440,	493,	523,
S (Hz)	6	7	6	2	0	0	9	5

Çizelge 1.1 Müzik aletlerinde kullanılan notaların frekansları



Şekil 1.1 Konuşma sırasında “e” harfine ait sinyalin oluşturduğu dalga biçimi (Signal and systems, Richard Baraniuk)

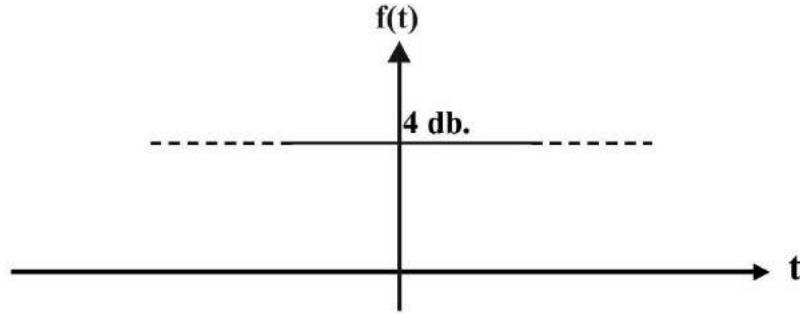
Jeofizik bilimi, yerden alınan izlerin değerlendirilerek yorumlanmasıdır. Alınan sinyallere veri işlem teknikleri uygulanarak, değerlendirilmeye hazır duruma getirilir. Daha sonra, uygulanan



yöntemlerin özelliklerine bağlı olarak, yer altı, öncelikle sayısal parametreler cinsinden (hız, yoğunluk, öz direnç, manyetik alan, vb) tanımlanır. Son adım olarak parametrelerin, Jeolojik olarak karşılıkları aranır. Genelde yer altı düzensizlikleri arandığı için, düzensizliği oluşturan sinyal biçimine, “**anomali**” denilir. Jeofizikte kullanılan çeşitli yöntemlere ait sinyal örnekleri Ek A da verilmektedir.

### 1.2.1 Sinyal kavramı

Ses sinyalinde verilen frekanstan hareketle, kavramların yerleştirilmesi, zordur. Bunun yerine genlikten (şiddet) hareketle sinyalin anlaşılması kolaylaştırılabilir. 4 desibel (dB.) genlikli, düz bir korna sesi (şekil 1.2) kaydedilerek (desibel tanımı için bkz bölüm 10.7) bir sınıfı oluşturan 10 öğrenciye verilsin.



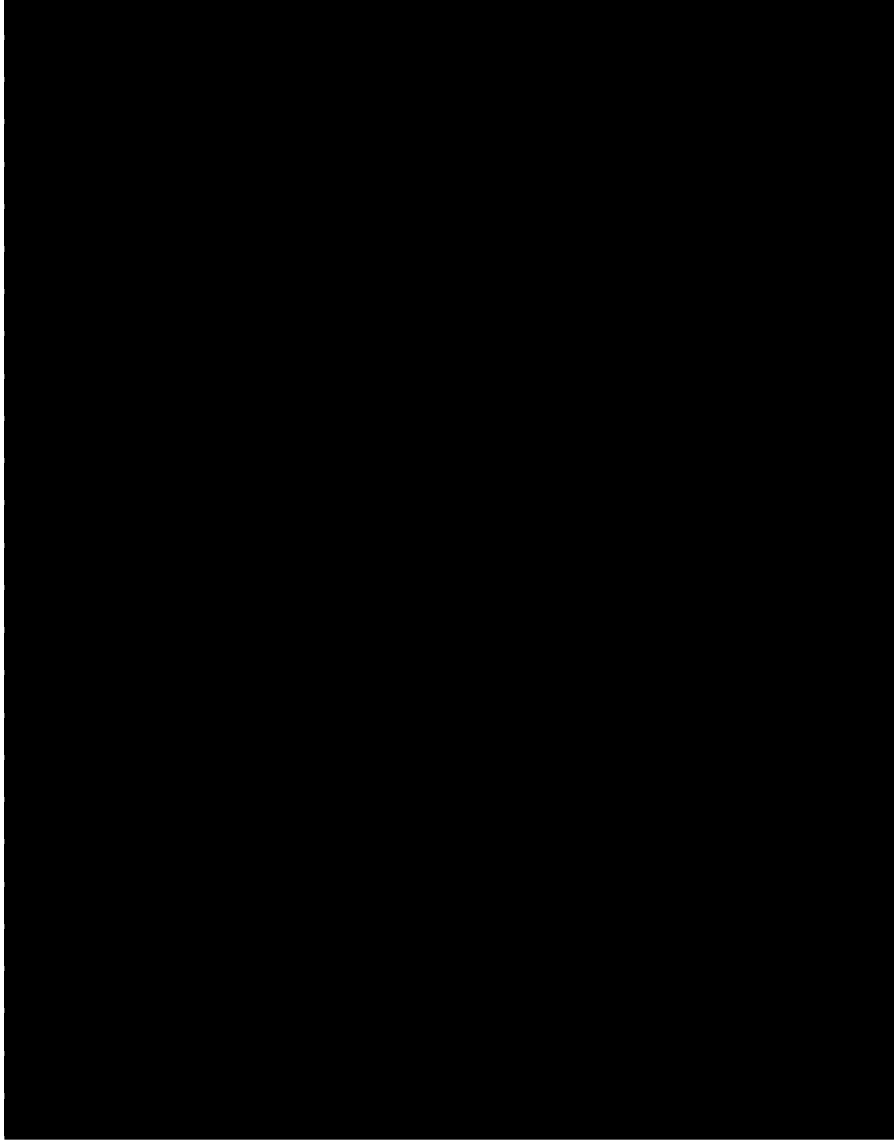
**Şekil 1.2** “4” desibel genlikli bir sinyal (dönemi “∞”, frekansı ise “0”)

Sesin genliği, bir çevirme düğmesi ile  $\pm 4$  db değiştirilsin. Genlik değiştirilmesi, şekil 1.2 de verilen ize uygulandığında, yani sesin genliği, 4 dB. arttırıldığında, toplam 8 dB, 4 db azaltıldığında ise 0 dB (ses duyulmaz) değerlerini alır. Öğrenciler, ses düğmesin farklı hızlarda (birim zamandaki sıklık) çevirsinler. Örneğin 1. öğrenci, en büyük genlik olan 8 dB le 0.25 sn. sonra, ilk genliğe (4 db.) 0.5 sn, 0 Db genliğine 0.75 sn. yeniden ilk genliğine (4 Db) 1 sn. sonra ulaşsın (şekil 1.3 a). Bu durumda, sinyalin dönemi 1 sn. dir. Bir diğer öğrenci, ses değişimini, ilk öğrenciye göre 5 kez daha hızlı (şekil 1.3 b), 3. öğrenci ise, ilk öğrenciye oranla 10 kat daha hızlı yapsın (şekil 1.3 c). Dönem, açısal frekans ve çizgisel frekans değerleri çizelge 1.2 dedir.

Öğrenciler	T (sn)	f (Hz)	w (Hz)
------------	-----------	-----------	-----------

1	1	1	$2\pi.1=6.28$
2	0.2	5	$2\pi.5=31.41$
3	0.1	10	$2\pi.10=62.83$

**Çizelge 1.2 Şekil 1.3 de verilen sinyallerin parametreleri**



**Şekil 1.3** Üç değişik dönemli iz (a-b-c) ve toplamları (d)

Şekil 1.3 ile ilgili olarak aşağıdaki açıklamalar geçerlidir.

- Yatay kesikli çizgi, (4 db.) örnekte verilen korna izinin genliğidir.

- Tüm izler, en kısa dönemli olan izin 1/4 ü kadarı ile örneklenmiştir. Yani  $\Delta t=0.1/4=0.025$  sn. dir (bkz. bl. 8). Belirtilen örnekleme, şekilde kesikli düşey çizgilerle gösterilmiştir.
- Toplam izin dönemi, izlerin içindeki en büyük dönemli izin dönemi ile aynıdır.
- Elde edilen sinyaller, değişik dönemli sinüzoidallerdir (bkz Ek B, sinüzoidal hareket).

En genel durumda, sinyalin denklemi aşağıdaki gibi modellenebilir.

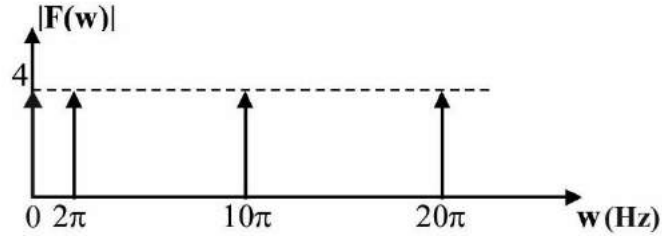
$$f(t)=A.\text{Sin}(wt+\varphi) \quad (1.1)$$

Şekil 1.3.a,b,c’de verilen üç sinyale ait bağıntılar;

$$f_1(t)=4\sin(2\pi t), \quad f_2(t)=4\sin(10\pi t), \quad f_3(t)=4\sin(20\pi t) \text{ dır.}$$

olarak yazılır. 3 öğrencinin kayıtçısından çıkan ses, sınıfın dışında, kayıt edilse, bağıntısı aşağıda verilen, şekil 1.3.d’deki iz elde edilir.

Sinyallerin analizinden amaç, 1.3.d de verilen karışık kayıttan hareketle, bu kaydı oluşturan basit dalgacıkların ayrılmasıdır. Elde edilen son denklemin frekans analizi yapılırsa, genlik spektrumu, şekil 1.4 teki gibi elde edilir. Örnekteki sinyallerin uzunluklarının sonsuzdur. Sınırlanması durumunda, kesilme sorunu oluşacaktır (bkz bl. 9, pencereler).



**Şekil 1.4**  $f(t)=4+(4\sin 2\pi t+4\sin 10\pi t+4\sin 20\pi t)$  izinin genlik spektrumu (tek yan bantta)

Şekil 1.4 teki genlik ve frekans (dolayısıyla dönem) bilgileri kullanılarak

$$f(t) = 4 + \{4[\sin(2\pi t) + \sin(10\pi t) + \sin(20\pi t)]\} \quad (1.2.a)$$

eşitliği kolayca yazılabilir.

3 öğrencinin yerine, 10 adet öğrenciye ait izler kullanılabilir (şekil 1.5). Şekilde verilen parametrelerden yararlanarak, 10 adet

sinüzoidallerin toplamından oluşmuş olan sinyalin denklemi aşağıdadır (kuramsal sinyaller ve toplamlarını hesaplayan FORTRAN programı PR-1 de verilmiştir).

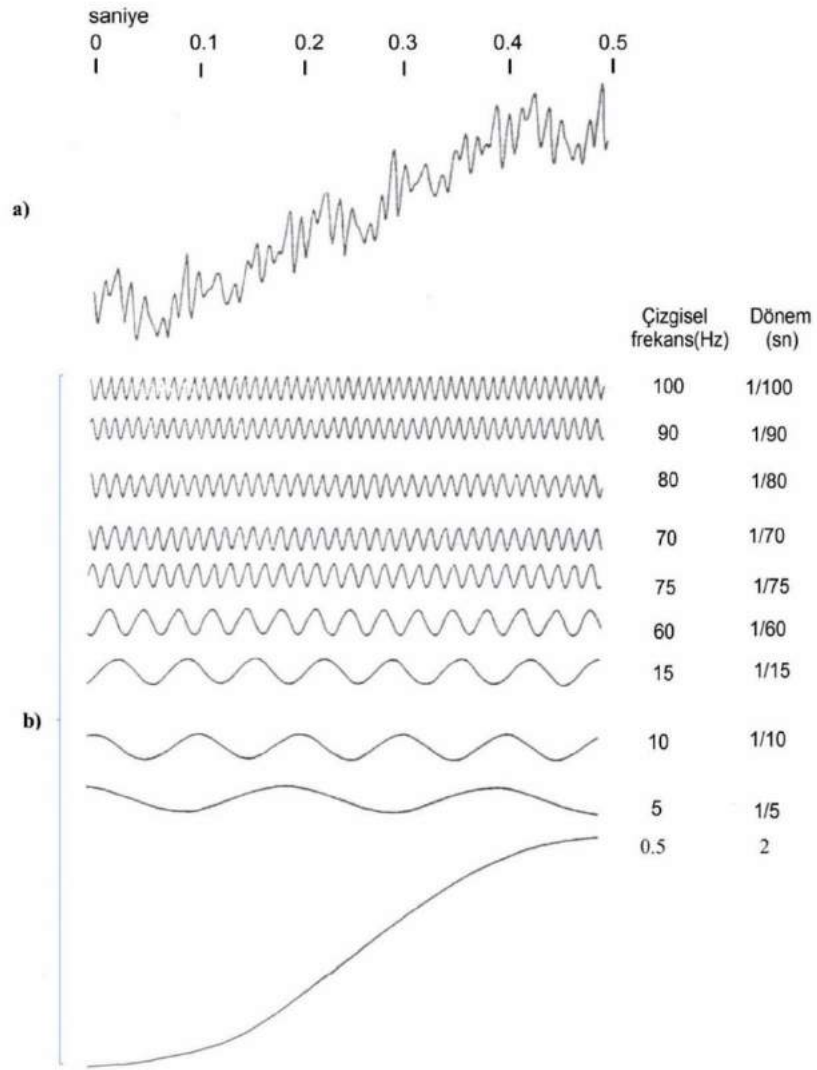
$$f(t) = 4 + [4 \sin(2\pi \cdot 0,5 \cdot t) + 4 \sin(2\pi \cdot 5 \cdot t) + \dots + 4 \sin(2\pi \cdot 100 \cdot t)] \quad (1.2.b)$$

Sinyal analizinden kasıt, o sinyali oluşturan diğer izlerin bileşenlerinin ayırt edilmesidir. Bunun için (1.2) denklemlerinde verilen “A”, “w”, “φ” parametrelerin tümünün bulunmasıdır. Bu koşulda, (1.2.b) denklemi ile verilen toplam iz analiz edildiğinde, 10’ar adet “A”, “w”, “φ” değerleri bulunacaktır. Problemimizde, tek genlik (4 db.) olduğundan bir tek “A=4”, genliği elde edilir. Evre farklılığı olmadığı için “φ” elde edilmeyecektir.

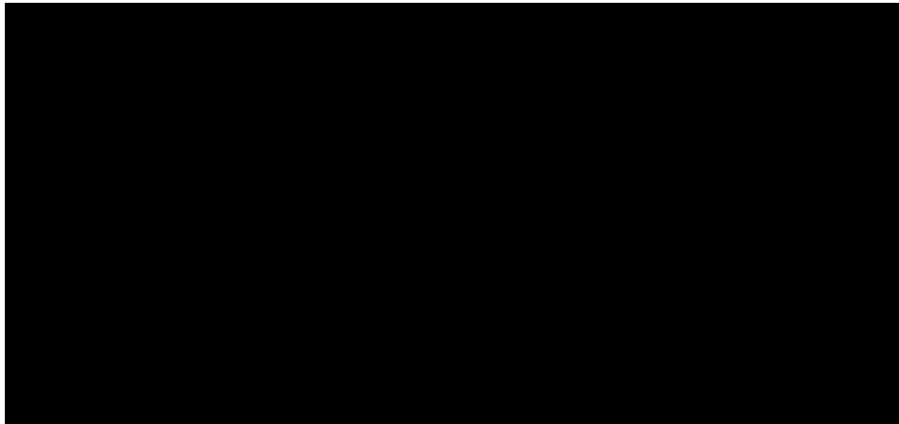
Analiz, zaman ortamında yapılamaz. Şekil 1.5.a’ dan herhangi bir anlam çıkartmak olanaksızdır. Bu koşulda, frekans analizi yapmak gerekir. Analiz için Fourier serileri (sonsuz uzunluklu) veya Fourier dönüşümleri (sonlu uzunluklu) kullanılır. Şekil 1.6 da söz konusu izin genlik spektrumu verilmiştir. Sinyallerin genlikleri değişmediğinden (4 birim), genlikler aynıdır. Frekanslar kullanılarak dönemler bulunur. Böylece, basit sinüzoidallerin parametreleri tanımlanır.

Fourier serileri, bir seriye yaklaştırma yöntemidir (bkz. bölüm 2). Örneğin, şekil 1.3.d’ de (veya 1.5.a) verilen sinyali simgeleyecek en uygun denklemin bulunması istenseydi, bölüm 2 de verilen Fourier Serileri kullanılarak (1.2.a veya 1.2.b) eşitliklerine ulaşılabilecekti. Şekil 1.5 incelendiğinde, sinyalin kayıt edildiği süre içinde, bazı sinyallerin dönemi oluşmamış olabilir. Şekil 1.5.a’ da 0.5 sn süre ile kayıt edilmiş bir iz verilmiştir. İz, 10 adet farklı sinüzoidalden oluşmuştur. Bunlardan 9 tanesinin dönemi (dönemleri 1/100 ve 1/5 sn aralığında olanlar), alınan kayıt süresinin (0.5 sn) içine girmektedir. Ancak dönemi 2 sn olan en alttaki izin dönemi 0.5 sn. den büyüktür. Kayıt süresi, bu sinyal için yetersiz kalmıştır. Bu nedenle bu tip sinyaller “*Dönemi belirsiz/bilinmeyen sinyaller*” olarak tanımlanmıştır.

Frekans analizinde (şekil 1.4 veya 1.6) izi oluşturan her bir basit sinüsoidalın frekans binlerindeki genlik ve evre bilgilerine ulaşılır. Her bir binde bulunan “w” (veya “f”) ( $T=1/f$ ) ve genlik değerleri kullanılarak (1.2.a veya 1.2.b) denklemi yazılabilir. Burada, evre olmadığı için evre spektrumu yoktur. Farklı sinüzoidaller ve toplamlarını hesaplayan Fortran programı, EK PR-1 dedir.



**Şekil 1.5** a) Değişik frekanslı, 10 sinüsoidalın toplamı b) sinüsoidaller (Lindsenth 1982)





**Şekil 1.6** şekil 1.5 a (denklem 1.2) da verilen izin frekans analizi (genlik spektrumu)

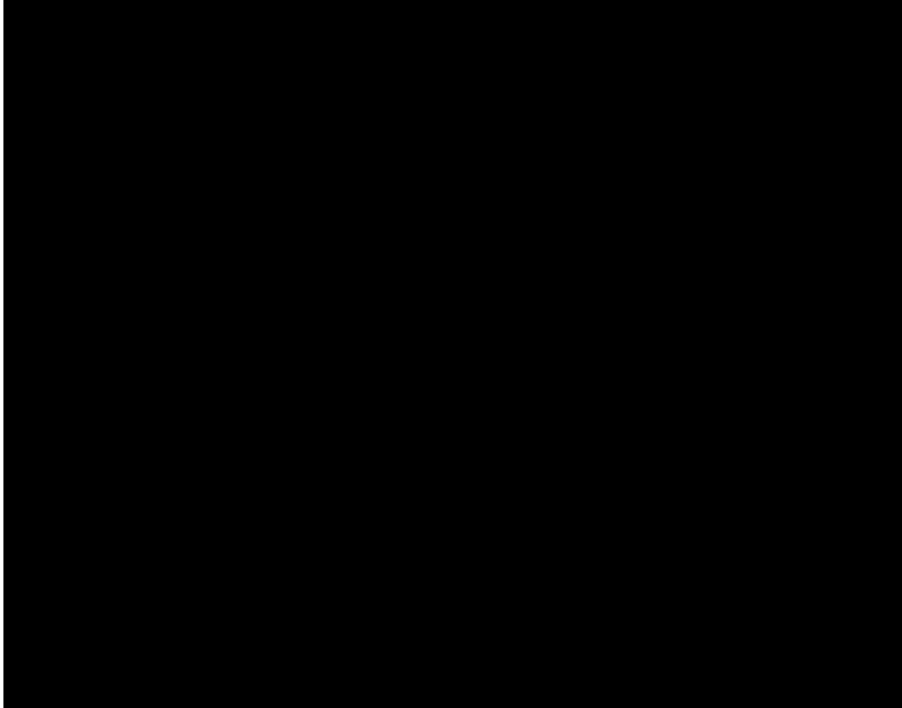
Şekil 1.7 de bir kosinüs dalgası zaman ortamında ötelenerek sinüs dalgasına dönüştürülürken elde edilen spektrum adım adım görülmektedir. Şekilde sol taraf zaman, sağ ise frekans ortamlarıdır.

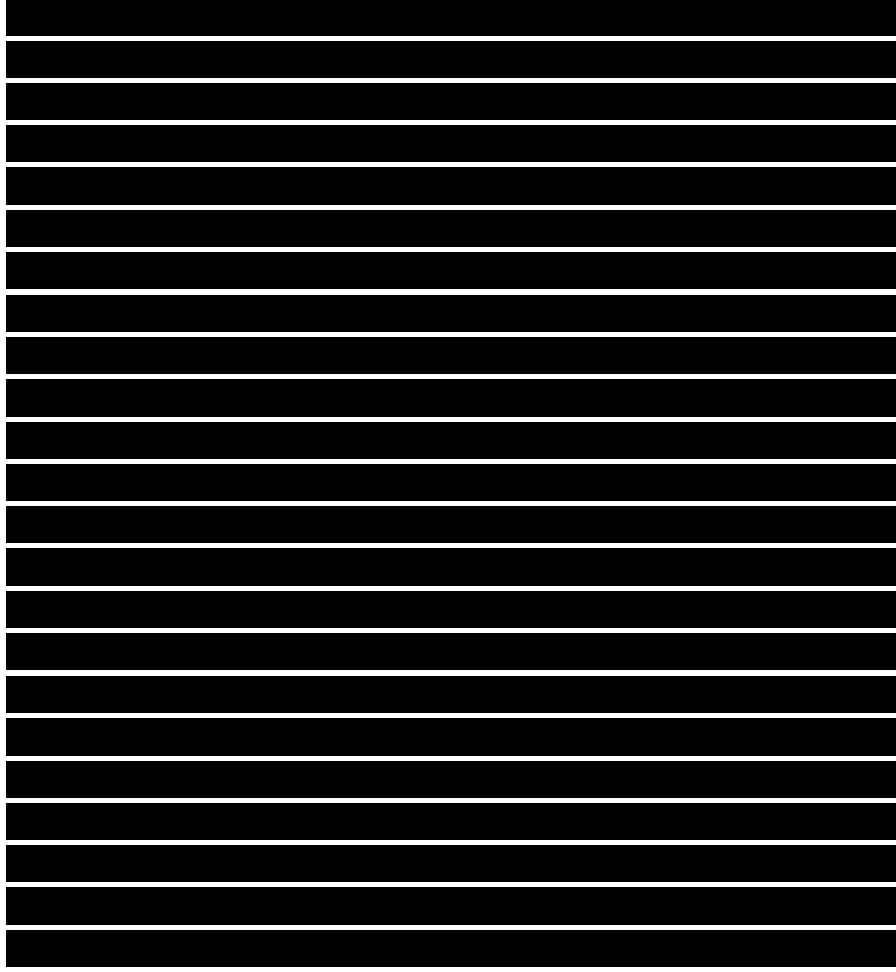
1.7.a' da zaman ortamındaki "cos" işlevi 2 sn dönemlidir ( $w=\pi$ ,  $f=0.5$  Hz). Sonsuz uzunluklu olarak düşünülen bu sinyal frekans ortamında,  $w=\pi$  Hz binide çubuk (dürtü) olarak görülür (Bkz bölüm 5-9). İşlev yalnızca gerçeldir. Sanal bileşeni yoktur.

1.7.b "cos" işlevi, çok küçük, " $\tau$ " kadar ötelenmiştir. Kayma sonucunda, frekans ortamında, gerçel ortamdan, sanal ortama doğru, ok yönünde, dönmeler oluşmuştur. Bu durumda, spektrumda, genliğin (kahverengi) hem sanal (mavi) hem de gerçel (kırmızı) bileşeni vardır. Denklem;  $|z|=a+jb$  veya  $|z|=F(w)+jF(w)$  veya  $|z|=GER[F(w)]+SAN[F(w)]$  yazılır (bkz Ek A).

1.7.c' de "cos" işlevi  $\pi/2$  radyan ( $90^0$ ) ötelenerek "sin" izine dönüşmüştür. Spektrumu, yalnızca "w" bininde, sanal ortamda (mavi) görülür. Gerçel ortamda bileşeni yoktur. Binler, frekans ekseninin "+" ve "-" tarafında zıt yöndedir.

Şekil 1.7.d de "cos" işlevi,  $\pi$  radyan ( $180^0$ ) ötelenmiştir (-cost). Spektrumları ise yalnızca gerçel eksenin "-" tarafında (kırmızı vektörler), ters (-1 ile çarpılmış) olarak görülür. Çeşitli sinyallere ait spektrumlar bölüm 3 te verilmektedir.





**Şekil 1.7** Sonsuz uzunluklu, “cos” ve “sin” sinyallerinin spektral ortam görüntüleri

Şekil 1.7.b de “ $\pi$ ” frekanslarında gerçel ve sanal bileşenler vardır ve tek bir “ $\pi$ ” frekansı için kolaylıkla gösterilir (bkz ek C şekil C3). Ancak birden çok sinüsoidal dalga daha olsaydı göstermede zorluk başlıyacaktı (bkz örnek 1). Bu nedenle frekans ortamına geçilerek, frekans analizi yapılır.

### ***1.2.2 Sinüzoidal hareket bağıntısının farklı biçimlerde gösterilmesi***

$f(t) = A \cos(\omega t \pm \varphi)$  En genel biçimde, sinüzoidal hareket (bkz ek B)

(1.3.a)

$$f(t) = A \sin(\omega t \pm \varphi) \quad (1.3.b)$$

olarak gösterilir. Euler kuramından,

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha) \quad (1.4)$$

den yararlanarak (bkz ekler, şekil B1-C3)

$$\cos(\alpha) = \text{Ger}[e^{j\alpha}]$$

$$\sin(\alpha) = \text{San}[e^{j\alpha}]$$

yazılır. Kullanılan gösterime uygun olarak, (1.3a-b) işlevleri

$$f(t) = \text{Ger}[Ae^{j(\omega t + \varphi)}] \quad (1.5.a)$$

$$f(t) = \text{San}[Ae^{j(\omega t + \varphi)}] \quad (1.5.b)$$

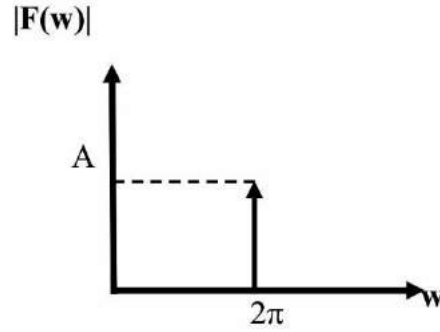
dır. (1.5) bağıntısındaki parantez içindeki  $Ae^{j(\omega t + \varphi)}$  terimine " karmaşık düzlemde dönen vektör", veya "Fazör" veya "Karmaşık düzlemde dönen vektör" denir (Bkz. EkB, Şekil B1-EkC, Şekil C3).

Dönen vektörün üç önemli özelliği vardır.

1. A dönen vektörün genliğidir ve sıfırdan büyüktür ( $A \geq 0$ ).
2. " $\varphi$ " dönen vektörün evresidir. Vektörün  $t=0$  anında gerçel eksenle yaptığı açı olarak tanımlanır. Sınırları ise  $(-\pi, \pi)$  arasındadır.
3. " $\omega$ " dönen vektörün açısal hızıdır. Çizgisel hız cinsinden karşılığı  $\omega_1 = 2\pi f$  dir. Doğrudan dönem'i içerir. Birimi devir/veri aralığıdır. Saat dönme yönünün tersi (+) yön olarak varsayılır.

1.3-1.5 denklemlerinin bağımsız değişkeni "t" dir ve zaman ortamındadır. Başka bir deyişle, verilen işlevler, "t" ye bağlı olarak değişirler. Ancak, her bir basit sinüzoidal harekette sabit olan, " $\omega$ " da bağımsız bir değişken olarak alınabilir. Bu koşullarda frekans ortamında, genlik ve evre bilgilerine ulaşılır. Örneğin şekil 1.3.a sinüzoidal için elde edilen bilgiler şekil 1.8 da verilmiştir. Evre olmadığı için evre bilgisi yoktur.





Şekil 1.8 Genlik spektrumu (tek yan bant)

### Örnek 1

$$f(t) = 4 \cos[2\pi \cdot 25 \cdot t - (\pi/3)] + 6 + 2 \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t) - 3 \cos(2\pi \cdot 60 \cdot t) \quad (1.6)$$

denklemini, “sanal” ve “gerçel” terimlerini kullanarak yazınız.

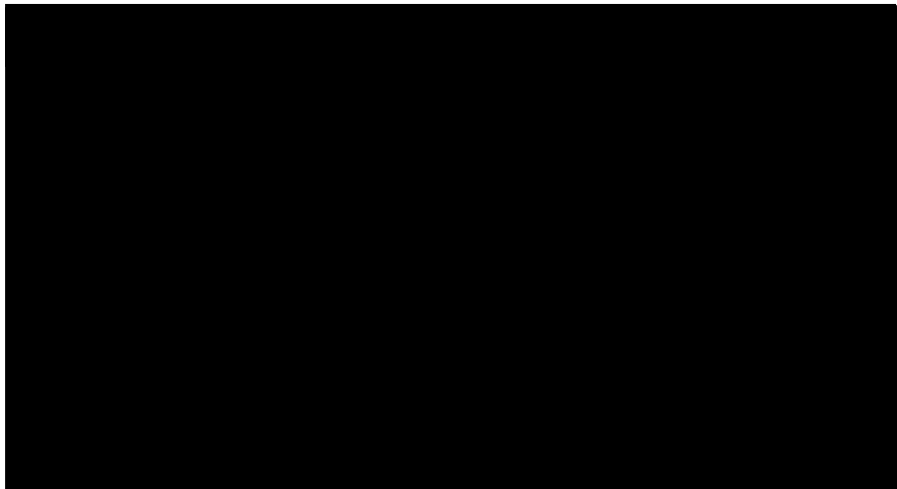
#### Çözüm

(1.6) bağıntısı, 4 adet sinüsoidalden oluşmuştur. Sinüsoidaller farklı genliklerde ve farklı açısal hızlarla dönmektedirler. Verilen denklem:

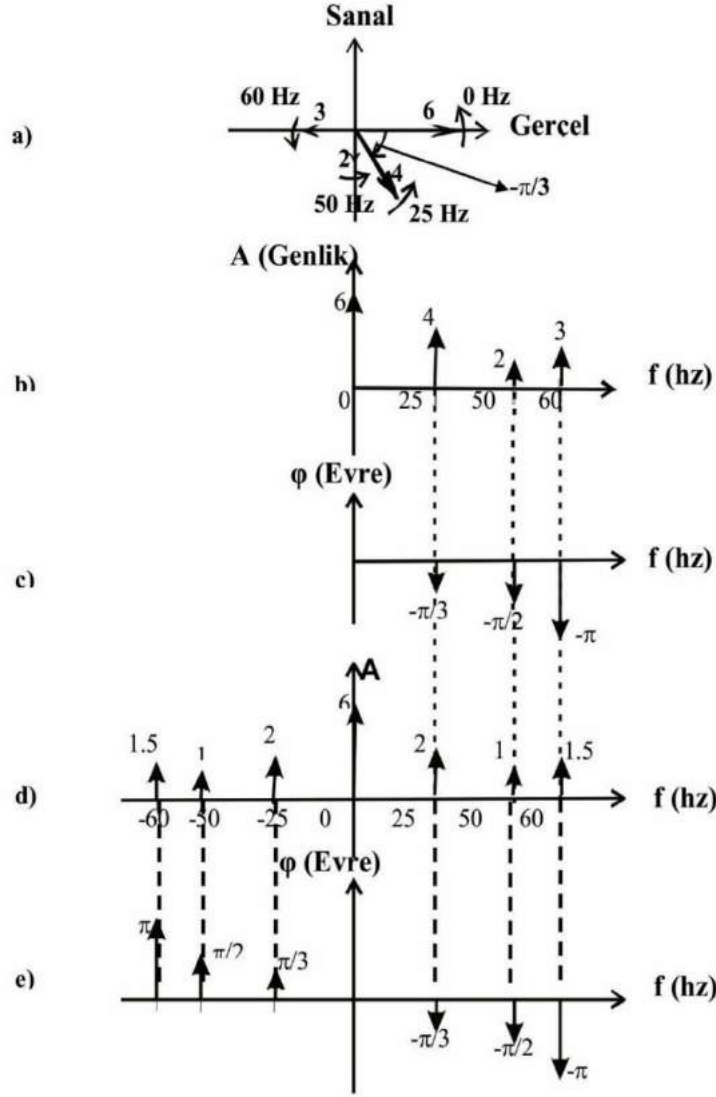
$$f(t) = Ger \left\{ 6e^{[j \cdot 2\pi \cdot 0 \cdot t - (\frac{\pi}{3})]} \right\} + Ger \left\{ 4e^{[2\pi \cdot 25 \cdot t - (\frac{\pi}{3})]} \right\} \\ + Ger \left\{ 2e^{[2\pi \cdot 50 \cdot t - (\frac{\pi}{2})]} \right\} + Ger \left\{ 3e^{[j(2\pi \cdot 60 \cdot t - \pi)]} \right\} \quad (1.7)$$

---

**Not:** Trigonometrik bağıntılardan izleyen eşitlikler yazılır.

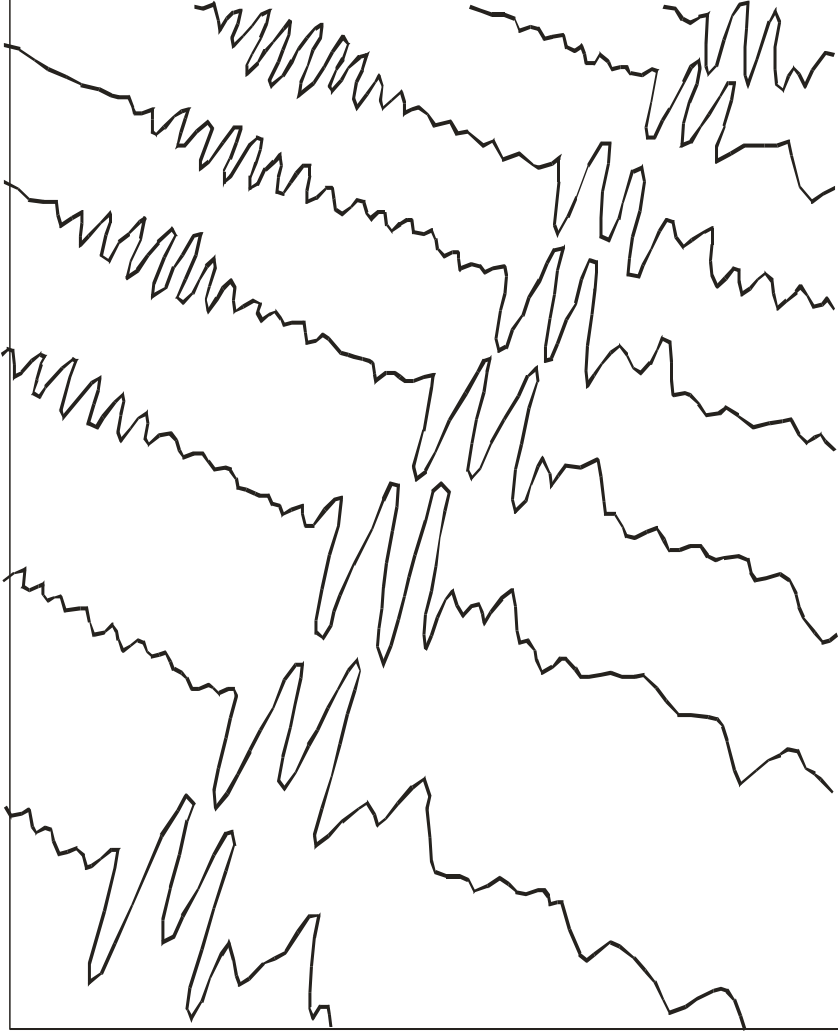


olarak elde edilir. (1.7) bağıntısının dönen vektör diyagramı ve çizgisel spektrumları (tek ve çift yan bantlı) şekil 1.9 da verilmektedir.

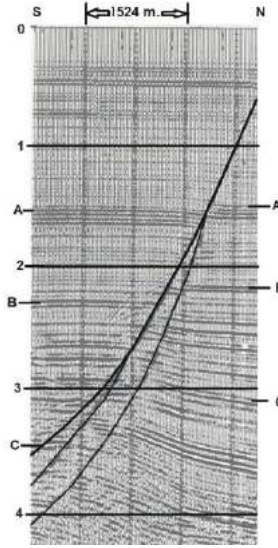


**Şekil 1.9** Frekans ortamı gösterimleri **a)** dönen vektör diyagramı **b)** genlik spektrumu (tek yan bantlı) **c)** evre spektrumu (tek yan bantlı) **d)** genlik spektrumu (çift yan bantlı) **e)** evre spektrumu (çift yan bantlı)

## EK-A Jeofizik Sinyaller

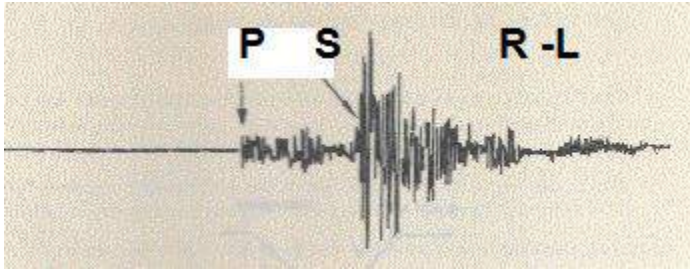


Sismik yöntemlerle elde edilen “P” ve “S” sinyalleri

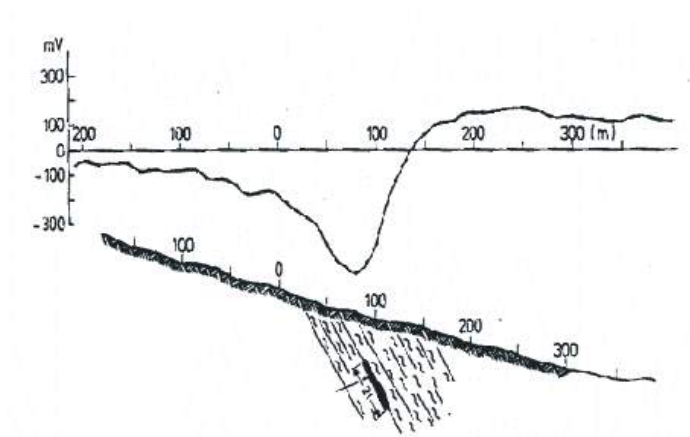


Güney-kuzey yönlü yansıma kesitinde güney kanadı düşmüş normal fay ve onu kesen ikincil faylar görülmektedir.

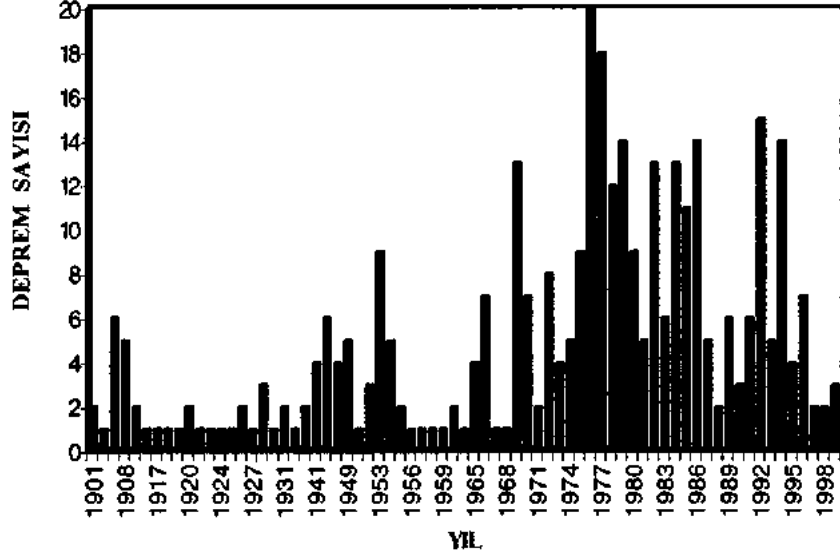
- 1-2 sn arasında 1.6 sn.de A'da düşen güney kanat görülmektedir. Bu kesimde  $v=2300$  m/sn, atım ise 75 m. dir.
- 2-3 sn arasında görülen olay B'de  $v=3000$  m/sn, atım ise 180 m. dir.
- 3-4 sn arasında görülen olay C'de  $v=4000$  m/sn, atım ise 1200 m. dir (Appl. Gophys. 1978).



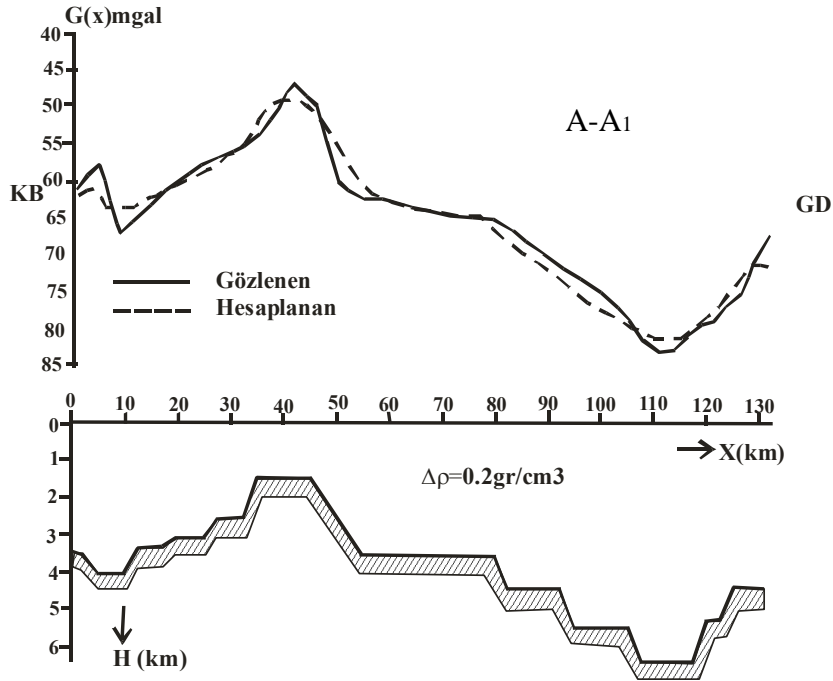
Kaliforniyada oluşan bir deprem sinyali (sismogram)



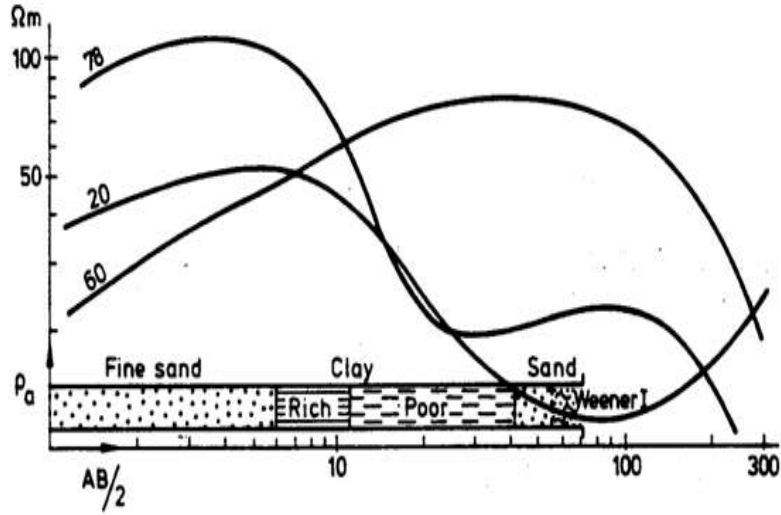
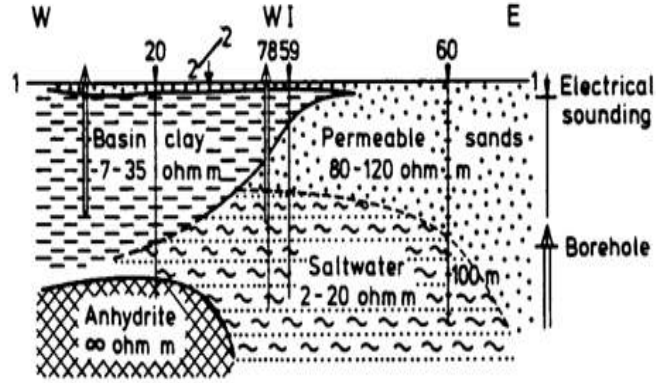
Gnays içinde yer alan bir grafit yatağına ait Doğal Potansiyel sinyali (Geophys. Prosp. 1962)



İzmir ve çevresinde oluşan deprem sayılarına ait sinyal



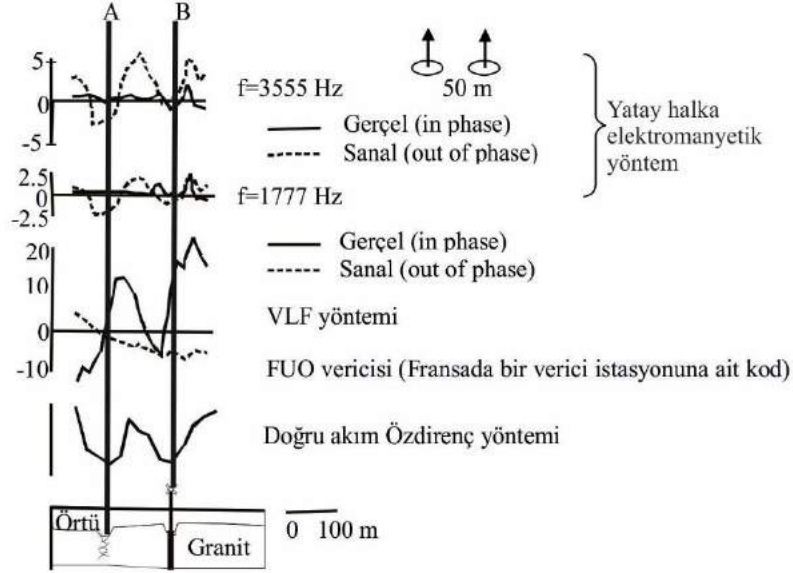
Ankara-Polatlı Bölgesi Bouguer Gravite A-A<sub>1</sub> Kesiti Modelleme Uygulaması Sarı (1984).



Bir alanda yapılan Düşey Elektrik Sondajları (özdirenç sinyali) ve Jeolojik birimler (Principles of app. Geophy.)

20 nolu sondaj eğrisi 3 katman eğrisidir. Yüzye 7-35  $\Omega\text{m}$ . özdirençli kil, altında çok düşük özdirençli (2-20  $\Omega\text{m}$ .) tuzlu su ve en altta ise çok büyük özdirençli anhidritler bulunmaktadır.

60 nolu sondaj eğrisi ise, iki katman eğrisidir. Geçirimli kumlar (80-120  $\Omega\text{m}$ .) yüzye ve altta ise çok düşük özdirençli (2-20  $\Omega\text{m}$ .) tuzlu su vardır.



Mankarga – Afrika’da, kırıklı granit ortamında uygulanan 3 farklı Jeofizik Yöntem. En üst iki şekil, farklı iki frekansta (3555 ve 1777 Hz) alınan Elektromanyetik yöntem ölçüleri, altındaki şekilde ise VLF (çok alçak frekans yöntemi) de alınan ölçüler ve en altta ise Doğru Akım Özdirenç yönteminde alınan kaydırma ölçümleri görülmektedir. “A” kuyusu kuru, “B” kuyusu ise  $1\text{m}^3/\text{saat}$  (16.7 litre/dakika) debili su alınmaktadır. Kuyu derinlikleri 30 m. dir. Ortamda, 12 m. kalınlıklı örtü katmanı, vardır. Yer altı suyu seviyesi ise 10. m. dir. Arazi gözlemlerinde, uygulanan tüm yöntemlerde, iletken ortamlara duyarlılık gözlenmektedir (Özurlan, G., Ulugergeli, E. U., 2005 ten alınmıştır).

## EK-B

### Sinüzoidal hareket

En genel durumda,

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

biçiminde modellenebilen harekettir (bu harekette, alınan yol,  $x=f(t)$  dir). Bu hareketin hız, ve kuvvet bağıntıları,

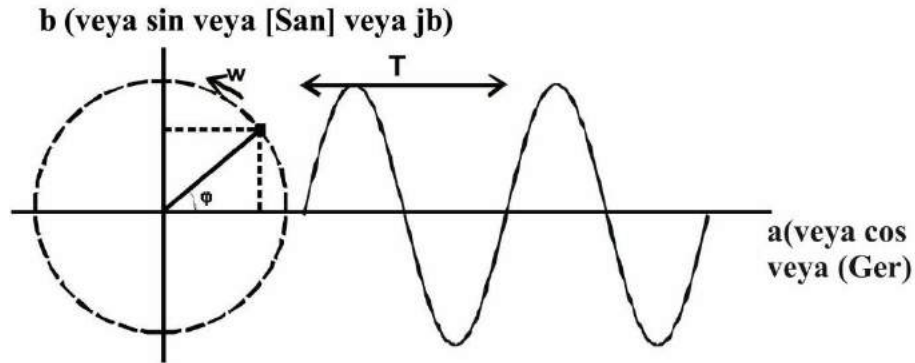
$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \quad (3)$$

$$f = ma = -m\omega^2 x \quad (4)$$

olarak elde edilir. (4) denklemi, hareketi oluşturan kuvvetin, denge durumu ile orantılı olan bir geri çağırıcı kuvvet olduğunu gösterir. Bu harekette denge durumu,  $x=0$  olan konumdur.  $x=0$  olma durumu, herhangi bir kuvvetin olmadığını (son denklemde  $f=0$ ) gösterir. Bu nedenle, sistemin denge durumudur. “ $x$ ” büyüdükçe, “ $f$ ” de büyür, sonunda, hareketin yönü, yeniden, denge durumuna yönelir ve bu durum sürer (sürtünmeler nedeniyle hareket sönümlenir).

Harmonik hareket, bir doğru boyunca yapılan, git-gel hareketi olarak tanımlanabilir. Ancak, söz konusu hareket, dairesel hareketle birlikte daha iyi anlaşılır. Şekil (B1) de bir parçacığın, bir doğru üzerindeki git-gel ve daire üzerindeki hareketleri gösterilmiştir. Söz konusu parçacığın hareketi bir kağıt düzlem üzerine iz düşürülürse, hareket “sinüs dalgacığı” nı çizer.



Şekil B1 dairesel ve sinüsodial hareket



Şekil B1 de

T: dönem, f: çizgisel frekans, w: açısal hız (frekans, birim zamandaki tur sayısı) hız ne kadar düşük/yavaş ise, “T” o kadar büyüktür,

$$T = \frac{1}{f} \quad T = \frac{2\pi}{w} \quad w = 2\pi f \varphi: \text{evredir. Aralarındaki ilişki,}$$

ile verilir. “f” veya “w” nın birimi ise devir/veri aralığıdır. Burada, veri aralığı “sn” olduğu için birim devir/sn dir (her bir sn. deki devir sayısı, cps: cycles per second). Tanımdan, veri aralığı sn olduğu için özel olarak, Hertz (Hz) adını alır. Bilindiği gibi, Heinrich Rudolph Hertz, elektromanyetik dalgaların varlığını bulan Alman fizikçidir.

Evre, başlangıçtan (t=0 anı) olan gecikmedir. (1) denkleminde t=0 konulduğunda,  $x=A\sin(\varphi)$  elde edilir. “A” ve “ $\varphi$ ” değerleri sabit olduğundan “x” değeri “t” ye bağlıdır. Eğer gecikme yok ise, bu kez, ( $\varphi=0$ )

$$x=A\sin(wt)$$

değerini alır. Örneğin, şekil 1.3.b grubunun en üstünde bulunan sinyal (f=100 Hz olan),  $\pi/2$  (=1.57) sn ötelenerek (gecikerek) başlasa, bu gecikme, evre oluşmasına

$$x=4\sin(100t+\pi/2) \text{ veya}$$

$$f(t)=4\sin(100t+\pi/2)$$

neden olacaktır. Yani söz konusu olan iz, başlangıçtan (t=0 anı), 1.57 sn. sonra başlayacaktır.

**Not:**

Şekil B1 de verilen parçacık hareketi, şekil C3 te verilen karmaşık ortamdaki parçacık hareketi ile özdeştir.

## EK-C

### Sayılar - karmaşık (complex) ortam

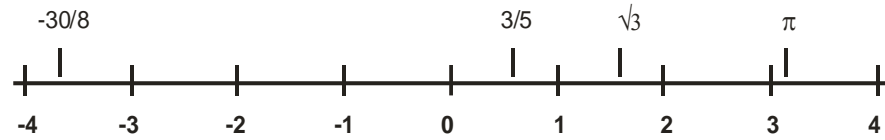
Günlük yaşamda, her karşılaşılan, ölçülen nesnelere ve olaylar sayı denilen sembollerle gösterilir. Yanına da kullanılan birim sistemi eklenir. Böylece sayı sembolüne anlam yüklenmiş olur. Örneğin,

- iki kent arasındaki uzaklık 150 km,
- aracın ağırlığı 1.5 ton,
- hava ortamındaki “p” dalganın hızı 340 m/sn (Keçeli 2009),
- deniz suyunun doygun kumun öz direnci 1 ohm-m. (Keçeli 2009), vb.

Genelde çoğunlukla bilinen ve kullanılan sayı sistemi, “Gerçek” sayı sistemidir. Gerçek sayı sistemi,

- tam sayılar (1, 5, 100, ... $\infty$ ),
- negatif ve sıfırlardan (0, -1, -5, -100, ... $-\infty$ ),
- kesirli sayılardan ( $-\infty$ , ... $-30/8$ ,  $3/5$ , ... $\infty$ ),
- üslü, (köklü) sayılardan  $3^{1/2} = \sqrt{3} = 1.73$ ,  $5^{3/8} = \sqrt[8]{15^3} = 2.76$ , ..
- devirli sayılar ( $\pi$ )

dan oluşur (Şekil C1).



Şekil C1 Gerçek sayı eksenini

Ancak matematikte, yalnızca gerçek sayıların kullanımı yetersiz kalır. Örneğin ikinci dereceden basit bir polinom olan,  $y(x) = x^2 + 1$  denkleminin çözümünde  $x = \sqrt{-1}$  elde edilir. Bu değer, Şekil C1’de gösterilemez. Bilindiği gibi,  $\sqrt{-1}$  sayısı sanal (imaginer) sayıdır. Bu koşulda, yeni karmaşık sayı sistemi, hem gerçek ve hem de sanal kısmı içerebilecek biçimde gösterilmelidir. Bu yeni sayı sistemi “Karmaşık sayılar” (complex numbers) dır.

Karmaşık bir sayı

$$z = a + jb$$

olarak gösterilir. Burada,

a: karmaşık sayının gerçel kısmıdır. Gerçel olması nedeniyle  $\text{Ger}[z]$  olarak gösterilebilir.

b: karmaşık sayının sanal kısmıdır. Sanal olması nedeniyle  $\text{San}[z]$  olarak gösterilebilir.

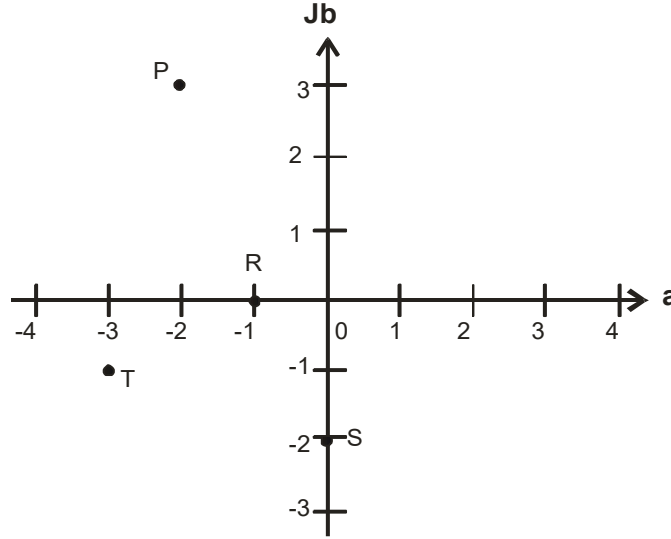
Söz konusu gösterim kullanılırsa,

$$z = \text{Ger}[z] + j \text{San}[z]$$

biçiminde de yazılır. Karmaşık sayı, sanal kısmının olmaması durumunda ("j" nin olmaması) gerçel sayıya döner.

Karmaşık bir sayı, gerçel ve sanal eksenlerin kullanıldığı, dik koordinat sisteminde gösterilir. Örneğin, aşağıda verilen sayıların gösterimi şekil C2 de yapılmıştır.

$$P = -2 + j3, \quad R = -1, \quad S = -j2, \quad T = -3 - j$$



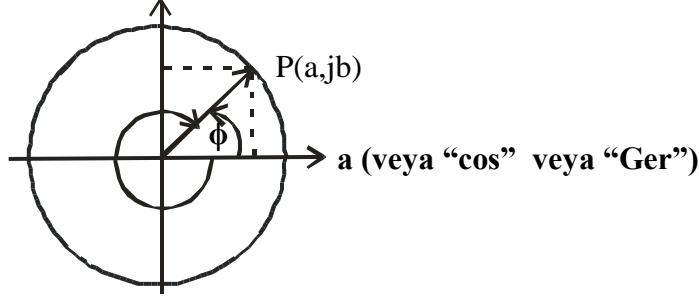
**Şekil C2** Dik koordinatlarda karmaşık sayılar

Dik koordinat sisteminden polar koordinat sistemine dönmek için aşağıdaki dönüşümlerin yapılması gerekir (şekil C3).

$$a = r \cos(\varphi) \quad b = r \sin(\varphi)$$

Burada "r" ye karmaşık sayının genliği denir. "r"; karmaşık sayı olan "z" nin mutlak değerine eşittir. Mutlak değer modül olarak tanımlandığından "mod z" şeklinde de gösterilebilir.

**jb (veya “sin” veya “San” veya jb)**



**Şekil C3** Karmaşık ortam (kutupsal) koordinat sistemi

$$r = (a^2 + b^2)^{1/2} = |a + jb| = |z| = \text{mod } z$$

“ $\varphi$ ” ise evre olarak tanımlanır. Şekil C3’ den

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a} \quad , \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

elde edilir. Aynı zamanda “z” karmaşık sayısının argümanı olarak ta belirtilebilir. O zaman evre bağıntısı;

$$\varphi = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

bulunur. Şekil C3 de evre açısının dönme yönü, saatin dönme yönü ile terstir. Ancak Fourier dönüşümlerinde söz konusu dönme yönü saat yönüdür ve  $\varphi = 2\pi - \varphi$  olarak alınmalıdır. Bu koşulda,

$$\tan(\varphi) = \tan\left(2\pi - \frac{b}{a}\right)$$

$$\tan\left(2\pi - \frac{b}{a}\right) = -\tan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$-\tan(\varphi) = \tan(-\varphi)$$

özellikleri kullanılarak,

$$\tan(\varphi) = \tan\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

elde edilir. Evre  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  veya  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$  olmak zorundadır. Burada verilen "r" ve " $\varphi$ " aynı zamanda kutupsal koordinatlardır. Eğer "z" sayısı birçok karmaşık vektörlerden oluşuyorsa  $z = a_n + j b_n$  yazılır.

2. Karmaşık eşlenik:  $z = a_n + j b_n$  şeklinde tanımlanan karmaşık bir sayının eşleniği  $z = a_n - j b_n$  dir. Karmaşık eşlenik vektörler için,

$$[a + jb] + [a - jb] = 2a$$

çarpımları ise;

$$[a + jb][a - jb] = a^2 + b^2 = [r \exp(j\phi)][r \exp(-j\phi)] = r^2$$

yazılabilir.

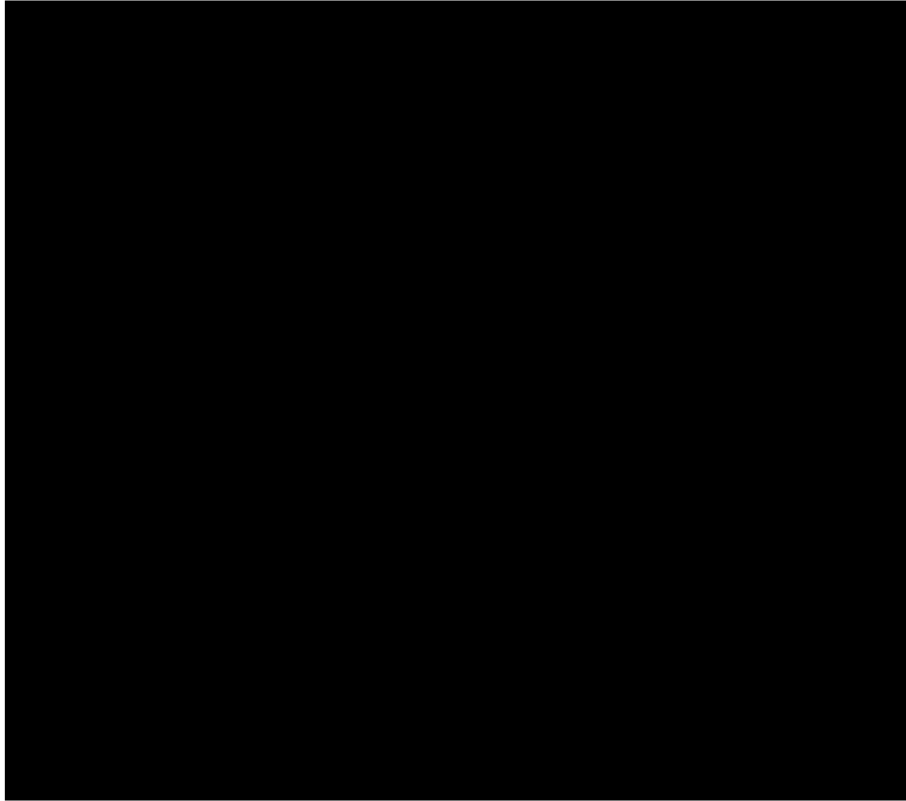
En basit olarak bir "sin" veya "cos" dalgacığı ( $90^\circ$  evre farklılığı) olarak gösterilebilir.

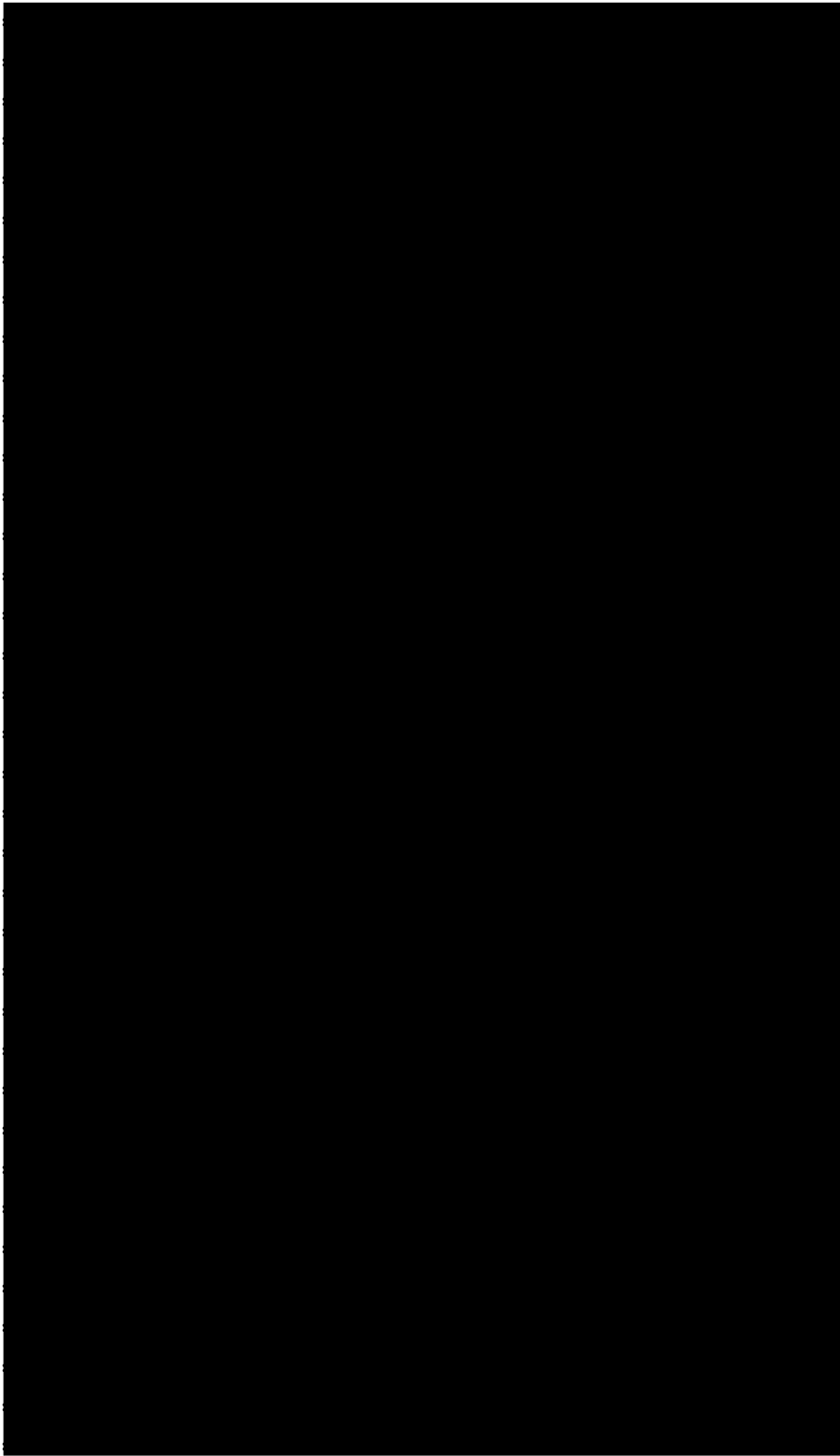
$$f(t) = A \cos(\omega t \pm \varphi)$$

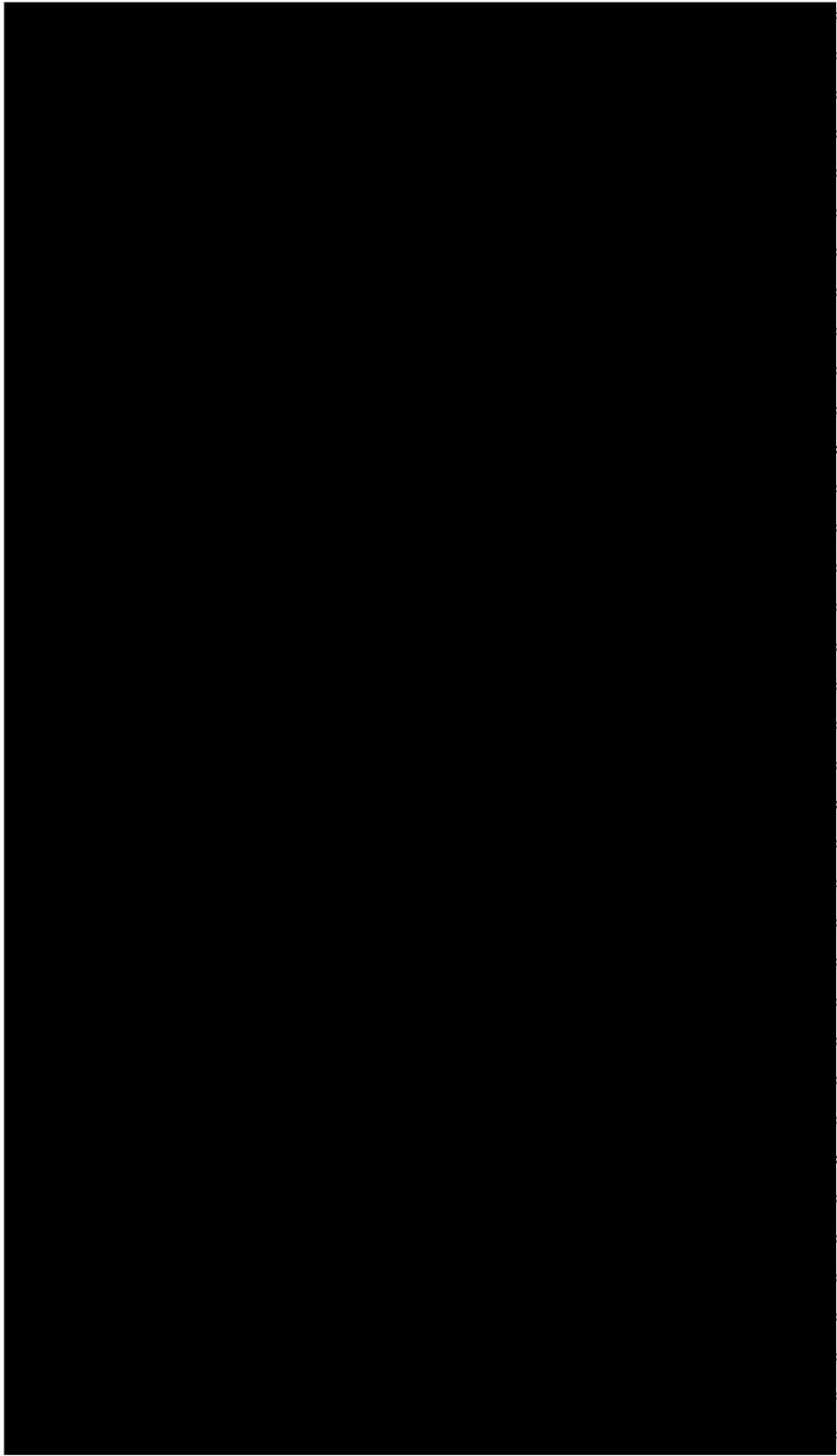
A: genlik,  $\varphi$ : evre,  $\omega$ : frekans, t: bağımsız değişkendir.

## EK PR-1

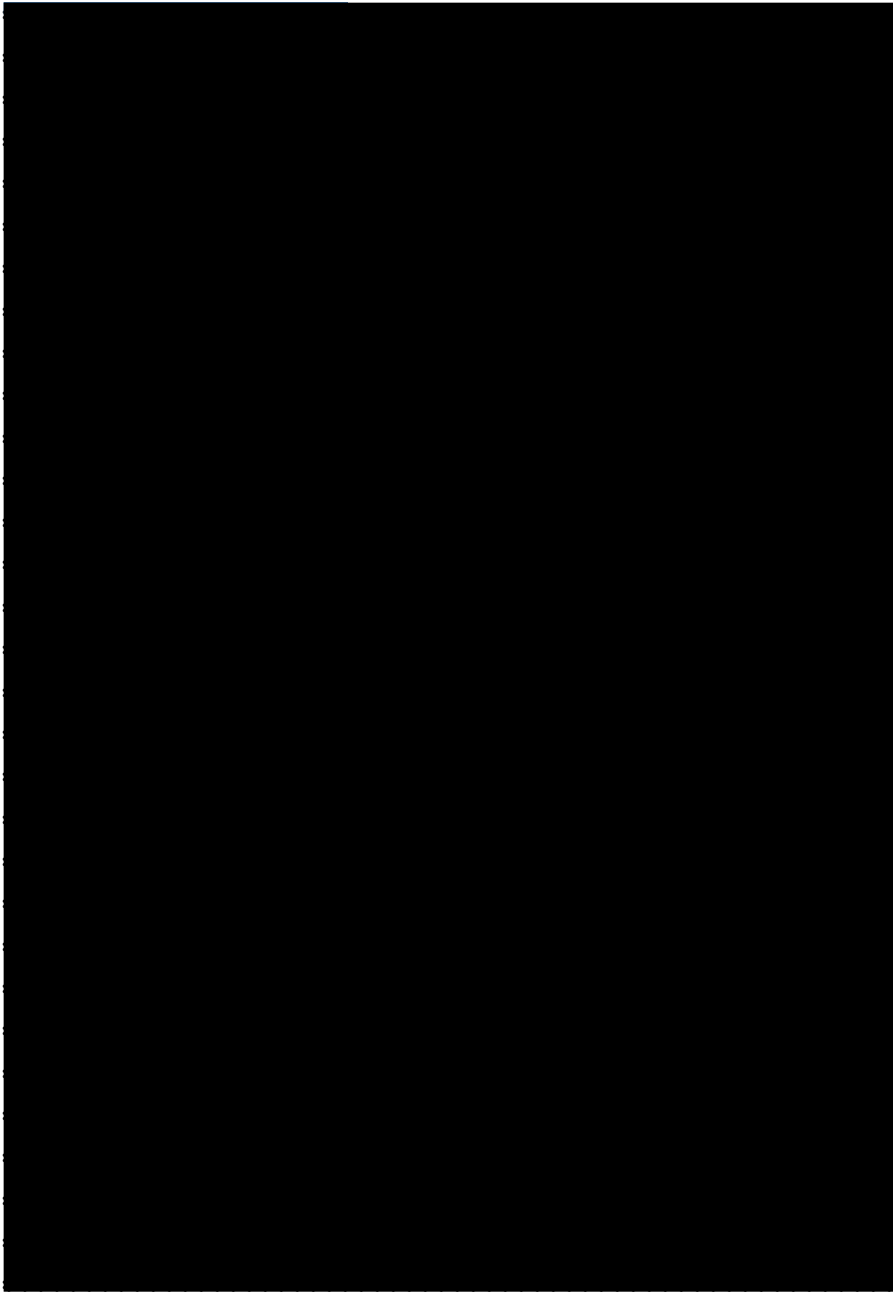
C \*\*\*\*\*  
C \*\*\*\*\* KURAMSAL SINYALLER HESABI \*\*\*\*\*  
C \*\*\*\*\* PROF. DR. RAHMI PINAR \*\*\*\*\*  
C \*\*\*\*\*  
DIMENSION A(100),W(100),T(100),Q(100),FF(100,10000),F(10000)  
DIMENSION X(10000),S(10000)  
C \*\*\*\*\*  
C KURAMSAL SINISODIALLER HESAPLAR  
C N: HESAPLANACAK SINYAL SAYISI (OKUTULACAK)  
C MBOY: PENCERE BOYUNUN, EN BUYUK DONEMLI SIYALIN KAC  
KATI  
C OLACAGI  
C A: SINYALLERIN GENLIKLERI W: SINYALLERIN ACISAL  
FREKANSLARI  
C HZ. CINSINDEN VERILMELIDIR Q: EVRELER (YOKSA "0" VERINIZ.  
C RADYAN OLARAK GIRILECEKTIR)  
C A,W,Q: HER SINYAL ICIN AYRI AYRI VE BIRER SATIRDA,  
C OKUTULACAKTIR.  
C  $T = 2 * \pi / W$  DIR (SINYALLERIN DONEMLERI)  
C \*\*\*\*\*



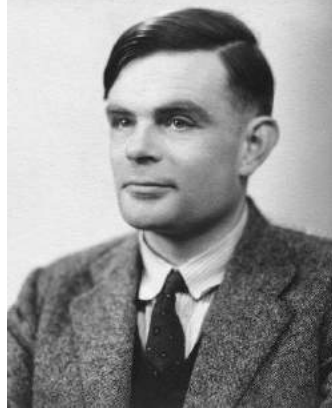








## *Alan Mathison Turing (1912-1954)*



Dahi İngiliz matematikçisi, bilgisayar bilimcisi ve kriptologtur. . Bilgisayar biliminin kurucusu sayılır. Geliştirmiş olduğu “**Turing testi**” ile makinelerin ve bilgisayarların düşünme yetisine sahip olup olamayacakları konusunda bir ölçüt öne sürmüştür. Ayrıca Turing algoritması ile çağdaş bilgisayarların temelini oluşturmuştur.

2. Dünya Savaşı sırasında Alman şifrelerinin kırılmasında çok önemli bir rol oynadığı için savaş kahramanı sayılmıştır. Adı ayrıca Princeton 'da beraber çalıştığı tez hocası Alonzo Church ile geliştirdiği Church-Turing Hipotezi ile de matematik tarihine geçmiştir. Bu hipotez, bir matematiksel kuram olmaktan çok matematik felsefesi hakkında çürütülememiş bir hipotezdir. 1952 yılında, kendisine şantaj yapılması nedeniyle polise başvurup eşcinsel olduğunu açıklayan **Turing**, yargılanarak, hormon yolu ile kısırlatılmaya mahkum edilmiş ve 1yıl boyunca östrojen iğnesi yapılmıştır. 1954 yılında potasyum siyanid zehirlenmesi nedeniyle ölmüştür. Polis araştırmasında **Turing**'in ölmeden önce ısırdığı elmanın zehirli olduğu anlaşılmış ve ölümün intihar sonucu olduğuna karar verilmiştir.

Adı, ayrıca anısına verilen ve bilgisayar bilimi Nobel 'i sayılan Turing Ödülü ile de akademik bilişim dünyasının bir parçası olmuştur. Gelişim biyolojisi alanındaki en önemli matematiksel modellerden biri olan reaksiyon – difizyon modeli de Turing tarafından matematiksel olarak çözülmüştür.

Apple'ın logosu olan ısırılmış elmanın, Alan Turing'in ölmeden önce yediği siyanürlü elmayı temsil ettiği iddia edilmektedir.

## **KAYNAKÇA**

Parasnis, D.S., Principles of Applied Geophysics, Chapman&Hall.

Telford, W.M., Geldart, L.P., Sheriff, R.E., Keys, D.A., 1978, Applied Geophysics, Cambridge Universty.

Sarı, C., 1984, Ankara-Polatlı Bölgesi Potansiyel Alan Verilerinin Veri-İşlem Yöntemleriyle Yorumu, DEÜ. Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İzmir.

Özurlan, G., Ulugergeli, E. U., 2005, Jeofizik Mühendisliğinde Elektromanyetik Yöntemler, Birsen Yayınevi, İstanbul.

Keçeli, A., 2009, Uygulamalı Jeofizik, TMMOB Jeofizik Mühendisleri Odası, Ankara.

Richard Baraniuk, Signal and systems, Rice University, Houston, Tx, <http://creativecommons.org/Licenses/by/1.0>

## **BÖLÜM 2**

### ***FOURIER SERİLERİ (FS)***

Bir ısı kaynağının, metal bir çubukta (veya levha) dağılımının hesaplanması için, birden çok trigonometrik işlevlerin kullanılması [Joseph Fourier](#) (1768-1830) tarafından düşünülmüştür. Isı dağılımı, parçalı diferansiyel denklemdir. Fourier' dan önce, problemin çözümü için ısı kaynağı, tek bir sinüs veya cosinüs denkleminde olduğu varsayılarak basit çözümler yapılmıştır. Fourier, basit olan bu çözümler yerine, karmaşık biçimde, birçok ısı kaynakları modelleri kullanmayı, "sin" ve "cos" terimlerine katsayılar da ekleyerek, bir seri oluşturmayı düşünmüştür. Oluşturulan seriye, "Fourier serisi" adı verilmiştir.

Fourier serilerinde kullanılan sinüs veya kosinüs işlevleri dönemli olmak zorundadır.

#### ***2.1. SİNYAL TÜRLERİ***

Mühendislik alanlarında, sinyaller, aşağıdaki gibi sınıflandırılır.

- **Sürekli sinyaller:**  
Bağımsız değişkenin ("t" veya "x") her anında tanımlıdır (değişken, boyut için bkz ek1). Herhangi bir denklemden hesaplanan kuramsal değerler ve analog kayıt alan cihazlardan sağlanan veriler bu sınıftadır.
- **Ayrık sinyaller:**  
Sürekli sinyallerin ayrık/sayısal duruma getirilmiş biçimidir. Sayısallaştırmada, örnekleme kuramındaki kurallar geçerlidir. Sürekli olan izler, ayrık duruma getirilmeden, hiçbir sayısal işlem uygulanamaz.
- **Dönemli (dönemsel) sinyaller:**  
Dönemleri kolaylıkla bulunan işlevlerdir. Sinyal analizinde kullanılan işlevler dönemsel veya yaklaşık dönemselidirler.
- **Yaklaşık dönemsel sinyaller:**

Sinyali oluşturan, tüm basit sinüzoidallerin, birer dönemlerinin olmasına karşın, tümünü simgeleyen ortak bir dönemin bulunamamasıdır.

➤ Enerji ve güç sinyalleri:

Bölüm 3.3 te verilecektir.

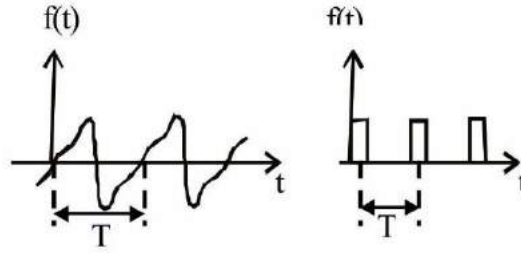
➤ Gelişigüzel sinyaller:

Geçmişteki değerlerinden yararlanarak, gelecekteki değerleri hesaplanamayan, kesin bağıntısı olmayan, sinyallerdir. Örneğin Jeofizikte, arazi gözlemlerinde çok sık olarak bulunan gürültüler, bu sınıfa girerler. Bu gruba giren izlerin, istatistiksel parametreleri (ortalama, karesel ortalama, değişinti-varyans, standart sapma, vb.) hesaplanarak, bilgiler edinilir.

## 2.2. DÖNEMLİ İŞLEVLER (PERIODIC FUNCTIONS)

Tüm "t" değerleri için

$$f(t) = f(t + T) \quad (2.1)$$



Şekil 2.1 Dönemli işlevler

eşitliğini sağlayan işlev dönemli olup, "T" ye dönem (periyot) denilir (Şekil 2.1). İşlev, "T" aralıklarla aynı değeri alarak,

$$f(t) = f(t + nT) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

eşitliğini sağlar. (2.2) denklemini sağlamayan sinyaller dönemsizdir (aperiyodik). Bu denklemle verilen en büyük "T" değerine (en küçük frekans) temel frekans denilir (bkz. bölüm 2.4.2).

Tüm trigonometrik işlevler dönemlidir. Trigonometrik olmayan diğer dönemli işlevler de FS. kullanılarak, "sin" ve "cos" terimlerinin toplamı,

$$f(t) = \cos(w_1 t) + \cos(w_2 t) \quad (2.3)$$

olarak yazılabilir. Topamlardan oluşan sinyalin dönemi,

$$w_1 = 2\pi m, \quad w_2 = 2\pi n$$

$$\frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi m}{T_2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{m}{n}$$

elde edilir. İki basit sinüzoidalın toplamından oluşan, yeni izin dönemi, tek bir değerdir ve en büyük dönemli sinyalin dönemine eşittir. Olacaktır (bkz. bölüm 1).

$$mT_1 = nT_2 \quad (2.4)$$

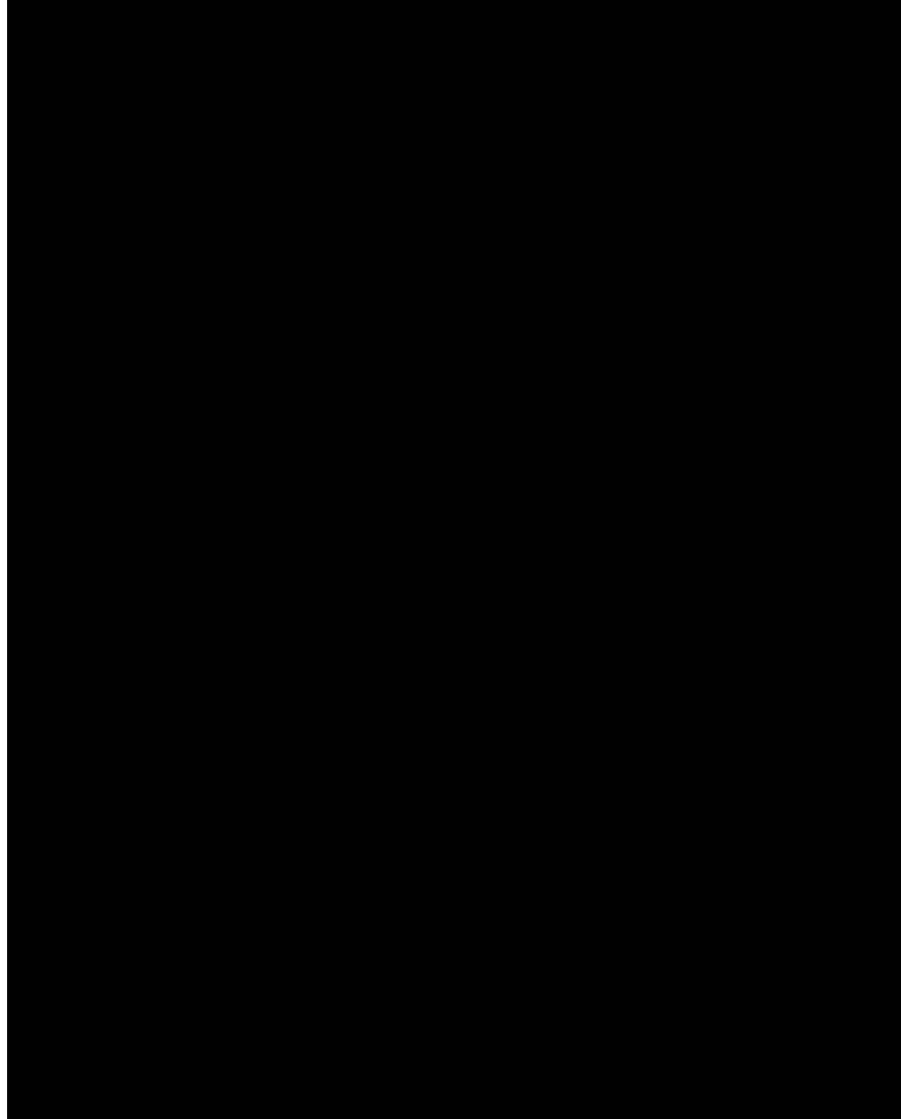
(2.4) eşitliği “m” ve “n” in EKOK. ile bulunur. EKOK. “m” ve “n” in tam sayı olması koşulunda sağlanır. Bunlardan bir tanesinin ondalıklı, devirli, köklü, vb. olması koşulunda, işlev dönemsizdir. Çünkü EKOK bulunabilmesi için, “m”, “n” değerleri tamsayı olmak zorundadır. Ancak, dönemli ve dönemsiz izlerin arasında da yer alan sinyaller vardır. Bu tip, işlevlere “**yaklaşık dönemsel işlev**” adı verilmiştir (bkz örnek 2.2). Yaklaşık dönemsel işlevlerde, işlevi oluşturan her bir sinyalin farklı dönemleri olmasına karşın, (2.4) bağıntısında verilen “m” ve “n” e ait tamsayının bulunmamasından ötürü, işlevin bir dönemi yoktur. Yaklaşık dönemli işlevler, bazı yayınlarda, dönemsiz olarak varsayılmaktadır.

### **Örnek 2.1**

$$f(t) = \cos(t/3) + \cos(t/4) \text{ işlevinin,}$$

- basit sinüzoidallerin dönemini,
- yeni izin dönemini,
- dönemin tam olarak görülebileceği zaman uzunluğunu bulunuz.

### ***Çözüm***



### Örnek 2.2

$f(t) = \cos(10t) + \cos(10 + \pi)t$  işlevini,

- basit sinüzoidallerin dönemini,
- yeni izin dönemini,
- tam olarak dönemin görülebileceği zaman uzunluğunu bulunuz.

### **Çözüm**

a)  $T_1 = \frac{2\pi}{w_1} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} = 0.628 \rightarrow w_1 = 10 \rightarrow 2m\pi = 10 \rightarrow m = \frac{5}{\pi}$

$$T_2 = \frac{2\pi}{w_2} = \frac{2\pi}{10+\pi} = \frac{2\pi}{13.14} = 0.478$$

$$w_2 = 13.14 \Rightarrow 2n\pi = 13.14 \Rightarrow n = \frac{10 + \pi}{2\pi}$$

b) Yeni iz, en büyük dönem olan, 0.628 sn. ile dönemlidir.

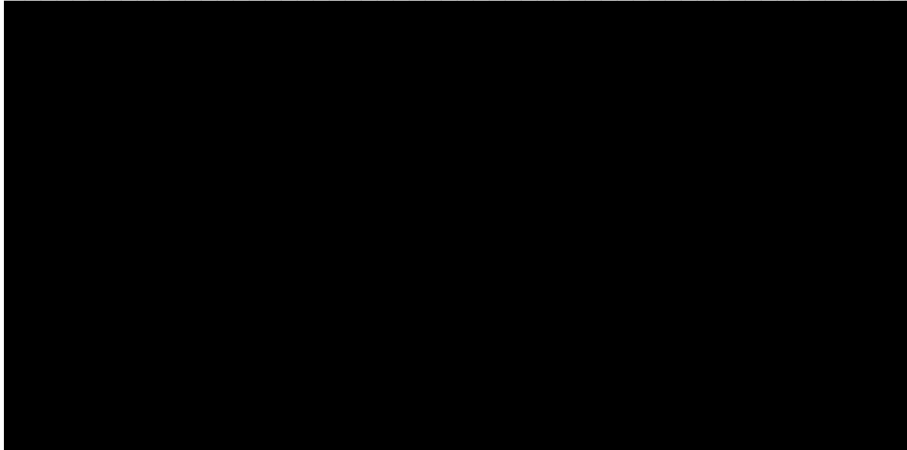
$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{5}{2\pi}}{\frac{10+\pi}{2\pi}} = \frac{5}{10+\pi} = 0.760942776 \dots \dots \dots$$

c) “m” ve “n” değerleri tam sayı olarak elde edilemez. “m/n” ise devirli bir sayıdır. Bu nedenle, toplamlarından oluşan izin ortak bir dönemi yoktur. “m” ve “n” değerlerinin tam sayı olarak bulunamaması, bunların dönemlerinin hiçbir zaman birbirilerinin tam katları olamayacağını gösterir. Dolayısıyla toplamlardan oluşan izin ortak bir dönemi yoktur. Verilen iz, dönemsiz veya yaklaşık dönemlidir.

### **Örnek 2.3**

Dönemleri,  $T_1=24.2$  sn,  $T_2=12.5$  sn,  $T_3=6.3$  sn olarak verilen üç sinüzoidalın toplamından oluşan izin dönemini bulunuz.

### **Çözüm**

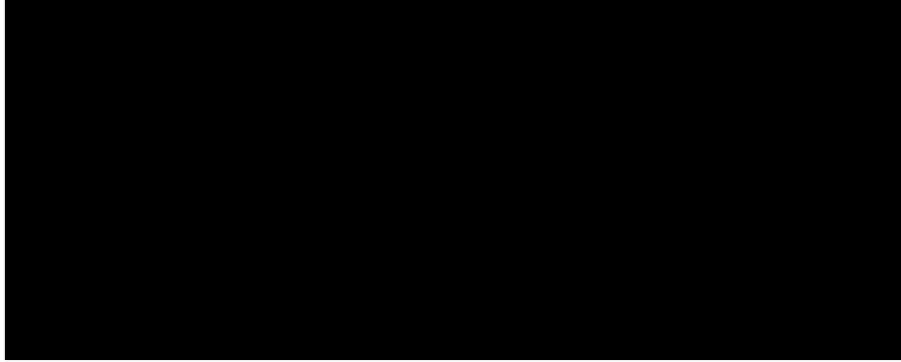


oranlar devirli olduklarından, toplamlardan oluşan iz dönemsiz veya yaklaşık dönemseldir.

### **Örnek 2.4**

$f(t)=e^{(-1+j)t}$  işlevinin dönemini bulunuz.





### **Örnek 2.5**

$f(t)=2\cos(16t)-\sin(4t)$  işlevinin dönemini bulunuz.

***Çözüm***



$$2\pi m = 16T_1 \Rightarrow T_1 = 2\pi m/16 = m\pi/8$$

$$2\pi n = 4T_2 \Rightarrow T_2 = 2\pi n/4 = n\pi/2$$

dönemli işlevlerde, tek bir dönem olması gerekliliğinden, toplamlardan oluşan  $f(t)$  işlevinin tek bir dönemi olmalıdır (T). Bu nedenle  $T=T_1=T_2$  dir.



EKOK=8

$$T = \frac{m\pi}{8} \rightarrow \frac{8\pi}{8} = \pi \text{ sn.}$$

Verilen sinyal dönemlidir ve dönemi  $\pi$  sn. dir.

### **Örnek 2.6**

$$f(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

işlevinin dönemini bulunuz.

***Çözüm***



$T=T_1=T_2=T_3$  olmalıdır.  $T=8m=8.2=16$  sn.

### **Örnek 2.7**

$f(t) = je^{j10t}$  işlevinin dönemini bulunuz.

**Çözüm**

$$f(t + T) = je^{j10(t+T)} = je^{j(10t+10T)}$$

$$2m\pi = 10T \Rightarrow T = \frac{2m\pi}{10} \Rightarrow T = \frac{m\pi}{5}$$

sinyal, tek bir sinyaldir. Dolayısıyla tek bir dönemi olacaktır. Bu nedenle  $m=1$  dir.  $T=\pi/5$  sn. dir (temel dönem).

### **Örnek 2.8**

$f(t) = \cos(t) + \sin(\sqrt{5}t)$  işlevinin dönemini bulunuz.

**Çözüm**

$$f(t + T) = \cos(t + T) + \sin(\sqrt{5}t + \sqrt{5}T)$$

$$2m\pi = T_1, \quad 2n\pi = \sqrt{5}T_2$$

$T=T_1=T_2$  olmalıdır.

$$2m\pi = \frac{2n\pi}{\sqrt{5}} \rightarrow m = \frac{n}{\sqrt{5}} \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

oran, bir tam sayı olmadığından, sinyalin ortak bir dönemi yoktur. Bu nedenle, Sinyal dönemsiz veya yaklaşık dönemlidir.

#### **2.2.1 Dönemli işlevlerin özellikleri**

(2.1) denklemi ile verilen tüm işlevler, aşağıdaki özellikleri içerirler.

$$\mathbf{a)} \quad \int_{a-T/2}^{a+T/2} f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \quad (2.5)$$

$a=T/2$  konulursa

$$\int_0^T f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \quad (2.6)$$

olarak bulunur.

$$\mathbf{b.} \quad \int_T^{t+T} f(t)dt = \int_0^t f(t)dt \quad (2.7)$$

$T=0$  alınarak, elde edilir.

$$\mathbf{c.} \quad g(t) = \int_0^t f(u)du \quad (2.8)$$

ise ancak,  $\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = 0$  koşulunun varlığında,

$$g(t+T) = g(t) \quad (2.9)$$

bağıntısı geçerlidir.

$$\mathbf{d.} \quad \int_c^{c+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt \quad (2.10)$$

$c = 0$  koyularak, elde edilir.

## 2.3 ORTOGONAL İŞLEVLER

### 2.3.1 Tanım

FS açılımlarının yapılabilmesi için sinüs ve kosinüs işlevlerinin özelliklerinin bilinmesi gerekir. Bunlardan en önemlisi ortogonalite (diklik) koşulu ve oluşan ortogonal işlevlerdir.

Bir işlev,  $a < t < b$  sınırları içinde  $\phi_m(t)$  ve  $\phi_n(t)$  gibi iki ayrı işlevden oluşuyorsa ve bu iki işlev, aralarında

$$\int_a^b \phi_m(t)\phi_n(t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \text{ için} \\ r_n & m = n \text{ için} \end{cases} \quad (2.11)$$

eşitliğini sağlıyorsa “ $\phi_m$ ” ve “ $\phi_n$ ” işlevleri (a,b) aralığında birbirlerine ortogonaldır denir.

### 2.3.2 Ortogonalite koşulları

Sinüzoidal işlevlerdeki ortogonalite koşulları aşağıda verilmektedir.

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt = 0 \quad m \neq 0 \text{ için} \quad (2.12.a)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{tüm } m \text{ değerleri için} \quad (2.12.b)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (2.12.c)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$(2.12.d)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{tüm } m \text{ ve } n \text{ değerlerinde} \quad (2.12.e)$$

$\omega_0 = 2\pi/T$  dir (temel frekans). Yukarıdaki bağıntılar; 1,  $\cos\omega_0 t$ ,  $\cos 2\omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t$ ,  $\sin\omega_0 t$ ,  $\sin 2\omega_0 t, \dots, \sin n\omega_0 t$  dizisinin  $-T/2 < t < T/2$  aralığında ortogonal olduğunu gösterir. Ancak bu dizi  $0 < t < T/2$  aralığında dik değildir. Yani aralığın değişmesi durumunda ortogonalite ortadan kalkar. Bu nedenle, diklikten söz edilirken, mutlaka aralık belirtilmelidir.

### Örnek 2.9

(1,  $\cos t$ ,  $\cos 2t$ , ..... ,  $\cos nt$ ) işlev dizisinin  $[-\pi, \pi]$  aralığında ortogonal olduğunu gösteriniz.

#### **Çözüm**

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

dizileri  $[-\pi, \pi]$  aralığında diktir. Parantez içindeki dizilere “ortonormal cümle” denilir. Aynı nedenlerle,

olduğuna göre

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}, \frac{\sin(t)}{(\pi)^{1/2}}, \frac{\cos(t)}{(\pi)^{1/2}}, \frac{\sin(nt)}{(\pi)^{1/2}}, \frac{\cos(nt)}{(\pi)^{1/2}}, \dots$$

ortonormal cümlelerdir.

### 2.3.3 Norm, normalleştirme

Bir sinyalin, “a-b” aralığındaki enerjisi (bkz bölüm 2.6),

$$E = \int_a^b [\phi_m(t)]^2 dt \quad (2.51.a)$$

denklemleriyle verilir. Söz konusu aralıkta, bir izin alabileceği en büyük değer, enerjisidir.

$$E = A_m = \int_a^b [\phi_m(t)]^2 dt \quad (2.13)$$

olarak gösterelim. Bu durumda,  $E=A_m$ ,  $E/A_m=1$  dir ve  $A_m$ , “norm” adını alır. “ $\phi_m$ ” işlevinin, en büyük değere bölünmesi, işlevin en büyük değerinin “1” olarak tanımlanması demektir.

$$E = A_m = \int_a^b [\phi_m(t)]^2 dt = 1 \quad (2.14)$$

Böylece, her ortogonal diziden (2.14 eşitliklerini sağlayan), ortonormal bir  $\frac{1}{\sqrt{A_m}} \phi_m$  işlev dizisi bulunabilir. Başka bir deyişle,

normu 1'e eşit olan bu dizi ORTONORMAL CÜMLE, cümleyi oluşturan her bir işleve de NORMALLEŞTİRİLMİŞ İŞLEV denir.

### Örnek 2.10

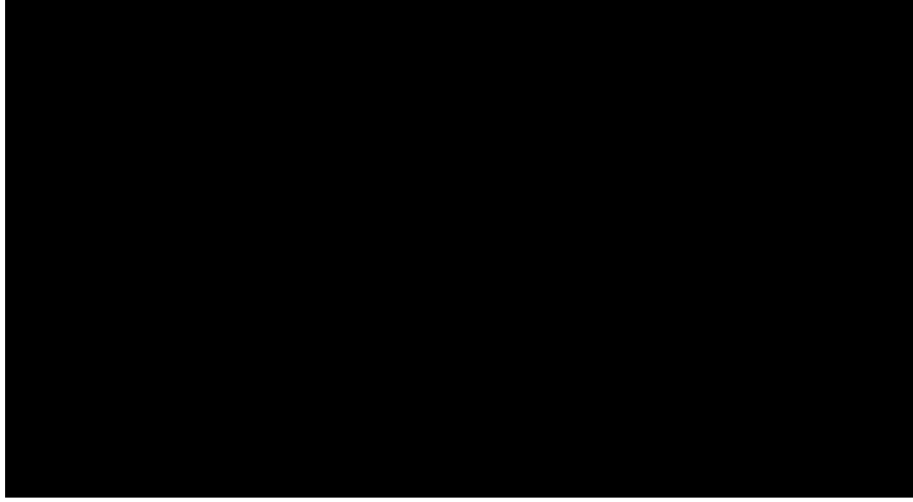
(2.12.c) eşitliğin kanıtlayınız (2.4 örneğinin sınırlarının  $-T/2, T/2$  alınarak çözümü).

#### Çözüm

Trigonometriden,  $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

$$w_0 t \begin{cases} \frac{T}{2} & \Rightarrow t = -\frac{T}{2} & \text{için} & \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{-T}{2} = -\pi \\ -\frac{T}{2} & \Rightarrow t = \frac{T}{2} & \text{için} & \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} = \pi \end{cases} \text{ dir.}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(mw_0 t) \cos(nw_0 t) dt = \frac{1}{2} \{ \cos[(m+n)w_0 t] + \cos[(m-n)w_0 t] \} dt$$



$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(mw_0 t) dt &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [1 + \cos(2mw_0 t)] dt = \frac{1}{2} t \Big|_{t=-T/2}^{T/2} + \frac{1}{4mw_0} \sin(2mw_0 t) \Big|_{t=-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{T}{2} + \frac{1}{4mw_0} [\sin(2m\pi) - \sin(-2m\pi)] = \frac{T}{2} + \frac{1}{4mw_0} 2 \sin(2m\pi) = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

### Örnek 2.11

$\Phi = t^2/p$  olarak verilen bir parabolü 0-5 birim arasında normalleştiriniz (Şekil 2.3).

### **Çözüm**

(2.14) den yararlanarak,

$$A_m = \int_0^5 \left( \frac{t^2}{p} \right)^2 dt = \frac{1}{p^2} \left| \frac{t^5}{5} \right|_0^5 = \frac{625}{p^2} \quad \text{normalleştirilmiş işlev ise}$$

$$\frac{\phi(t)}{(A_m)^{1/2}} = \frac{\frac{t^2}{5}}{\left( \frac{625}{p^2} \right)^{1/2}} = \frac{t^2}{25} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

### **Örnek 2.12**

$\phi_1(t)=t$ ,  $\phi_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$   
işlevlerinin, (-1,1) aralığında dikliğini gösteriniz.

### **Çözüm**

Ortogonalite koşulu (2.11) denklemi ile verilmiştir.

$$\int_{-1}^1 t \left( \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right) dt = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 t^3 dt - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t dt = \frac{3}{2} \left[ \frac{t^4}{4} \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 =$$
$$\frac{3}{8} [1^4 - (-1)^4] - \frac{1}{4} [1^2 - (-1)^2] = 0$$

### **Örnek 2.13**

$f(t)=t-1$  işlevi verilmektedir. Bu işlevi (1,3) aralığında normalleştiriniz. Normalleştirilmiş işlevi bulunuz.

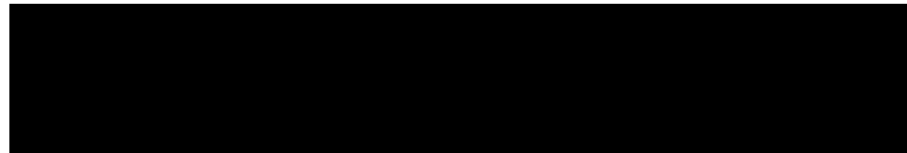


### **Çözüm**

### **Örnek 2.14**

$f(t)=e^{-t/2}$  işlevi verilmektedir. Bu işlevi (0,1) aralığında normalleştiriniz. Normalleştirilmiş işlevi bulunuz

### **Çözüm**



$e \cong 2.7$

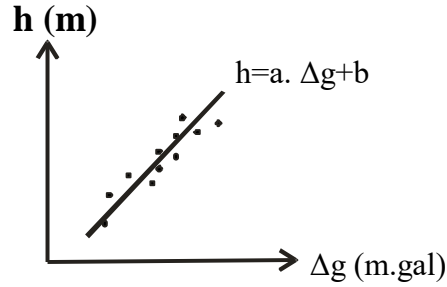
$$A_m = 1 - \frac{1}{2.7} \cong 0.63$$

$$\text{Normalleştirilmiş işlev} = \frac{f(t)}{A_m} = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{0.63}} = \frac{1}{0.79} e^{-\frac{t}{2}}$$

## 2.4 SERİLER, FOURIER SERİLERİ (FS)

### 2.4.1 Giriş

Serilerin, geniş kullanım alanları vardır. Mühendislikte, gözlem sonucu, sayısal veriler elde edilir. En basit olarak, verileri simgeleyecek bir denklem ile gösterilmek istenebilir. Bunun için, yaklaştırma yöntemleri kullanarak, bir denkleme ulaşılır. Örneğin, yüksekliğe bağlı olarak, gravite gözlemleri yapıldığını varsayalım (bu yöntem, gravitede yoğunluk saptamasında kullanılır). Söz konusu, dağılım şekil 2.2 de verilmektedir.



Şekil 2.2 Yüksekliğe bağlı olarak gravite değişimi

Amaç, gözlem noktalarından geçen en olası doğruyu bulmaktır. En Küçük Kareler yöntemi kullanılarak, hatası en az olacak “a” ve “b” değerleri saptanır ve doğru denklemi elde edilir. Böylece gözlem noktalarından geçen, en uygun doğrunun bağıntısı bulunmuş olur. Başka bir deyişle, gözlem noktaları bir doğruya yaklaştırılmıştır. Eğer, gözlem nokta dağılımı, bir parabole uygun olsaydı, bu kez ikinci dereceden bir polinom yazılarak, “a”, “b”, “c” katsayıları hesaplanarak, polinomun denklemi bulunacaktır.

Gözlem değerlerine uygun trigonometrik bir işlev kullanılmak istenirse, “sin” ve “cos” terimlerini içeren trigonometrik seriler kullanılır. Bu seri Fourier Serisi (FS) olarak adlandırılır. FS leri  $-\infty$ ,



$+\infty$  aralığında tanımlıdır. FS leri, yazım biçimlerine bağlı olarak aşağıdaki gibi gösterilir.

- FS. lerinin trigonometrik formu/gösterimi
- FS. lerinin karmaşık (eksponansiyel) formu/gösterimi
- FS. lerinin harmonik formu/gösterimi
- FS lerinin polar koordinatlar kullanılarak formu/gösterimi

#### 2.4.2 Fourier serilerinin trigonometrik formu

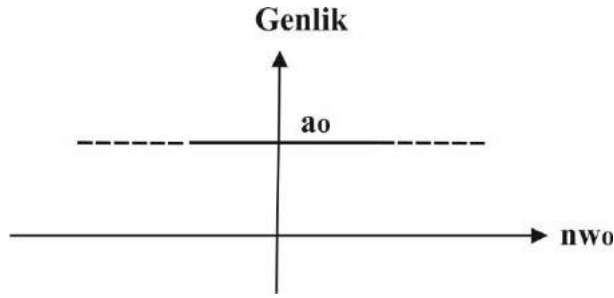
"T" dönemli bir işlev, aşağıdaki gibi, bir trigonometrik seri ile gösterilebilir.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos(w_0 t) + a_2 \cos(2w_0 t) + \dots + b_1 \sin(w_0 t) + b_2 \sin(2w_0 t) + \dots \quad (2.15)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)] \quad (2.16)$$

(2.15) veya (2.16) denklemleri ile ilgili açıklamalar:

- 1. terim olan “ $a_0/2$ ” sabit bir terimdir. “ $a_0$ ”genlikli, yatay eksene paralel bir doğrudur.  $w=0$  olduğu için, frekansla değişmez (şekil 2.3). Frekans bileşeni olmadığı için, elektrikte, “0” frekanslı akım (doğru akım, DC, direct current) bileşeni olarak tanımlanır.
- “ $w_0$ ” temel frekanstır. Temel frekans: sinyal içinde görülebilecek en alçak frekanstır (en uzun dönem). Doğrudan, frekans ortamı örnekleme aralığı ile ilişkilidir. Frekans ortamı örnekleme aralığı,  $\Delta w = w_0 = 2\pi/T$  dir. Jeofizik sinyallerin analizinde, “T” veri içindeki en uzun dalga boyudur (dönem). Veri içindeki en büyük dönem ise veri boyunun kendisidir.
- “cos” ve “sin” içeren terimler ise  $1w_0, 2w_0, 3w_0, \dots, nw_0$  frekanslı sinüzoidallerdir. Genlikleri, olan “ $a_n$ ” ve “ $b_n$ ”, tümlev denklemlerinden bulunur.



Şekil 2.3 doğru akım bileşeni ( $a_0$ )

- (2.15) veya (2.16) denklemleri, trigonometrik ifadeler kullanılarak yapılan bir yaklaşırma yöntemidir. Bağımsız eksen “ $t$ ” dir. Ancak, sinyal analizinde, bağımsız değişken olarak “ $w$ ” ( $nw_0$ ) alınır, bu koşulda frekans analizi yapılmış olur. Başka bir deyişle, sinyalin çeşitli frekanslardaki genlik ve evre bilgilerine ulaşılır.
- “cos” ve “sin” içeren terimler, “FS” lerinin harmonikleridir. “ $n=1$ ” için 1. harmonik olarak isimlendirilir. (2.16) bağıntısında, 1. harmoniğin, frekans eksenindeki değeri “ $1.w_0$ ” dır. Söz konusu, en alçak frekans, dolayısıyla en büyük dönemli sinyaldir. Örnek 2.16, dan görüldüğü gibi 1. harmonik, sinyal içindeki en uzun dönemdir (şekil 2.5.b). Daha yüksek frekanslı (veya kısa dönemli) dalgalar, temel frekans içeren (en uzun dönemli) dalğanın üzerine binerler. Şekil 2.5 ten, tüm kısa dönemli harmonikler (şekil 2.5.c-d-e), temel frekansa sahip dalğanın (şekil 2.5.b) üzerine binmiştir. Dolayısıyla, *temel frekans tanımı çok önemlidir.*
- Bu nedenle yapılan açılıma “harmonik analiz” ismi verilir.

(2.16) denklemi

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(nw_0t - \varphi_n) \quad (2.17)$$

olarak yazılabilir. Bu bağıntıda, “ $C_n \cos(nw_0t - \varphi_n)$ ” genel terimine, “ $f(t)$ ” işlevinin “ $n$ ” ci harmonik işlevi denilir. Son denklemde,

$C_n$  : “ $n$ .” harmoniğin genliği,  $\varphi_n$  : evre (faz) açısıdır.

### Örnek 2.15

(2.16) ve (2.17) bağıntılarından hareketle “ $C_n$ ” ve “ $\varphi_n$ ” i, “ $a_n$ ” ve “ $b_n$ ” cinsinden elde ediniz.

#### Çözüm

$a_n \cos(nw_0t) + b_n \sin(nw_0t)$  terimi  $\frac{(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}}{(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}}$  ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} [a_n \cos(nw_0t) + b_n \sin(nw_0t)] &= \frac{(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}}{(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}} \\ &\cdot [a_n \cos(nw_0t) + b_n \sin(nw_0t)] = \end{aligned}$$

$$= (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \left[ \frac{a_n}{(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}} \cos(nw_0t) + \frac{b_n}{(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}} \sin(nw_0t) \right]$$

diğer yandan,

$$\begin{aligned} f(t) &= C_n \cos(nw_0t - \varphi_n) = C_n [\cos(nw_0t)\cos(\varphi_n) + \sin(nw_0t)\sin(\varphi_n)] \Rightarrow \\ C_n [\cos(nw_0t)\cos(\varphi_n) + \sin(nw_0t)\sin(\varphi_n)] &= (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \\ \left[ \frac{a_n}{(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}} \cos(nw_0t) + \frac{b_n}{(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}} \sin(nw_0t) \right] & \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan katsayılar,

$$C_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \quad (2.18)$$

$$\cos(nw_0t)\cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}} \cos(nw_0t) \Rightarrow \cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}}$$

$$\sin(nw_0t)\sin(\varphi_n) = \frac{b_n}{(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}} \sin(nw_0t) \Rightarrow \sin(\varphi_n) = \frac{b_n}{(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}}$$

bu bağıntılardan da

$$\tan(\varphi_n) = \frac{\sin(\varphi_n)}{\cos(\varphi_n)} = \frac{b_n}{a_n} \quad \text{veya} \quad \varphi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (2.19)$$

elde edilir. Yukarıdaki yaklaşımlar göz önüne alındığında da

$$C_0 = \frac{1}{2} a_0 \quad (2.20)$$

bulunur. (2.20) bağıntısında:  $n=0$  için  $w_0=2\pi/T=2\pi f_0$  dır ( $w_0, f_0$  temel frekanslar).

#### 2.4.2.a Trigonometrik Fourier serilerinin kat sayılarının bulunması

“FS” katsayıları, hesaplanan dönem aralığına doğrudan bağlıdır. Dönemin değişmesi durumunda, katsayılar da değişir. Burada, dönem olarak  $-T/2, T/2$  alınmıştır.

(2.12) denklemleri ile verilen ortogonalite koşulları kullanılarak (2.16) denklemi ile verilen “FS” nin katsayıları elde edilebilir.

#### “a<sub>0</sub>” KATSAYISININ BULUNMASI:

(2.16) bağıntısının her iki tarafının  $-T/2, T/2$  aralığında tümlevi alınarak

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \cos(nw_0 t) dt}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \sin(nw_0 t) dt}_0$$

ulaşılır. Bu bağıntıda, toplam ile tümlevin yerlerini değiştirip ortogonalite koşulları kullanılırsa [(2.12a) ve (2.12b) denklemlerinden]

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} dt = \frac{a_0 T}{2} \quad (2.21)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

elde edilir. (2.21) bağıntısı, “f(t)” işlevinin  $(-T/2, T/2)$  sınırları arasında aritmetik ortalamasıdır.

#### “a<sub>N</sub>” VE “b<sub>N</sub>” KATSAYILARININ BULUNMASI:

(2.16) bağıntısının her iki tarafı  $\cos(mw_0 t)$  ile çarpılarak,  $(-T/2, T/2)$  aralığında tümlevi alınır.

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \cos(mw_0 t) = \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(mw_0 t) dt + \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nw_0 t) \right] \cos(mw_0 t) dt$$

$$+ \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nw_0 t) \right] \cos(mw_0 t) dt$$

Toplam ve tümlev işlevlerinin öncelik sırası değiştirilir ve (2.12a), (2.12c) ve (2.12e) denklemleri kullanılarak, (2.23) bağıntısı

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \cos(mw_0 t) dt = \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\cos(mw_0 t) dt}{0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\cos(nw_0 t) \cos(mw_0 t) dt}{0}$$

$$+ b_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin(nw_0 t) \cos(mw_0 t) dt}{0}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(mw_0 t) dt = \frac{T}{2} a_n$$

olarak elde edilir. Bağıntının sol tarafındaki “m” yerine “n” konularak, sonuçta, “a<sub>n</sub>” katsayısı,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(mw_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

bulunur. Benzer yolla (2.16) bağıntısının her iki yanını “sin(nw<sub>0</sub>t)” ile çarpılıp (-T/2, T/2) arasında tümlevi alındığında, “b<sub>n</sub>” katsayısı elde edilir.

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(mw_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

---

**Not:**

$$w_0 t = \begin{cases} \pi & t = T/2 \\ -\pi & t = -T/2 \end{cases} \quad w_0 t = \pi \quad \frac{2\pi}{T} t = \pi \quad t = \frac{T}{2}$$


---

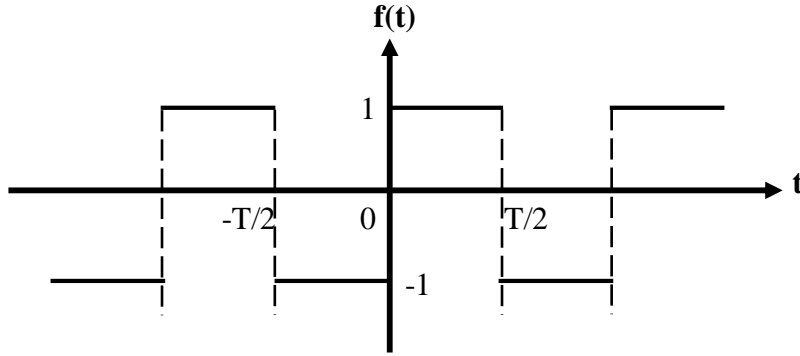
### **Örnek 2.16**

Aşağıda tanımı verilen f(t) işlevinin f(t)=f(t+T) olduğunu varsayarak şeklini çizin, spektrum ortamındaki frekans bileşenlerini bulunuz ve FS bağıntısını elde ediniz.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -T/2 < t < 0 \\ 1 & 0 < t < T/2 \end{cases}$$

### **Çözüm**

(2.21) bağıntısından (Şekil 2.4),



Şekil 2.4 “T” dönemli, “1” genlikli kare dalga

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0$$

dır. (2.21) bağıntısı ortalama değerdir (sıfır). Tümlev hesaplanması gereksizdir. (2.22) bağıntısından yararlanarak “ $a_n$ ” katsayısı,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(nw_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 (-1) \cos(nw_0 t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} (1) \cos(nw_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[ \frac{-1}{nw_0} \sin(nw_0 t) \Big|_{-T/2}^0 + \frac{1}{nw_0} \sin(nw_0 t) \Big|_0^{T/2} \right] \\ &= \frac{2}{T} \left\{ \frac{-1}{nw_0} [\sin(0) - \sin(-n\pi)] + \frac{1}{nw_0} [\sin(n\pi) - \sin(0)] \right\} = 0 \Rightarrow a_n = 0 \end{aligned}$$

---

**Not:**  $\sin(0) = \sin(n\pi) = 0$

---

olarak bulunur. (2.23) denkleminde yararlanarak “ $b_n$ ” katsayısı

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(nw_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 (-1) \sin(nw_0 t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} (1) \sin(nw_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[ \frac{1}{nw_0} \cos(nw_0 t) \Big|_{-T/2}^0 + \frac{-1}{nw_0} \cos(nw_0 t) \Big|_0^{T/2} \right] = \frac{2}{T} \left\{ \begin{aligned} &\frac{-1}{nw_0} [\cos(0) - \cos(-n\pi)] \\ &-\frac{1}{nw_0} [\cos(n\pi) - \cos(0)] \end{aligned} \right\} \\ &= \frac{2}{nw_0 T} [1 - \cos(n\pi) - \cos(n\pi) + 1] = \frac{2}{nw_0 T} [2 - 2\cos(n\pi)] = \frac{4}{nw_0 T} [1 - \cos(n\pi)] \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] \quad \text{elde edilir. Son bağıntıda,}$$

$n \rightarrow$  çift ise  $\cos(n\pi)=1$  ve  $b_n=0$ ,  
 $n \rightarrow$  tek ise  $\cos(n\pi)=-1$  ve  $b_n=4/n\pi$

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \rightarrow \text{çift} \\ 4/n\pi & n \rightarrow \text{tek} \end{cases}$$

dir. Bulunan “ $a_0$ ”, “ $a_n$ ” ve “ $b_n$ ” katsayıları (2.16) de yerine konularak FS elde edilir. Burada “ $a_0$ ” ve “ $a_n$ ” katsayıları sıfırdır. Dolayısıyla FS açılımı için yalnız “ $b_n$ ” katsayılarının bulunması yeterlidir.

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=\text{tek}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nw_0t) \Rightarrow f(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin(w_0t) + \frac{1}{3} \sin(3w_0t) + \frac{1}{5} \sin(5w_0t) + \dots \right] \quad (2.24)$$

elde edilir. Evre (2.19) bağıntısından bulunur. “ $a_n=0$ ” olmasından “ $\theta_n=\text{tg}^{-1}(\infty)$ ” olarak elde edilir. “ $\tan^{-1}$ ” işlevi “ $\pm\pi/2$ ” de sonsuzdur. “ $a_n$ ” katsayısının olmaması durumunda (işlevin yalnızca tek, çift bileşenin bulunmaması) evre “ $\theta_n=\pi/2$  veya  $\theta_n=-\pi/2(=3\pi/2)$ ” değerine sahip olacaktır.

### **Örnek 2.17**

Jeofizikte, öz direnç yönteminde, kısa bir sürede, yere doğru akım verilerek, akımın yerde yarattığı gerilim (potansiyel) ölçülür. Kullanılan dizilim sistemine bağlı olarak potansiyel farkı da ölçülebilir. Gözlemlerin sağlığı açısından akım, sağ ve sol elektrotlardan belirli sürede verilerek ortalama potansiyel (veya potansiyel farkı) elde edilir. Potansiyelin ortalaması alınarak, yerin akıma yanıtı bulunur. Bu biçimde yere akım verilirse, akım modeli şekil 2.4 teki gibi gösterilir.

IP yönteminde ise, yere verilen akımın süresi değiştirilerek, değişik frekanslarda, yere akım verilir. Değişik frekanslardan kasıt, yere verilen akımın herhangi bir frekansa sahip olması değildir. Akım kısa sürelerde, doğru akım olarak verilir (frekansı sıfır). Frekans ise yere verilen doğru akımın yön değiştirmesinin sıklığıdır

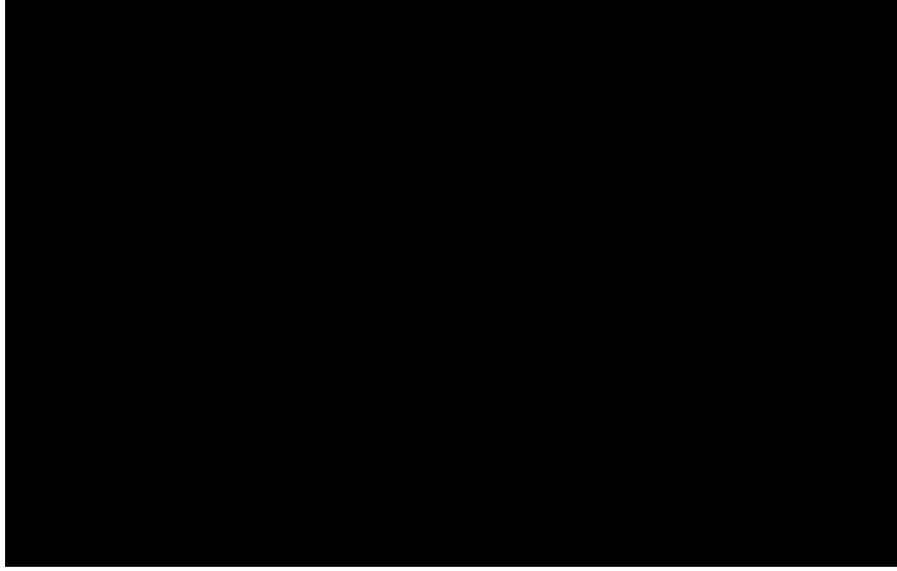
**a)** Yere verilen akımın dönemi  $-\pi, \pi$  aralığında ise tanım aralığını yazınız.

**b)** FS 1. harmoniğini kullanarak akım sıklığının frekansını hesaplayınız.

c) IP yönteminde, yere verilen akımın frekansı  $\omega=0.3$  Hz. ise zaman ortamındaki akım tanım denklemini yazınız.

d) a" maddesinde tanımlanan akım modelinin denklemini bulunuz.

### Çözüm



FS açılımına iki yönden bakılabilir.

1) Şekil 2.4 te verilen sonsuz uzunluklu, dönemsel işlevin, trigonometrik seriler kullanılarak, zaman ortamında, yaklaşılmış denkleminin elde edilmesidir (denklem 2.24, şekil 2.5).

2) Frekans ortamında, çeşitli harmoniklere ait binlerdeki ( $1\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, \dots$ ) genlik ve varsa evre değişimlerinin bulunmasıdır. "F( $\omega$ )" düşey, " $\omega$ " yatay eksen alınarak elde edilen spektrum, bize spektral ortamındaki genliklerin durumunu gösterir.  $F(\omega) \rightarrow |F(\omega)|$  veya

$$A(\omega) = \sqrt{\text{Ger}[F(\omega)]^2 + \text{San}[F(\omega)]^2} \quad \text{dan genlik ve sanal bileşen}$$

varsa, evre spektrumu  $\Phi(\omega) = -\text{Arctg} \frac{\text{San}[F(\omega)]^2}{\text{Ger}[F(\omega)]^2}$  dan bulunur.

Şekil 2.5 (a) da verilen  $T=2\pi$  dönemli tanımsal sinyalin denklemi, FS leri kullanılarak elde edilmiştir (denklem 2.24). Bağlantıyı oluşturan sinüzoidaller, onun harmonikleridir. Burada ilk 4 harmonik hesaplanarak çizilmiştir. 1. nin genliği 1.27 birimken, 4. de 0.2 ye düşmüştür. Harmonik sayısı arttıkça, genlikler hızlı olarak sönmektedir. En büyük dönem ise 1. ye aittir. Söz konusu harmoniğin



dönemi, tanımlanan sinyalin dönemi ile aynıdır. Dönem, sinyal içinde bulunabilecek en alçak frekanstır (en uzun dönem). Bu frekansa “Temel Frekans” adı verilir. Daha yüksek frekanslı (kısa dönemli) tüm sinyaller, bu sinyalin üzerine binmiştir. Bu nedenle, “sinyalin dönemi, kendisini oluşturan değişik dönemli, sinyaller içinde, en büyük döneme sahip sinyal ile aynıdır” sonucu ve yargısına ulaşılır. Gerçekten de, şekil 2.5.f incelendiğinde, sinyalin  $T=2\pi=6.28$  sn. ile dönemli olduğu görülür. Buraya dek, probleme, bir seriye açılım olarak bakılmıştır. Ancak sinyal analizinde, bu yön ile pek ilgilenilmez. Daha çok, frekansa bağlı olarak, genlik ve evre değerlerinin değişimleri önemsenir. Frekanslara ait genlikler kullanılarak, sinyal, analiz (kendinden daha basit sinüzoidallere ayırma) edilir. Frekans ortamında yapılan bu işleme “frekans analiz” denilir. Bu yol ile “genlik” ve “evre” spektrumu bulunur. Verilen örnekte, “sin” içeren terim (sanal kısım) olmadığı için evre spektrumu yoktur. Şekil 2.5.f de verilen sinyalin genlik spektrumu ise şekil 2.6 da verilmektedir. Elde edilen genlik spektrumundan yararlanılarak analiz edilen sinyalin denklemi yazılabilir (bkz bölüm 1).  $f(t)=A.\sin(wt)$  kullanılarak ve şekil 2.6 dan yararlanılarak,

$$f(t)=1.27\sin(1t)+0.42\sin(3t)+0.26\sin(5t)+0.18\sin(7t)+\dots \quad (2.25)$$

yazılabilir. (2.25) eşitliği,  $T=2\pi$  alınırsa, (2.24) denklemi ile aynıdır.

### 2.4.3 Karmaşık (eksponansiyel) Fourier serileri

FS de trigonometrik işlevler yerine karmaşık işlevler kullanılarak hesaplamalar basitleştirilir.

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)] \quad (2.26)$$

Euler denklemlerinden,

$$\cos(nw_0 t) = \frac{1}{2} (e^{jn w_0 t} + e^{-jn w_0 t}) \quad (2.27)$$

$$\sin(nw_0 t) = \frac{1}{2j} (e^{jn w_0 t} - e^{-jn w_0 t}) \quad (2.28)$$

bağıntıları (2.26) da yerine yazıldığında,

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \frac{1}{2} (e^{jn w_0 t} + e^{-jn w_0 t}) \right] + \left[ b_n \frac{1}{2} (e^{jn w_0 t} - e^{-jn w_0 t}) \right] \quad (2.29)$$

(2.29) bağıntısının içindeki parantezler açılıp yeniden düzenlenirse,

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (a_n - j b_n) e^{j n \omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_n + j b_n) e^{-j n \omega_0 t} \right] \quad (2.30)$$

elde edilir. (2.30) bağıntısında

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_n = \frac{a_n - j b_n}{2}, \quad C_{-n} = \frac{a_n + j b_n}{2} \quad (2.31)$$

konursa,

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{j n \omega_0 t} + C_{-n} e^{-j n \omega_0 t}) \Rightarrow f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{j n \omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{\infty} C_n e^{-j n \omega_0 t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j n \omega_0 t} \quad (2.32)$$

karmaşık FS bulunur.  $C_0$ ,  $C_n$ ,  $C_{-n}$  katsayıları,

$$C_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (2.33)$$

$$C_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) = \frac{1}{T} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n \omega_0 t) dt - j \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n \omega_0 t) dt \right]$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) [\cos(n \omega_0 t) - j \sin(n \omega_0 t)] dt$$

$$C_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j n \omega_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (2.34)$$

benzer şekilde  $n < 0$  için

$$C_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{j n \omega_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (2.35)$$

elde edilir. (2.34) ve (2.35) bağıntıları birbirlerinin karmaşık eşleniğidir (conjugate). Yani:

$$C_{-n} = C_n^* \quad (2.36)$$

dir (bkz bölüm 1 ek-A). “ $f(t) e^{-j n \omega_0 t}$ ” işlevi “T” ile dönemlidir.

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j n \omega_0 t} dt \quad (2.37)$$

“ $C_n$ ” katsayısının “ $a_n$ ” ve “ $b_n$ ” cinsinden değeri,

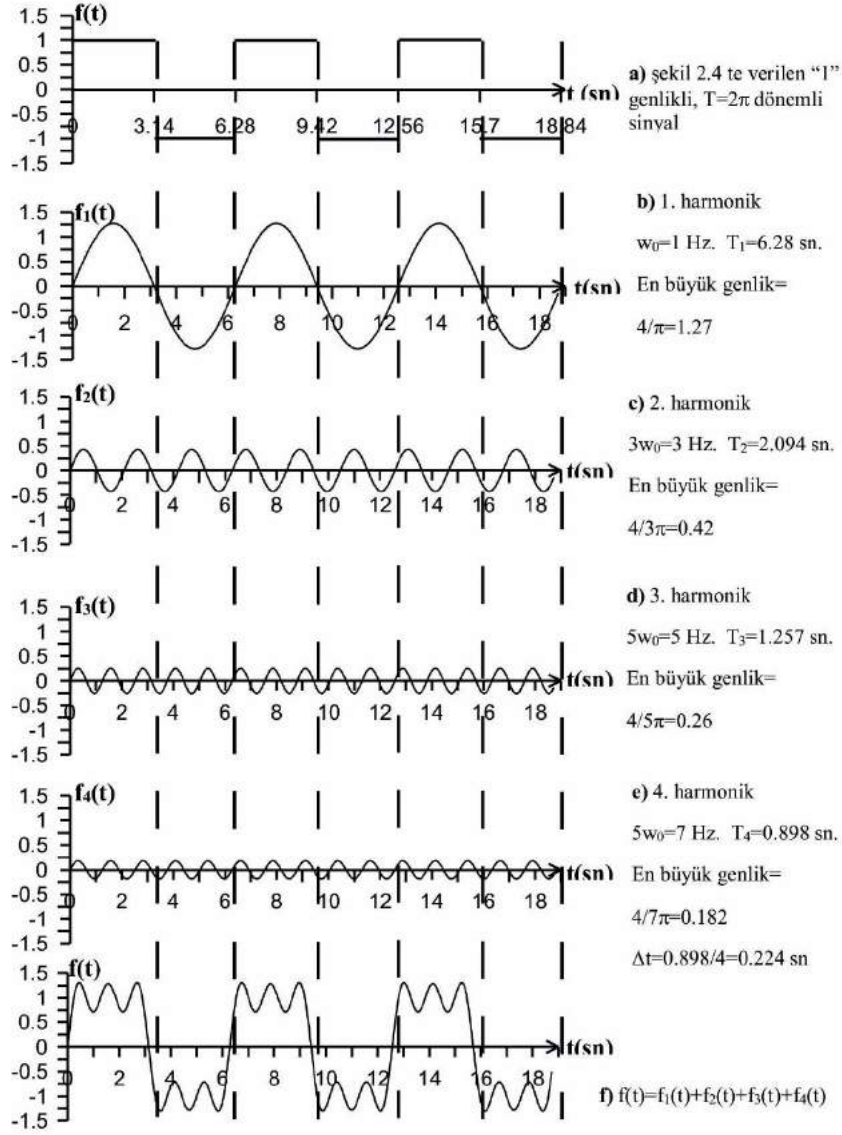
$$|C_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (2.38)$$

dır. Ayrıca evre de bulunabiliyorsa (yoksa  $\varphi_n = 0$ ).

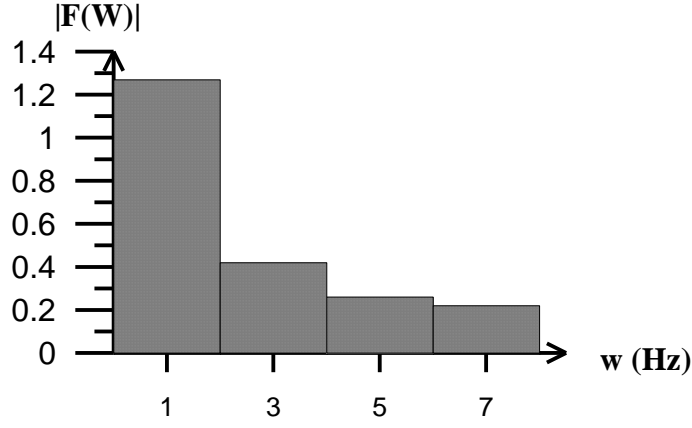
$$C_n = C_n e^{j \varphi_n}, \quad C_{-n} = C_n^* = C_n e^{-j \varphi_n} \quad (2.39)$$

$$\varphi_n = \text{tg}^{-1}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (2.40)$$

bulunur. Evrenin olmaması koşulunda ( $\varphi_n=0$ ),  $C_0=a_0/2$  elde edilir ve gerçeldir (doğru akım bileşeni)



**Şekil 2.5** Örnek 2.16 da tanımsal olarak verilen sinyalin harmonikleri ve sinyal (2.24 denklemi).



Şekil 2.6 Genlik spektrumu

#### 2.4.3.a Karmaşık FS lerinde ortogonallik

$\Phi_m(t) = e^{jm\omega_0 t}$        $\Phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$  olarak verilsin.

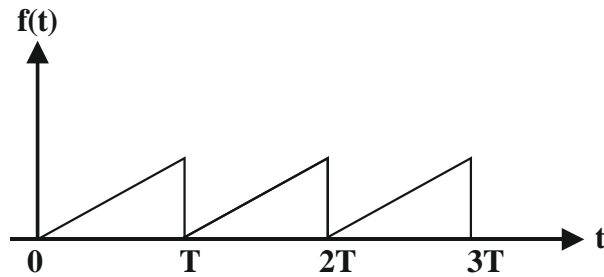
$$\Phi_m^*(t) = e^{-jm\omega_0 t} = \cos(m\omega_0 t) - j \sin(m\omega_0 t)$$

$$\int_a^b \Phi_n(t) \Phi_m^*(t) dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ r_n & n = m \end{cases} \text{ elde edilir.}$$

#### Örnek 2.18

Aşağıda bağıntısı verilen testere dişi (şekil 2.7) işlevini karmaşık FS ne açınız.

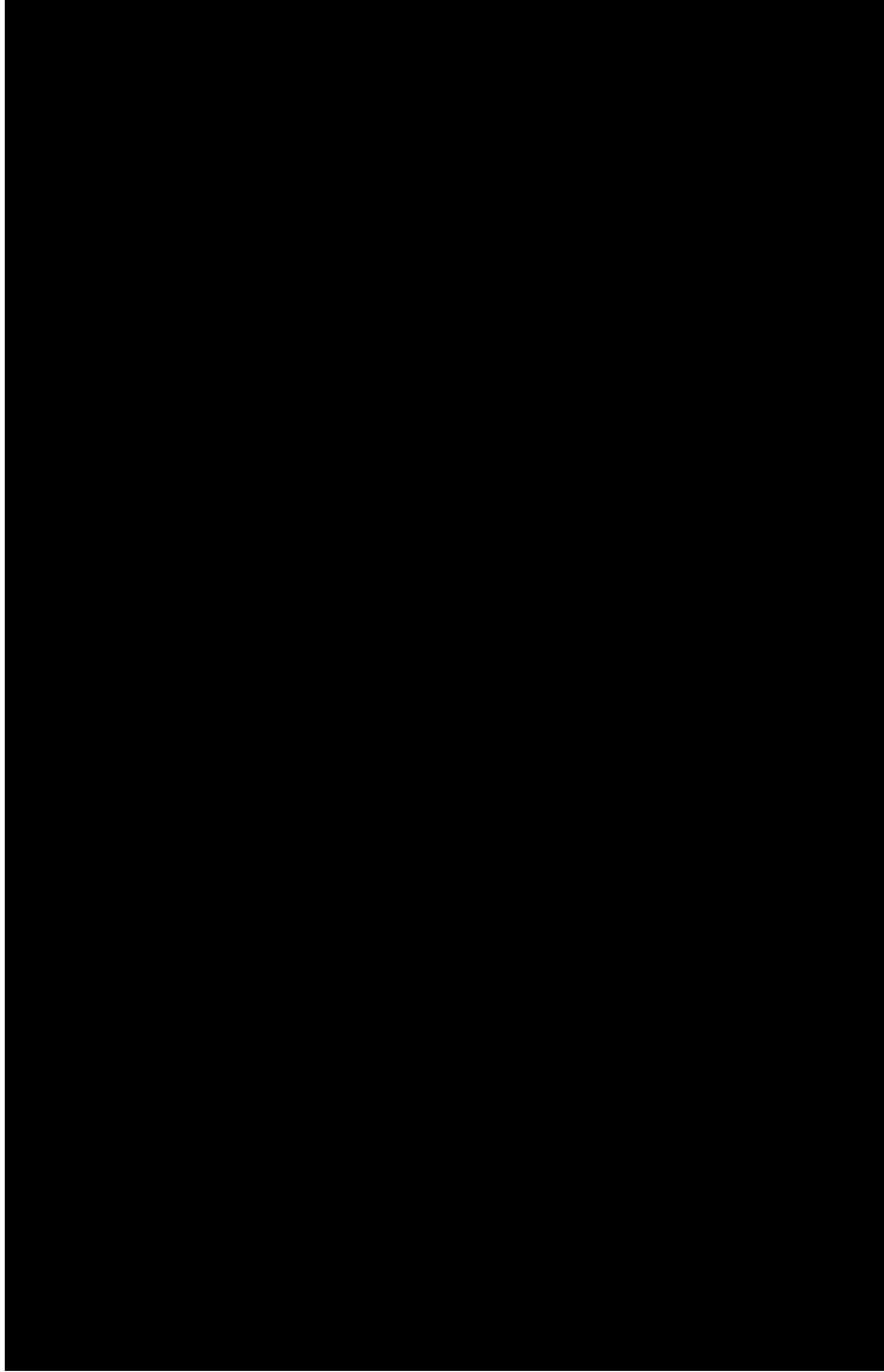
$$\Phi_m(t) = \cos(m\omega_0 t) + j \sin(m\omega_0 t)$$



Şekil 2.7 Testere dişi biçimindeki dalga

**Çözüm**

$$f(t) = \frac{A}{T}t \quad 0 < t < T \quad f(t+T) = f(t)$$



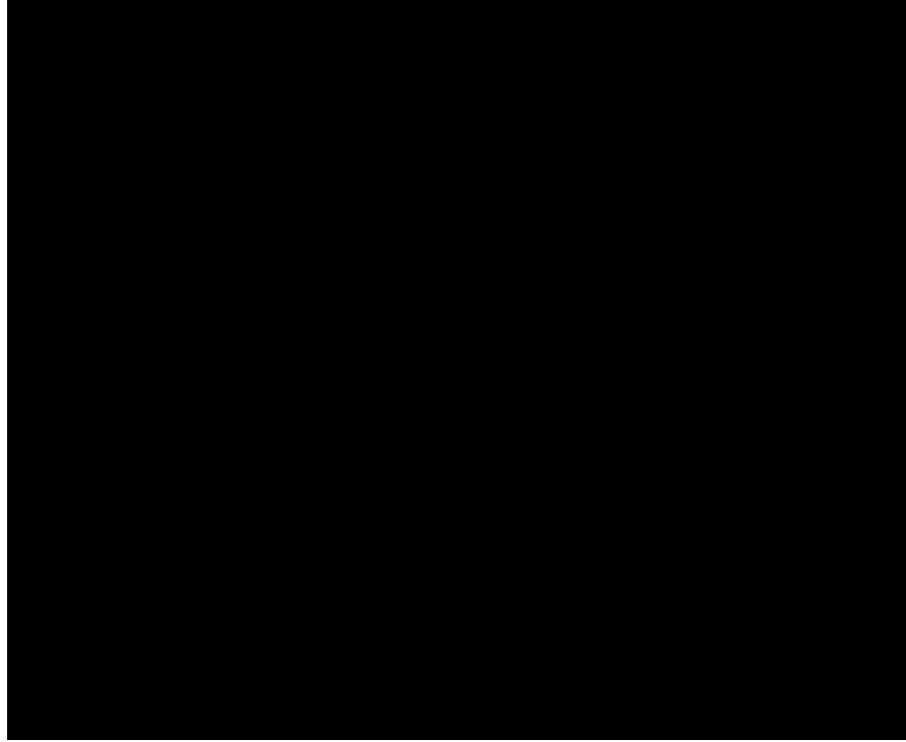
### **Örnek 2.19**

(2.10) örneğindeki sonuçları kullanarak FS nin trigonometrik şeklini yazınız.

### **Çözüm**

(2.31) bağıntıları:

$$C_0 = \frac{a_0}{2} , \quad C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} , \quad C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$



### **Örnek 2.20**

$f(t)=\sin^5(t)$  nin FS. açılımını aşağıdaki bağıntılardan yararlanarak bulunuz.

- Euler bağıntılarını kullanınız.

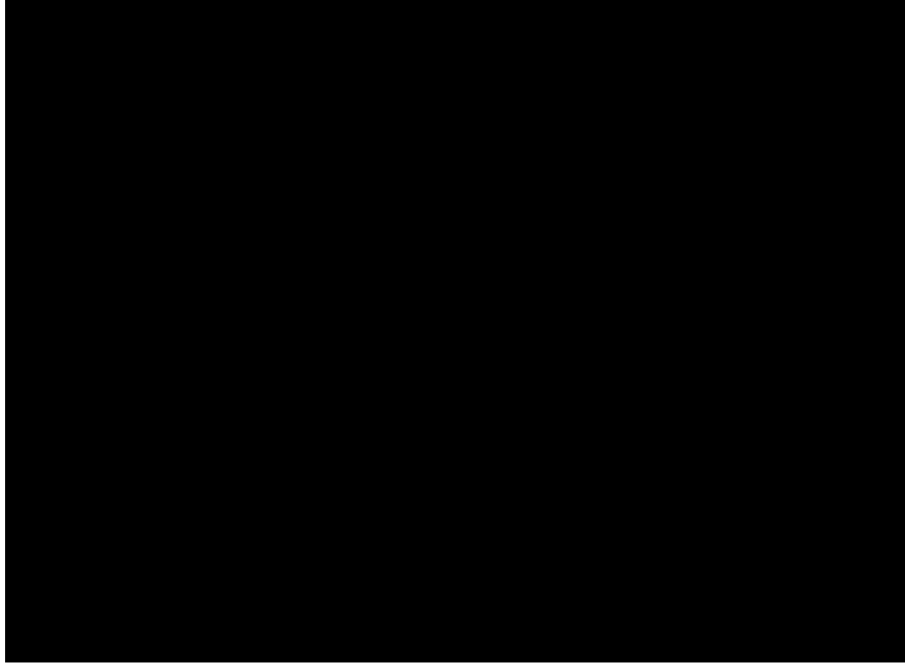
$$e^{\pm jn\alpha} = \cos(n\alpha) \pm j\sin(n\alpha)$$

$$\cos(n\alpha) = \frac{e^{jn\alpha} + e^{-jn\alpha}}{2} \quad \sin(n\alpha) = \frac{e^{jn\alpha} - e^{-jn\alpha}}{2j}$$

- İki teriminin Binom açılımı aşağıda verilmektedir.

$$(a + x)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}x^2 + \dots + x^n$$

### ***Çözüm***

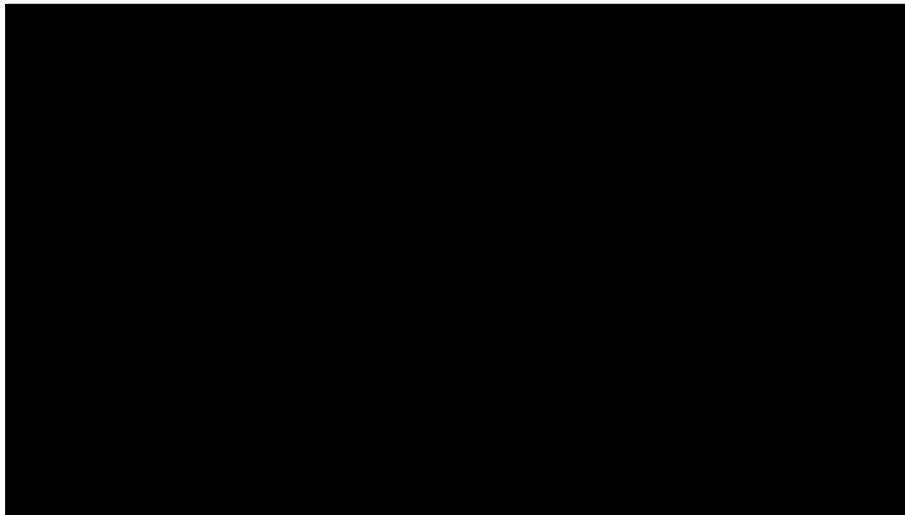


### **Örnek 2.21**

$f(t)=e^{-t}$  işlevi  $(-1,1)$  aralığında verilmektedir. Bu işlevin  $n=1.$  ve  $n=2.$  harmoniklerindeki genliklerini bulunuz.

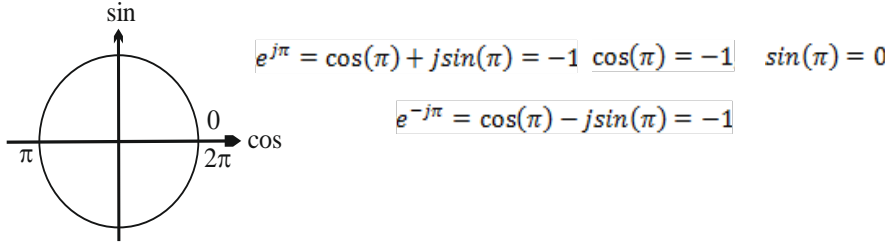
### ***Çözüm***

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$



---

**Not:**



---

$$C_{n=1} = \frac{e^{-1} - e}{2(j\pi + 1)} \quad \text{elde edilir.} \quad n=2. \text{ harmonikte,}$$

$$C_n = \frac{e \cdot e^{2j\pi} - e^{-1} \cdot e^{-2j\pi}}{2(j2\pi + 1)}$$

Euler denklemlerinden,  $e^{2j\pi}=1$ ,  $e^{-2j\pi}=1$  dir.

$$C_{n=2} = \frac{e(1) - e^{-1}(1)}{2(j2\pi + 1)}$$

$$C_{n=2} = \frac{e - e^{-1}}{2(j2\pi + 1)} \quad \text{bulunur.}$$

#### 2.4.4 Harmonik Fourier serileri

Harmonik FS.

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t) + \phi_n \quad (2.41)$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_0 t) + \phi_n \quad (2.42)$$

olarak verilir. Bu bağıntılarda;

$C_0$  : Doğru akım bileşeni;  $C_n$  : harmoniklerin genliği;  $\phi_n$  : evre açısıdır.

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \quad (2.43)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (2.44)$$

$$\phi_n = \text{tg}^{-1} \frac{b_n}{a_n} \quad (2.45)$$



#### 2.4.5 Kutupsal koordinatlarda Fourier serileri

Fourier serileri kutupsal koordinatlar kullanılarak

$$F(w) = |F(w)|e^{j\Phi(w)} \quad (2.46)$$

yazılabilir  $|F(w)|$ : genlik;  $\Phi(w)$ : evre spektrumlarıdır.

### 2.5 SONLU FOURIER SERİLERİNE YAKLAŞIM

(2.16) bağıntısının sınırları sonsuzdur. Anlamı, sonsuz sayıda harmoniklerin hesaplanması gerekliliğidir. Uygulamada ise olası değildir ve sınırlı sayıda hesaplanır. Kaldı ki birkaç harmonikten sonra, yüksek frekanslı sinüzoidallerin genlikleri çok küçülür. Bu nedenle, harmonikler sınırlandırılarak hesaplanır. Örnek 2.16 da verilen FS nin 1. harmoniğinin genliği  $4/\pi=1.2732$ , 2. nin  $4/(3\pi)=0.4244$ , 3.nün  $4/(5\pi)=0.2546$ , 4.nün  $4/(7\pi)=0.1819$  dir. Görüldüğü gibi genlikler, hızla sönümlenmiştir. Ancak, harmoniklerin sınırlı bir sayıda kesilmesi kesinlikle yanılığa yol açar. Bu yanılığın, sonsuz uzunlukta ve belirli bir harmonikte kesilmiş serilerin, enerjileri yönünden olan farklarıdır.

Sonsuz harmoniğe sahip olan işlev  $f(t)$ , sınırlı harmoniğe sahip olan  $S_k(t)$  olarak gösterilirse, sınırlı FS,

$$S_k(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (2.47)$$

yazılır.

İki serinin enerjileri arasındaki fark,

$$E_k(t) = |f(t) - S_k(t)| \quad \text{veya} \quad E_k^2(t) = [f(t) - S_k(t)]^2 \quad (2.48)$$

yaklaşımın yanılığıdır. Son denklemden, “k”, harmonik sayıcısıdır. “ $k \rightarrow \infty$ ” için yukarıdaki farklar sıfıra giderse,

$$E_k(t) = 0 \Rightarrow E_k^2(t) = 0 \Rightarrow f(t) - S_k(t) = 0 \Rightarrow f(t) = S_k(t)$$

$S_k(t)$  dizisi de  $f(t)$  dizisine yaklaşır. Burada:

$E_k(t)$  :  $f(t)$  ve  $S_k(t)$  işlevleri arasındaki farktır.

$E_k^2(t)$  : iki işlevin enerjileri arasındaki yanılığdır.

Eğer “t”, “-T/2, T/2” aralığında değişiyorsa, yanılı, (2.45) denkleminin “-T/2, T/2” aralığında tümlevi alınarak elde edilir.

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [E_k(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - S_k(t)]^2 dt \quad (2.49)$$

“-T/2, T/2” aralığında, yaklaştırmadan dolayı doğan yanılı,

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{a_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt < \infty$$

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{a_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (2.50)$$

olarak elde edilir. Son denklemin “Parseval Kuramı” olarak bilinir. Bu konuya bölüm 5’ de ayrıntılı olarak değinilecektir.

## 2.6 DIRICHLET KOŞULLARI

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) serilerin yakınsaklıkları konusunda, özellikle, herhangi bir işlevin, trigonometrik seriler ile gösterilebilmesi için gerekli koşulları ortaya koymuştur. Bu koşullar, FS. lerine açılımın gerçekleşmesi ve açılımın yakınsaklığı ile ilişkili olarak “zayıf” ve “kuvvetli” Dirichlet koşullarıdır.

- Zayıf Dirichlet koşulu: belirli bir aralıkta, işlevin mutlak tümlevinin sonlu olması gereklidir (2.51.a bağıntısı). Bu koşul, FS’ ne açılımının gerçekleşmesini garantiler (-T/2, T/2 aralığında enerjinin sonlu olması). Ancak yakınsama konusunda, herhangi bir yaklaşım sağlamaz. Yakınsama için kuvvetli koşulun gerçekleşmesi gerekir.

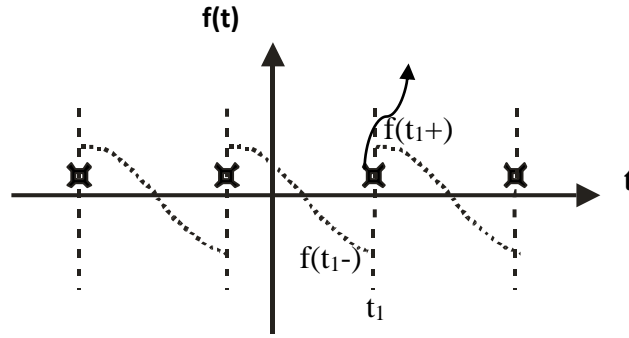
$$E = \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (2.51.a)$$

- Kuvvetli Dirichlet koşulu: bir f(t) işlevi, bir dönem içinde, sınırlı sayıda minimum, maksimum ve süreksizlik (şekil 2.8) noktalarına sahipse (parçalı sürekli işlevler, bu işlevlerin

sağdan ve soldan limitleri farklıdır) kuvvetli koşul geçerlilik kazanmıştır.

Bir işlevin, FS açılabilmesi veya FD alınabilmesi için bu iki koşulu birlikte gerçeklemelidir.

$$\frac{1}{2}[f(t_1^-) + f(t_1^+)] \quad (2.51.b)$$



Şekil 2.8 Parçalı, sürekli işlev

## 2.7 İŞLEV TÜRLERİ VE FS. İLE İLİŞKİLERİ

### 2.7.1 Tek (odd functions) ve çift işlevler (even functions)

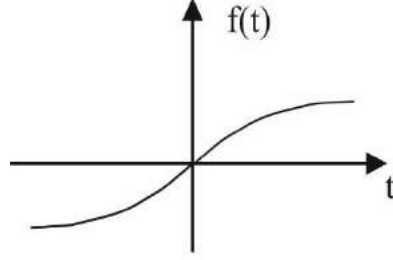
**Tek işlevler:**  $f(-t)=-f(t)$  koşulunu sağlayan işlevlerdir. Bunlar orijine göre bakışıktır. Özeğe göre bakışık olmak; işlevin önce düşey ekseninde, daha sonra da yatay ekseninde katlanması anlamındadır (şekil 2.9). Çift kısım olmadığı için, “FS” bağıntısında,

$$f(t) = \frac{1}{2} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)] \quad (2.52)$$

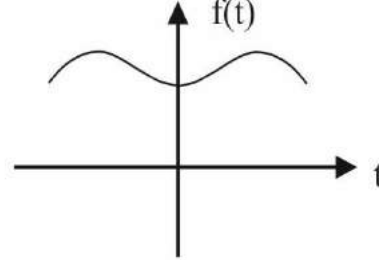
“cos” içeren terimler yoktur. Bu nedenle, “cos” içeren terimler sıfır olur. Dolayısıyla “a” katsayıları yoktur. Yani, “ $a_0=0$ ”, “ $a_n=0$ ” dır. FS. de yalnızca “sin” içeren terimler kalır. Elde edilen bu denklem sinüs açılımıdır.

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \sin(nw_0 t)] \quad (2.53)$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(nw_0 t) dt \quad (2.54)$$



Şekil 2.9 tek işlev



Şekil 2.10 çift işlev

Çift işlevler:  $f(-t)=f(t)$  koşulunu sağlayan işlevlerdir. Bunlar düşey eksene göre bakışıktır (şekil 2.10). Tek kısım olmadığı için, (2.16) bağıntısında, “sin” içeren kısım yoktur. Bu nedenle, “sin” terimleri sıfır olur. Dolayısıyla “ $b_n=0$ ” dır. FS de yalnızca “cos” içeren terimler kalır. Bulunan eşitlik kosinüs açılımıdır.

$$f(t) = \frac{1}{2} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t)] \quad (2.55)$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(nw_0 t) dt$$

Kısaca, tek bir işlevin FS açılımı da tektir ve yalnızca “sin” lü terimlerden oluşur. Çift olan bir işlev için de, benzer sonuca varılır. Ancak genelde, karşılaşılan işlevler bu kadar basit değildir, hem tek hem de çift işlevlerin toplamından oluşurlar.

---

**Not**

Çift işlevlerde  $\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 2 \int_0^{T/2} f(t) dt$

Tek işlevlerde  $\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0$

---

Tek ve çift işlevlerin çarpımı için, tek ve çift işlevlerin özellikleri kullanılarak,

- (çift işlev) X (çift işlev) = çift işlev
- (çift işlev) X (tek işlev) = tek işlev
- (tek işlev) X (tek işlev) = çift işlev

yazılabilir. Ancak, bir tek ve bir çift işlevin toplamı, tek veya çift değildir.

### 2.7.2 Tek ve çift işlevlerin toplamından oluşan (karışık) işlevler

Herhangi bir işlev tek ve çift işlevlerinin toplamından oluşuyorsa,

$$f(t) = f_c(t) + f_t(t) \quad (2.56)$$

yazılır. (2.56) bağıntısında  $t \rightarrow -t$  konularak, taraf tarafa, toplanıp çıkartılırsa:

$$\begin{aligned} f(t) &= f_c(t) + f_t(t) \\ \underline{f(-t)} &= \underline{f_c(-t) + f_t(-t)} \\ f_c(t) &= \frac{1}{2} \{ f(t) + f(-t) \} \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$f_t(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)] \quad (2.58)$$

elde edilir. [“ $f_c(t)$ ”, “ $f(t)$ ” işlevinin çift; “ $f_t(t)$ ”, “ $f(t)$ ” işlevinin tek bileşenidir]. (2.58) bağıntıları, basit, karışık işlevlerin, bileşenlerinin bulunmasında kullanılır.

---

**Not:** Tek ve çift işlevlerde  $f_c(-t) = f_c(t)$  ve  $f_t(-t) = -f_t(t)$  dir.

---

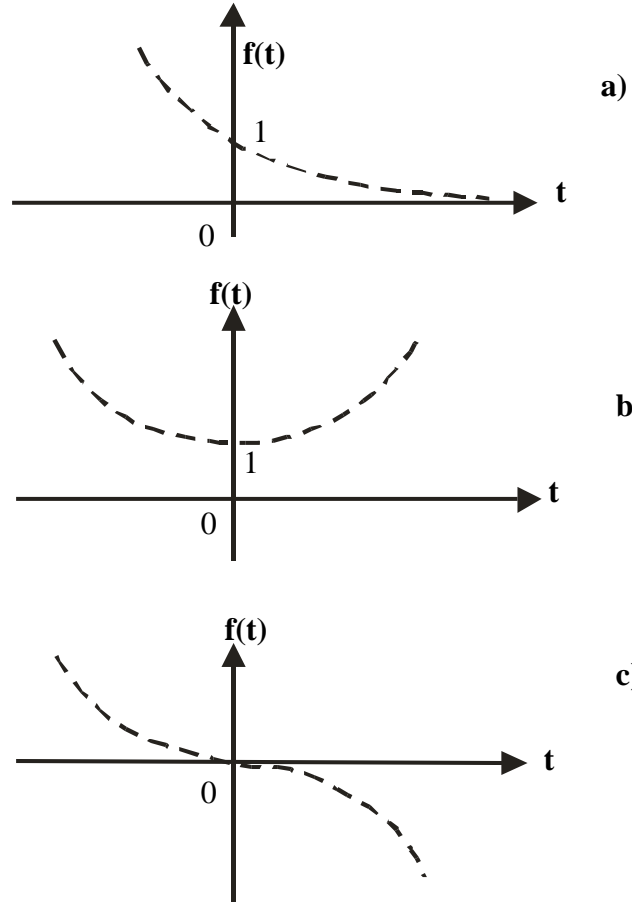
### **Örnek 2.22**

$-\infty < t < \infty$  aralığında tanımlı  $f(t) = e^{-t}$  işlevi verilmektedir (şekil 2.11). Tek ve çift bileşenlerini bulunuz.

**Çözüm**

$$f_c(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} = \frac{e^{-t} + e^t}{2}$$

$$f_t(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} = \frac{e^{-t} - e^t}{2}$$



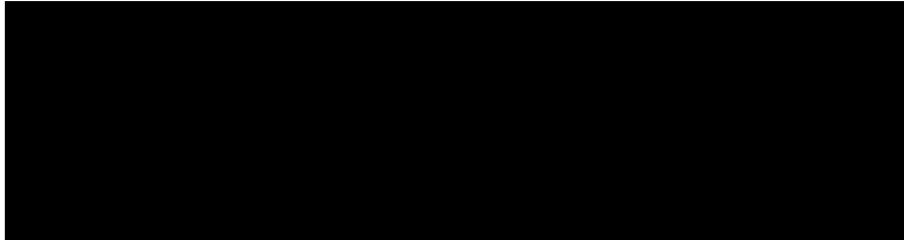
**Şekil 2.11** a)  $e^{-t}$  üstel işlev, b) çift bileşeni c) tek bileşeni

**Örnek 2.23**

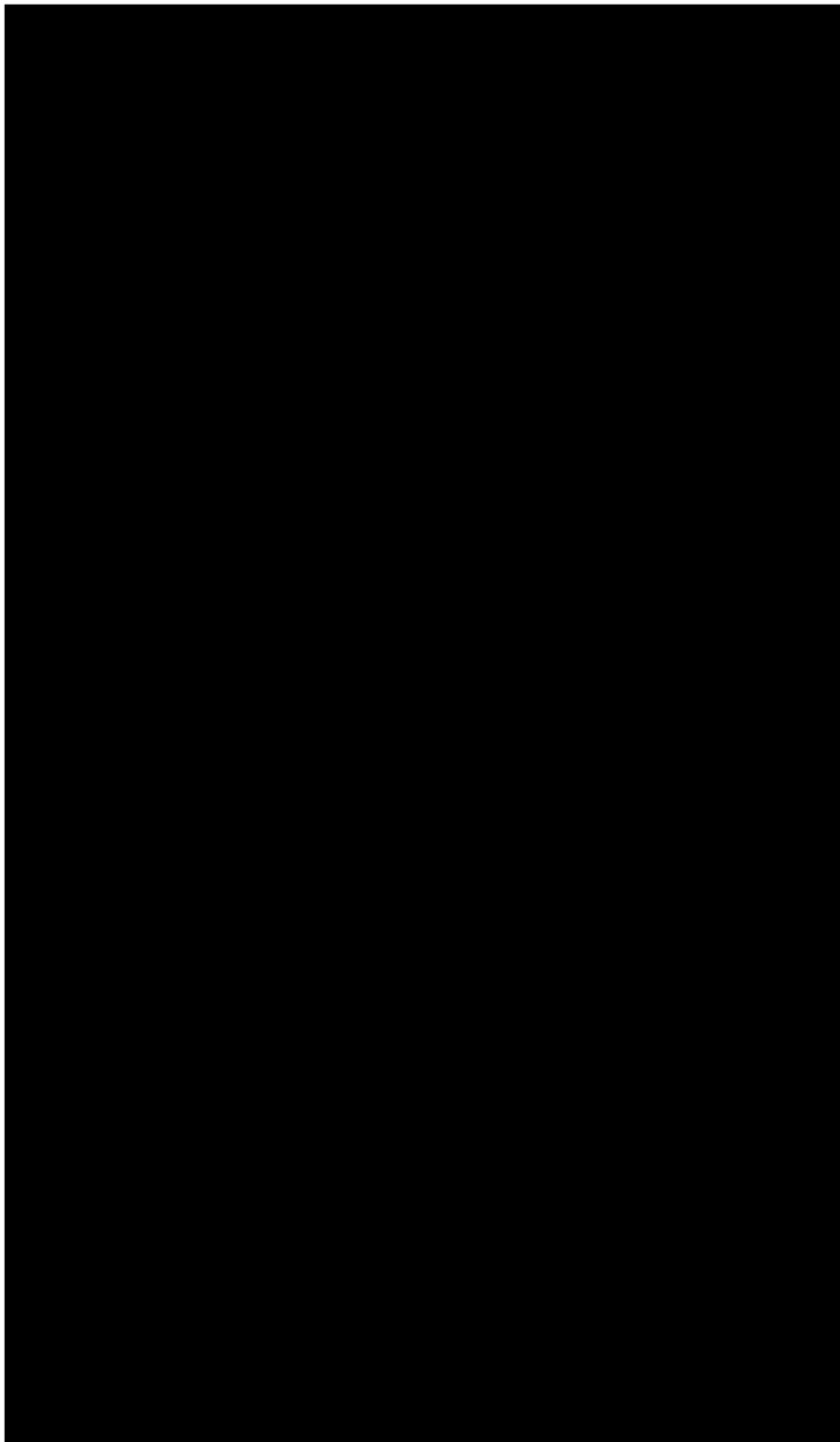
Aşağıda tanım aralığı verilen işlevi (şekil 2.12) tek ve çift bileşenlerine ayırınız.

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

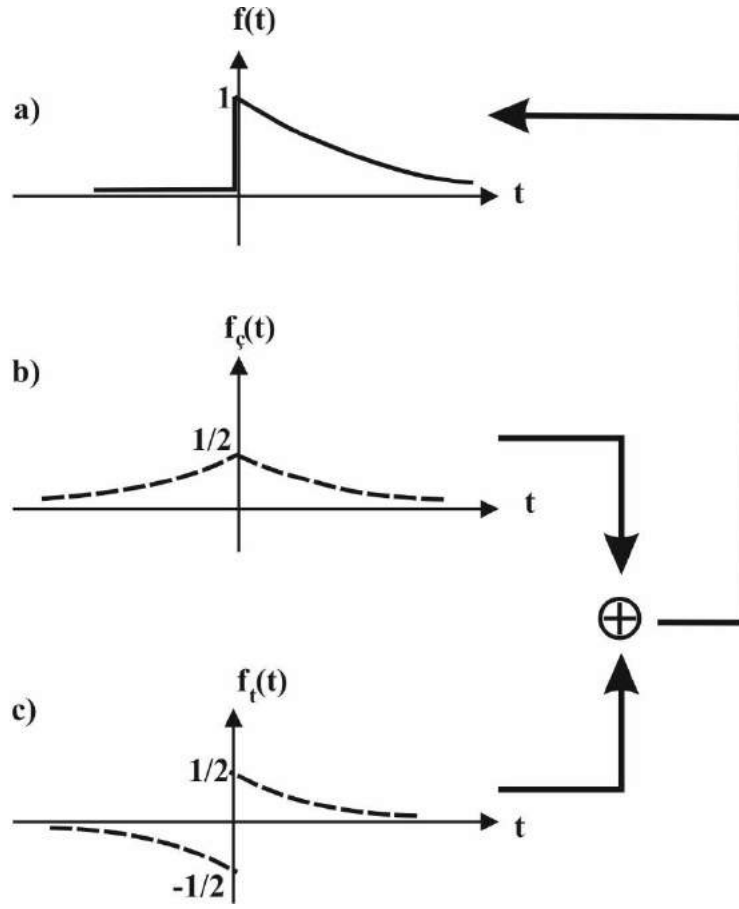
**Çözüm**











**Şekil 2.12 a)** "+" ekseninde tanımlı  $f(t)=e^{-t}$  üstel işlevi, **b)**  $f(t)$ ' nin çift bileşeni **c)**  $f(t)$ ' nin tek bileşeni

Problemde verilen işlev karışık olmasına karşın basittir ve kolaylıkla tek ve çift bileşenlerine ayrılmaktadır. Ancak, işlevin daha karışık olması durumunda, bu yol kullanılamaz. Bunun yerine FS leri veya FD kullanılarak tek ve çift bileşenlerine ayrılabilir (FS leri veya FD kullanılmasına ait tartışma bölüm 3.3 ve 3.5 te yapılacaktır).

## 2.8 YARIM DALGA BAKIŞIMI

Dönemli bir işlev  $f(t)=f(t+T)$  koşulunu sağlar. Eğer;

$$-f\left(t + \frac{T}{2}\right) = f(t) \quad (2.59)$$

bağıntısı geçerli ise, “T” dönemli işlev tek yarım dalga bakışımına sahiptir. Şekil 2.13 de yarım dalga bakışımına sahip iki işlev verilmiştir. Yarım dalga bakışımının olabilmesi için;

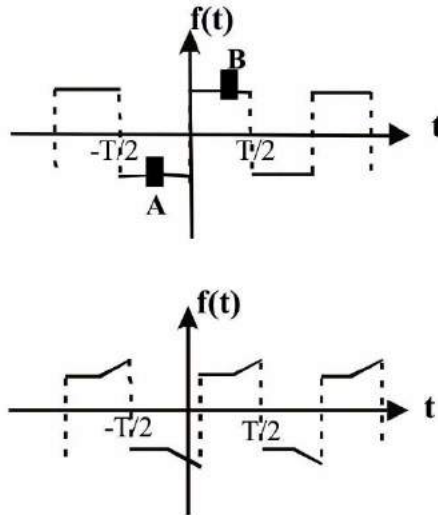
- aritmetik ortalaması sıfır olmalıdır.
- “-1” ile çarpıldığında, elde edilen işlevin bakışık olması gerekir.

Kare dalga için (şekil 2.13), yarım dalga bakışımı aşağıda açıklanmıştır.

- Dalganın dönemi “T” dir.
- Aritmetik ortalaması sıfırdır.

Yarım dalga bakışımı,

- işlev, zaman ortamında gerekli kaydırmaları yaparak orijinde başlangıca getirilir. Kare dalga, orijinde başlamaktadır ancak altında verilen işlev “-“ yönde kaydırılmalıdır.
- Orijinden, hem “-“, hem de “+” yönde, eşit bir uzaklık alınarak iki nokta saptanır (A ve B noktaları). İşlev “-1” ile çarpılırsa, “A” noktası “B” ile aynı doğrultuya gelir. Düşey eksene göre bakışımı alınır “B” noktası ile çakışır. Başka bir deyişle, her iki nokta orijine göre bakışıktır (yarım dalga tek bakışımı).



Şekil 2.13 Yarım dalga bakışımlı işlevler

İşlev, (2.59) denklemine benzer olarak

$$f\left(t + \frac{T}{2}\right) = f(t) \quad (2.60)$$

koşulunu da sağlayabilir. (2.60) denklemi, yarım dalga çift bakışımıdır.

Bakışık bir sinyal;

- yarım dalga tek bakışımına sahip ise FS açılımında “a<sub>0</sub>” ve “a<sub>n</sub>” katsayıları sıfırdır. “b<sub>n</sub>” katsayıları vardır. Bu katsayılardan “n” in çift değerleri de sıfırdır. Yalnızca “n” in tek değerleri (n=1., 3., 5., 7,.....) için “b<sub>n</sub>” harmonikleri hesaplanır.
- Yarım dalga çift bakışımına sahip ise b<sub>n</sub>=0 dır. “a<sub>0</sub>” ve “a<sub>n</sub>” in bulunması yeterlidir. Bu katsayılardan, “n” in tek değerleri de sıfırdır. Yalnızca “n” in çift değerleri için “b<sub>n</sub>” harmonikleri bulunur.

## 2.9 BAKIŞIK İŞLEVLERİN FOURIER KATSAYILARI

“T” dönemi ile yinelenen bir f(t) işlevi, çift ise Fourier katsayıları yalnızca kosinüslü terimleri içerir. Sinüs içeren terimler sıfır olur.

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)] \quad (2.61)$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(nw_0 t) dt \quad n = 0,1,2, \dots \quad (2.62)$$

“T” dönemli bir f(t) işlevi, tek ise Fourier katsayılarında sinüslü terimler vardır. Kosinüs içeren terimler sıfır olur (w<sub>0</sub>: temel frekans).

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jw t} dt \quad (2.63)$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(nw_0 t) dt \quad (2.64)$$

## 2.10 (2L) DÖNEMLİ İŞLEVLERİN FOURIER SERİSİ

(-L,L) aralığında tanımlanmış (2L) dönemli bir işlev, kosinüs ve sinüs terimleri içeren bir seriye açılabilir. (0,L) aralığında tanımlanmış (L) dönemli bir işlev ise yalnız kosinüs veya yalnız sinüs serisine açılır.

$$t = \frac{L\tau}{\pi} \rightarrow \tau = \frac{\pi t}{L}, \quad d\tau = \frac{\pi}{L} dt \quad (2.65)$$

dönüşümleri yapılırsa

$$f(t) = f\left[\frac{L\tau}{\pi}\right] = \gamma(\tau) \quad (2.66)$$

elde edilir. “ $\tau$ ” değişkeninin “ $\gamma(\tau)$ ” işlevi  $(-\pi, \pi)$  aralığında tanımlanmış “ $2\pi$ ” dönemli bir işlevdir. “ $\gamma(\tau)$ ” nin FS ve katsayıları:

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\tau) + b_n \sin(n\tau)] \quad (2.67)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(\tau) d\tau \quad (2.68)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(\tau) \cos(n\tau) d\tau \quad (2.69)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(\tau) \sin(n\tau) d\tau \quad (2.70)$$

dır. Son bağıntılarda

$\tau = \pi t/L$ ,  $d\tau = (\pi/L)dt$  dönüşümleri yapılarak (2.68), (2.69) ve (2.70) bağıntılarında yerine yazılır (bu bağıntılardaki tümlevin sınırları da  $-\pi \rightarrow \pi$ ,  $\pi \rightarrow \pi$  olacak şekilde değiştirilir).

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L \underbrace{\phi\left(\frac{\pi t}{L}\right)}_{f(t)} \frac{\pi}{L} dt$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt \quad (2.71)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L \underbrace{\phi\left(\frac{\pi t}{L}\right)}_{f(t)} \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \frac{\pi}{L} dt$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad (2.72)$$

ve benzer şekilde,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad (2.73)$$

elde edilir. Böylece  $(-L,L)$  aralığında Dirichlet koşullarını sağlayan  $f(t)$  işlevi için FS:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \quad (2.74)$$

veya kısaca:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L} + \phi_n\right) \quad (2.75)$$

olarak yazılır.  $\pi/L = \omega_0$  konursa:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (2.76)$$

elde edilir. (2.75-2.76) bağıntısında:

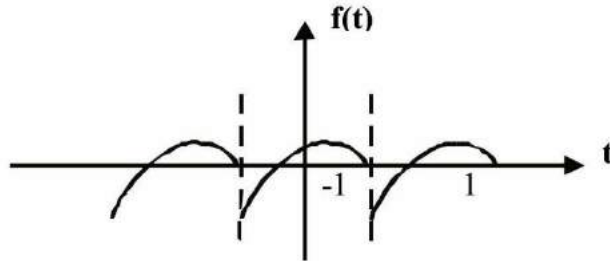
$$C_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \quad \phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

dir. (2.76) eşitliğinde:

- $C_n \cos(n\omega_0 t + \phi)$  : Fourier serisinin genel terimi.  
 $\omega_0$  : Temel frekans (sinyal içindeki en küçük frekans).  
 $C_n$  : Harmoniğin genliğidir ve hiç bir zaman olamaz bu nedenle  $|C_n|$  olarak gösterilir.  
 $\phi_n$  : Evre açısıdır.

### **Örnek 2.24**

$(-1,1)$  aralığında tanımlı  $f(t)=t-t^2$  işlevinin dönemini bulun (Şekil 2.14), işlevin Fourier katsayılarını hesaplayınız.



**Şekil 2.14**  $f(t)=t-t^2$  işlevi





## 2.11 FOURIER SERİSİNİN TÜREVİ

$$f(t) = \frac{1}{2} + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)] \quad (2.77)$$

(2.77) denklemini ile verilen FS nin türevi aşağıdaki gibi bulunur. “f(t)”, parçalı sürekli ve türetilbilir bir işlev olduğundan f'(t) nin FS;

$$f'(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(nw_0 t) + \beta_n \sin(nw_0 t)]$$

(2.78)

şeklinde olacaktır. “sin” ve “cos” türevleri yine benzerlidir. Trigonometrik ifadelerin başlarına gelecek katsayılar değişir. Bu nedenle, “α<sub>0</sub>”, “α<sub>n</sub>” ve “β<sub>n</sub>” katsayıları hesaplanıp (2.78) de yerine konursa “f(t)” işlevi “a<sub>0</sub>”, “a<sub>n</sub>” ve “b<sub>n</sub>” cinsinden bulunur.

$$\alpha_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f'(t) dt = \frac{2}{T} f(t) \Big|_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{2}{T} [f(T/2) - f(-T/2)] = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f'(t) \cos(nw_0 t) dt \quad \text{dir. Son eşitlikte,}$$

$$\begin{aligned} \cos(nw_0 t) = u & \quad , \quad dv = f'(t) \\ -nw_0 \sin(nw_0 t) dt = du & \quad , \quad v = f(t) \end{aligned}$$

dönüşümleri yapılarak kısmi tümlevi alınırsa;

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f'(t) \cos(nw_0 t) dt = \left[ \frac{2}{T} f(t) \cos(nw_0 t) \Big|_{-T/2}^{T/2} + \right. \\ \left. nw_0 \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(nw_0 t) dt \right]$$

$$\alpha_n = \left[ f(T/2) \underbrace{\cos(n\pi)}_1 - f(-T/2) \underbrace{\cos(-n\pi)}_1 + nw_0 \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(nw_0 t) dt \right]$$

elde edilir. Ayrıca

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f'(t) \sin(nw_0 t) dt$$



olduğu bilinmektedir.

$$\frac{T}{2} b_n = \int_{-T/2}^{T/2} f'(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

0 (hipotez)

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \left\{ \left[ f\left(\frac{T}{2}\right) - f\left(-\frac{T}{2}\right) \right] + n\omega_0 \frac{T}{2} b_n \right\} = \frac{2}{T} n\omega_0 \frac{T}{2} b_n = n\omega_0 b_n = \frac{2}{T} n\omega_0 \frac{T}{2} b_n$$

$$\boxed{\alpha_n = n\omega_0 b_n}$$

$$\beta_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Tümlevi de aynı yol ile alınırsa

$$\boxed{\beta_n = -n\omega_0 a_n}$$

elde edilir. FS nin türevi "f'(t)",

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-n\omega_0 a_n \sin(n\omega_0 t) + n\omega_0 b_n \cos(n\omega_0 t)] \quad (2.79)$$

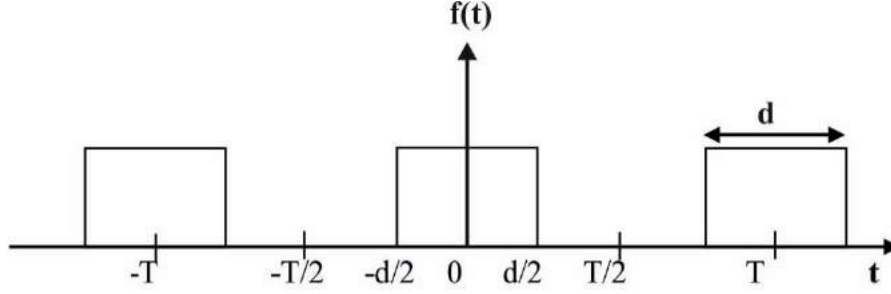
bulunur. (2.79) bağıntısından anlaşılacağı gibi FS nin türevi; serinin Fourier katsayılarının  $\pm n\omega_0$  ile çarpılmasından hesaplanır. "n" in artan değerine karşılık "a<sub>n</sub>" ve "b<sub>n</sub>" yeterince küçük olmaz ise başlangıçtaki seri yakınsak olmasına karşın elde edilen seri ıraksak olur.

## 2.12 DİKDÖRTGEN DALGA KATARININ FREKANS SPEKTRUMU

(2.34) bağıntısındaki "C<sub>n</sub>" genlikleri "w" açısal (veya "f" çizgisel) frekansına göre çeşitli "n" değerleri için çizilirse dönemli "f(t)" işlevinin genlik spektrumu elde edilir. Eğer "C<sub>n</sub>" değerleri "w" açısal frekansına göre değil de "φ<sub>n</sub>" evre açısına göre çizilirse "f(t)" işlevinin evre spektrumu elde edilir. "n" indisleri tam sayısal değerler alacağından genlik ve evre spektrumları "nw<sub>0</sub>" ayırık değerlerinde (binlerde) görülür. Bu nedenle elde edilen spektruma ayırık frekans spektrumu veya çizgisel spektrum ismi verilir.

### Örnek 2.26

Tanım aralığı verilen işlevin genliği “A”, genişliği “d” olan dönemli dikdörtgen dalga katarının (şekil 2.16) frekans spektrumunu bulunuz.



Şekil 2.16 Dikdörtgen dalga katarı

### Çözüm

$$f(t) = \begin{cases} A & -d/2 < t < d/2 \\ 0 & -T/2 < t < -d/2 \text{ ve } d/2 < t < T/2 \end{cases}$$

(2.34) den,

$$C_n = \frac{A}{T} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T} \frac{-1}{jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-d/2}^{d/2}$$

$$C_n = \frac{A}{T} \frac{1}{jn\omega_0} \left( e^{jn\omega_0 \frac{d}{2}} - e^{-jn\omega_0 \frac{d}{2}} \right)$$

Euler bağıntılarından  $2j \sin(\alpha) = e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}$  dır. Buradan,

$$C_n = \frac{A}{T} \frac{1}{jn\omega_0} 2j \sin \left( jn\omega_0 \frac{d}{2} \right) = \frac{A}{T} \frac{2 \sin \left( n\omega_0 d / 2 \right)}{n\omega_0}$$

bulunur. Sağ taraf  $(n\omega_0 d)/2 / (n\omega_0 d)/2$  ile çarpılıp,

$$C_n = \frac{A}{T} \frac{2 \sin \left( \frac{n\omega_0 d}{2} \right)}{n\omega_0} \cdot \frac{n\omega_0 d}{2} = \frac{A}{T} \frac{2 \sin \left( \frac{n\omega_0 d}{2} \right)}{\frac{n\omega_0 d}{2}} \cdot \frac{n\omega_0 d}{2}$$

$$C_n = \frac{A}{T} \frac{\sin \left( \frac{n\omega_0 d}{2} \right)}{\frac{n\omega_0 d}{2}} \cdot d$$

$w_n = nw_0$  konularak

$$C_n = \frac{Ad}{T} \frac{\sin\left(\frac{w_n d}{2}\right)}{\frac{w_n d}{2}} \quad (2.80)$$

elde edilir. (2.80) de  $w_0 = 2\pi/T$  yazılırsa,

$$C_n = \frac{Ad}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\frac{n\pi d}{T}} \quad (2.81)$$

ulaşılır. (2.80) ve (2.81) eşitliklerinin sağ tarafları "sinc" işlevi olarak bilinir. "sinc" işlevi kullanılarak,

$$C_n = \frac{Ad}{T} \text{sinc}\left(\frac{nw_0 d}{2}\right) \quad (2.82)$$

yazılır. (2.82) den yararlanılarak "f(t)" izinin karmaşık FS açılımı;

$$f(t) = \frac{Ad}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{nw_0 d}{2}\right) e^{jn w_0 t} \quad (2.83)$$

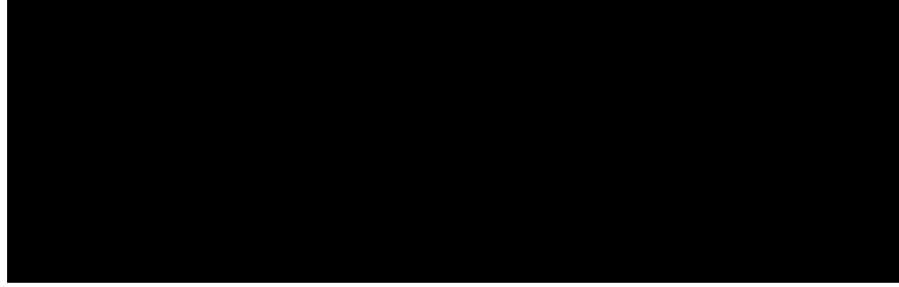
olarak elde edilir. Son dört bağıntıda evre spektrumu yoktur (verilen dikdörtgen katarı çift olduğundan) ve " $C_n$ " gerçeldir. " $nw_0$ " bağımsız değişkenine göre " $C_n$ " çizildiğinde ayırık frekans spektrumu elde edilir. Söz konusu problemde ayırık frekans spektrumunu elde etmek için "A", "d" ve "T" ye değerler vermek gerekir. Örneğin;  $A=5$  birim,  $d=1/20$ ,  $T=1/4$  için hesaplamalar, aşağıda verilmiştir.

$$w_n = nw_0 = n \frac{2\pi}{T} = n \frac{2\pi}{1/4} = n 8\pi, \quad \frac{n\pi d}{T} = n\pi \frac{1/20}{1/4} = \frac{n\pi}{5}, \quad \frac{Ad}{T} = \frac{5}{5} = 1$$

olarak bulunur. " $C_n$ " in bulunmasında

$$C_n = \frac{\sin\left(\frac{nw_0 d}{2}\right)}{\frac{nw_0 d}{2}} = \frac{\sin\left(n \frac{\pi}{5}\right)}{n \frac{\pi}{5}} = \frac{5 \sin\left(n \frac{\pi}{5}\right)}{n\pi} \quad (2.84)$$

denklemden yararlanılır. Böylece her bir " $w_n$ " binindeki " $C_n$ " değerleri elde edilir. (2.84) denkleminin hesaplanmasında aşağıdaki adımlar izlenir.



n	0	±1	±2	±3	±4	±5
w <sub>n</sub>	0	±8π	±16π	±24π	±32π	±40π
C <sub>n</sub>	1	.937	.957	.505	0.234	0

Çizelge 2.1 "C<sub>n</sub>" in hesaplanması

Çizelge 2.1 in görünümü Şekil 2.17 de verilmektedir.

Dikdörtgen dalga düşey eksene göre bakışlı olduğundan evre spektrumu ve bu nedenle "b<sub>n</sub>" içeren terimler yoktur.

Bu problemde evrenin olmadığı aşağıdaki gibi de kanıtlanabilir.

Karmaşık FS olan (2.32) bağıntısı,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

dır. Bu denklemde,  $C_n = |C_n| e^{j\phi_n}$  yerine konulursa,

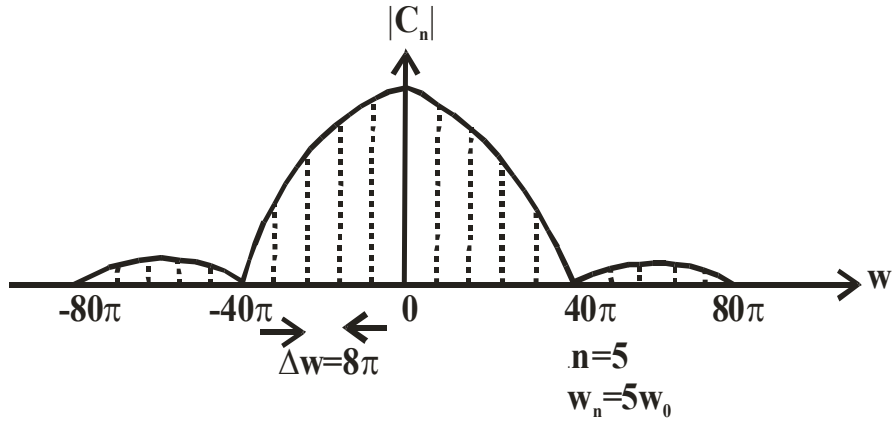
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| e^{j(n\omega_0 t + \phi_n)} \quad (2.85)$$

evreyi de içeren karmaşık FS denklemi elde edilir. (2.85) genel denklemi, bu problemdeki FS açılımı olan (2.83) ile özdeşleştirilirse

$$|C_n| = \sin c \left( \frac{n\omega_0 d}{2} \right), \quad e^{j(n\omega_0 t + \phi_n)} \equiv e^{jn\omega_0 t}, \quad e^{j\phi_n} = 1$$

elde edilir. Euler denklemlerinden,  $\cos(\phi_n) + j\sin(\phi_n) = 1$

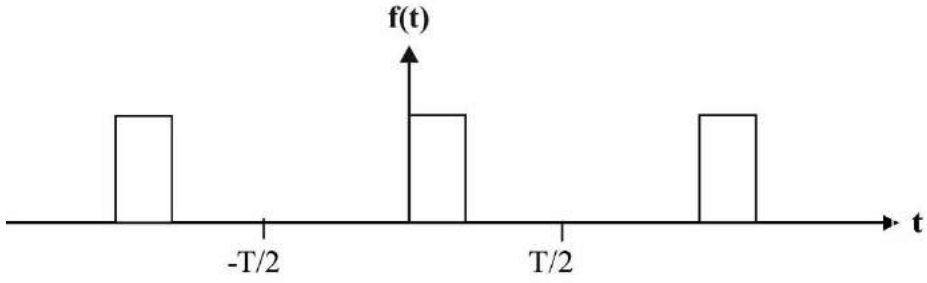
olmalıdır. Bu koşulun sağlanması için  $\phi_n = -2n\pi, 0, 2n\pi$  olmak zorundadır. Başka bir deyişle evre,  $0^\circ$  veya  $360^\circ$  nin tam katlarıdır.



Şekil 2.17 Dikdörtgen dalga katarının spektrumu

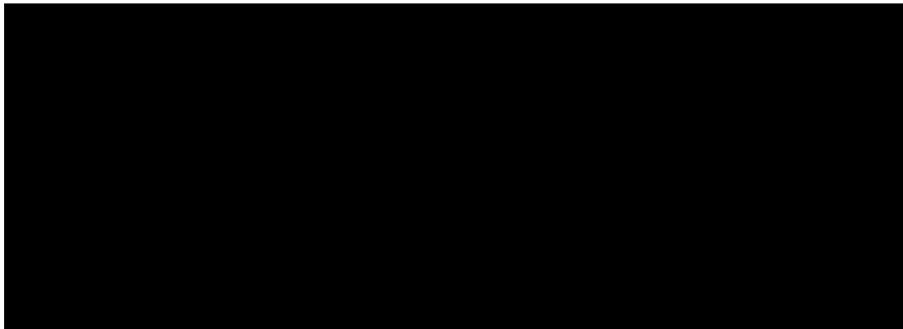
**Örnek 2.27**

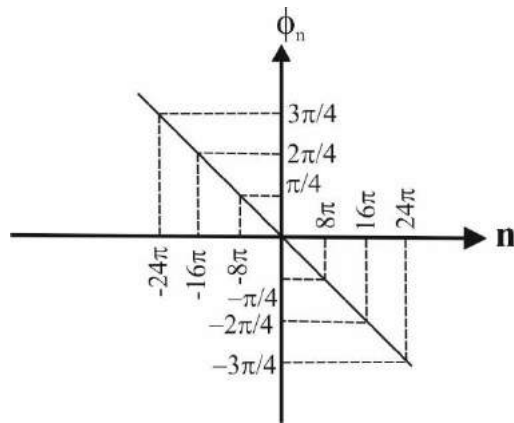
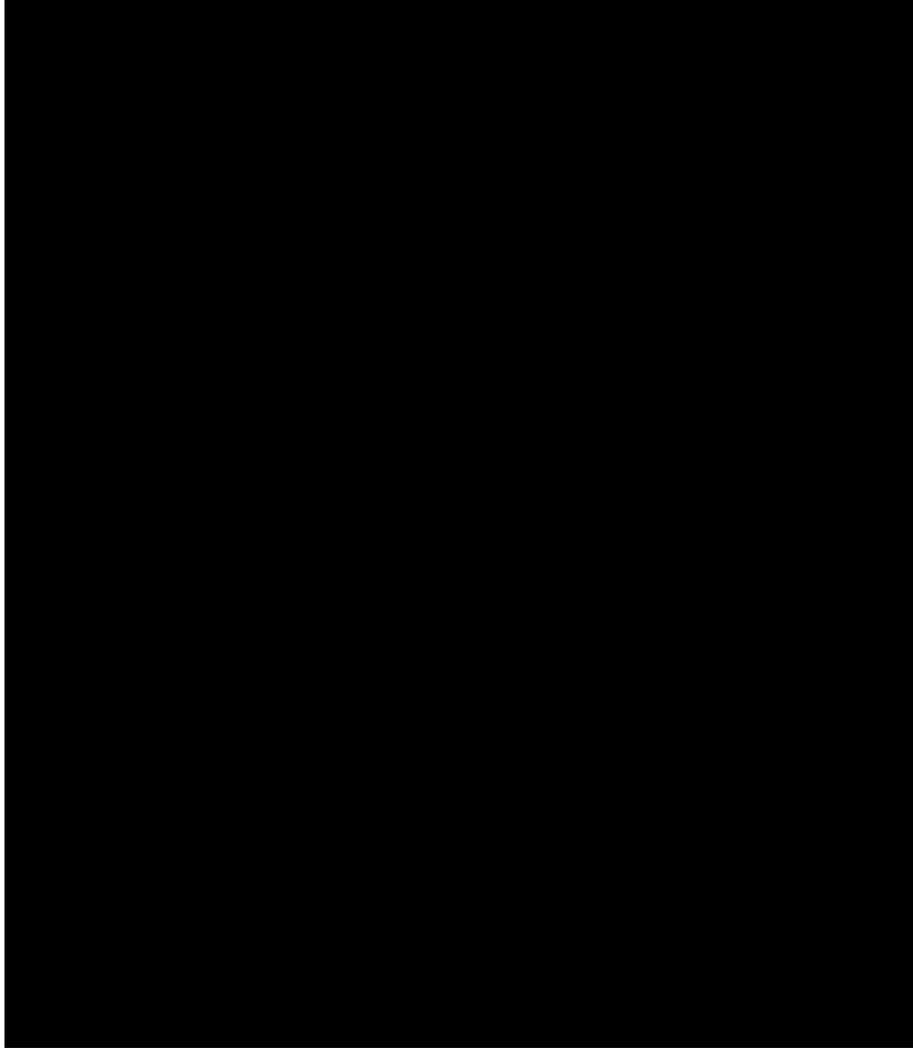
Şekil 2.18 de verilen "d" kadar kaydırılmış dikdörtgen dalganın spektrumunu bulunuz.



Şekil 2.18 "d" kadar ötelenmiş dikdörtgen dalganın spektrumu

**Çözüm**

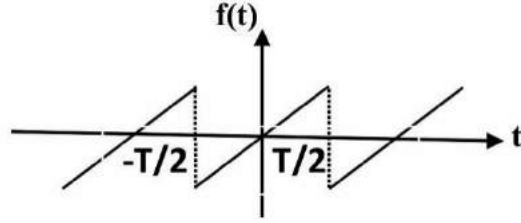




Şekil 2.19 “d” kadar ötelenmiş dikdörtgen dalga katarının evre spektrumu

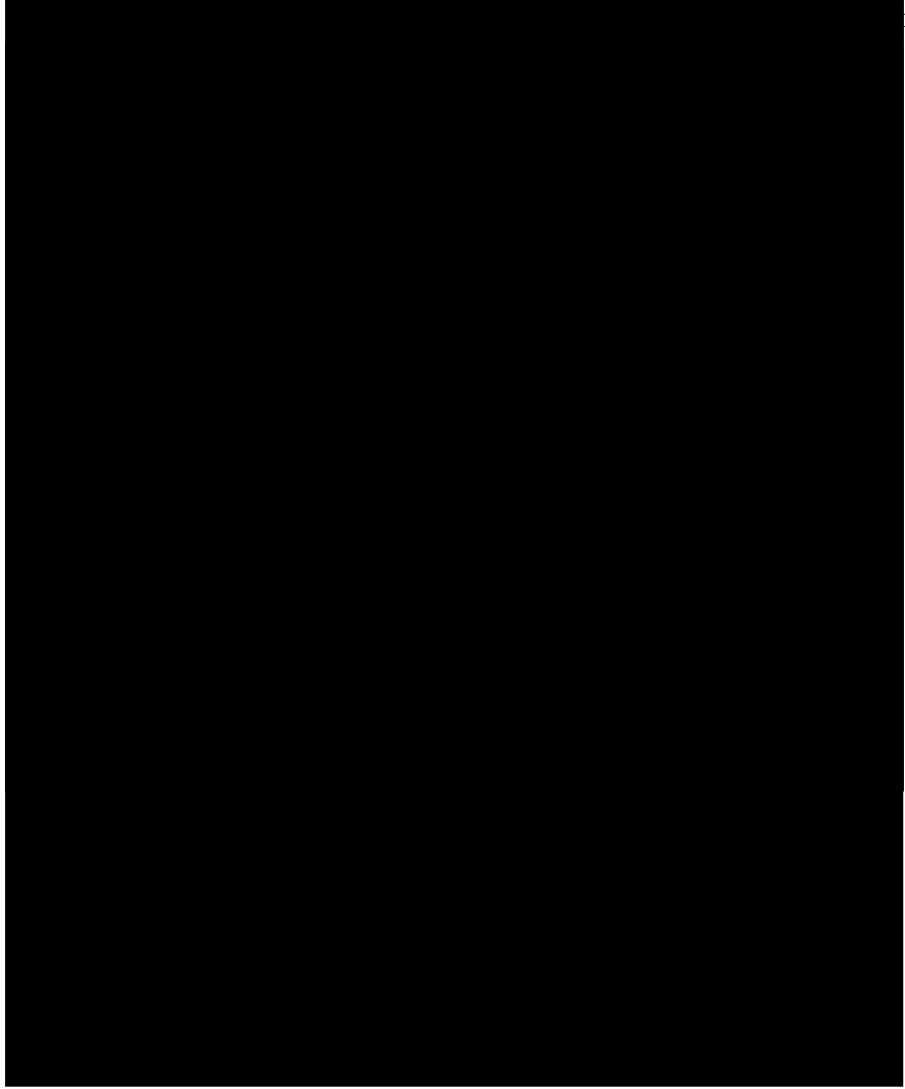
**Örnek 2.28**

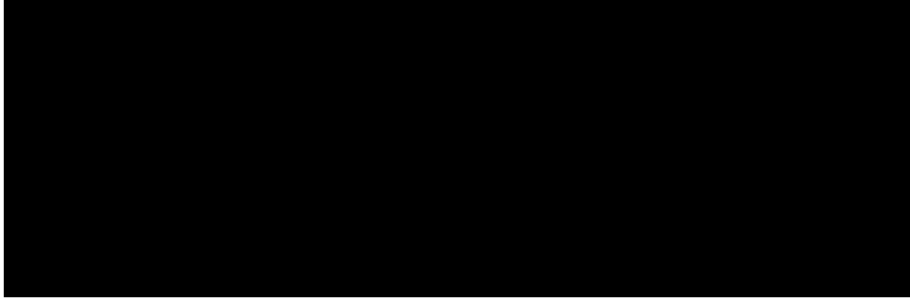
$f(t)=at$  işlevini,  $-T/2 < t < T/2$  aralığında (şekil 2.20) çiziniz, FS ni bulunuz.



Şekil 2.20  $f(t)=at$  işlevi

**Çözüm**





n	1	2	3	4	5
b <sub>n</sub>	aT/π	-aT/2π	aT/3π	-aT/4π	aT/5π

$$f(t) = \frac{aT}{\pi} \sin(\omega_0 t) - \frac{aT}{2\pi} \sin(2\omega_0 t) + \frac{aT}{3\pi} \sin(3\omega_0 t) - \frac{aT}{4\pi} \sin(4\omega_0 t) + \dots$$

$$f(t) = \frac{aT}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin(n\omega_0 t)$$

### ÖDEVLER

1. (2.12d) ve (2.12e) eşitliklerini kanıtlayınız.
2. (sint, sin2t, sin3t,.....sinnt) ve (1, cost, sint, cos2t, sin2t, .....cosnt, sint) dizilerinin  $[-2\pi, 2\pi]$  aralığında dik olduğunu gösteriniz.
3. FS katsayılarından  $b_n$  katsayısını  $a_n$  katsayısına benzer şekilde verilen yolla bulunuz.
4. Aşağıda tanımı verilen dönemli işlevin Fourier katsayılarını bulunuz ve seriye açınız.

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{4t}{T} & , \quad -\frac{T}{2} < t \leq 0 \\ 1 - \frac{4t}{T} & , \quad 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$



5. Aşağıda tanımlanan işlevin şeklini çizin, FS katsayılarını bularak seriye açınız.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , -\frac{T}{2} < t \leq 0 \\ A \sin(\omega_0 t) & , 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

6.  $f(t)$ ,  $0 < t < 2\pi$  işlevin ilk 3 harmoniğini hesaplayınız, Zaman ortamındaki sinüsodalleri ve sinüsodallerin toplamını çiziniz.

7.  $\int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt = 0$  olduğunu tek ve çift işlevlerinin çarpımları özelliğini kullanarak gösteriniz.

8.  $f(t) = e^{jt}$  işlevini tek ve çift bileşenlerine ayırınız ve çiziniz.

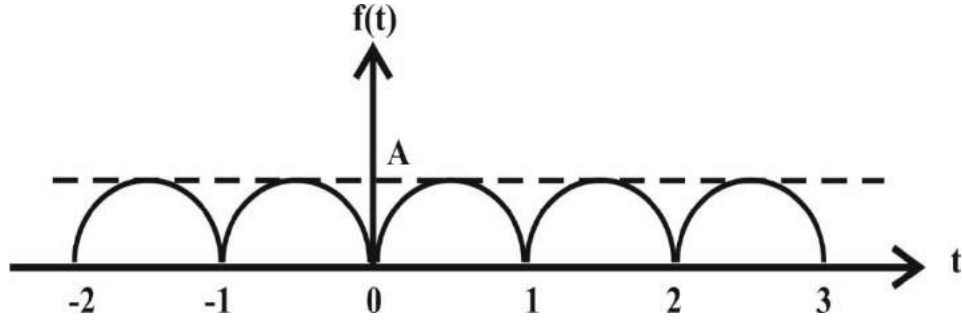
9.  $f(t) = 4\cos(15t+1) - 2\sin(4t-\pi/4)$  işlevi dönemlidir? Dönemli ise dönemini bulunuz.

10.  $f(t) = \sin^2(t)$  işlevi dönemlidir? Dönemli ise dönemini bulunuz.

11.  $f(t) = e^{j(\pi/8)t}$  işlevi dönemlidir? Dönemli ise dönemini bulunuz.

12.  $f(t) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)$  işlevinin dönemini bulunuz.

13.  $f(t) = A |\sin(\pi t)|$   $0 < t < 1$   $f(t+T) = f(t)$  ve  $T = 1$  ile verilen (Şekil 2.20) işlevi:



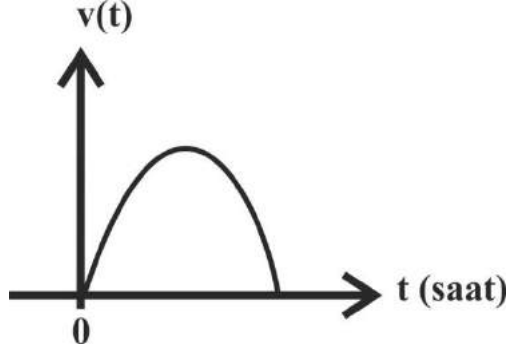
Şekil 2.20  $f(t) = A|\sin(\pi t)|$  işlevi

- Karmaşık FS ne açınız.
- Trigonometrik FS ne açınız.
- Harmonik FS katsayılarını hesaplayınız.
- İlk üç maddeyi tartışınız.

## EK1

### Boyut, parametre tanımları

Bir noktadan, diğer noktaya giden bir aracın, hız-zaman diyagramı 2. dereceden bir parabol denklemleriyle gösterilsin (şekil E1).



Şekil E1 iki nokta arasında hareket eden bir aracın hız-zaman değişimi

Şekilde, yatay ekseninde (t) zaman, zamana bağlı olarak değişen hızlar da düşey ekseninde gösterilsin. Hız-zaman ilişkisi, bir parabol denklemleriyle tanımlandığına göre

$$v(t)=at^2+bt+c$$

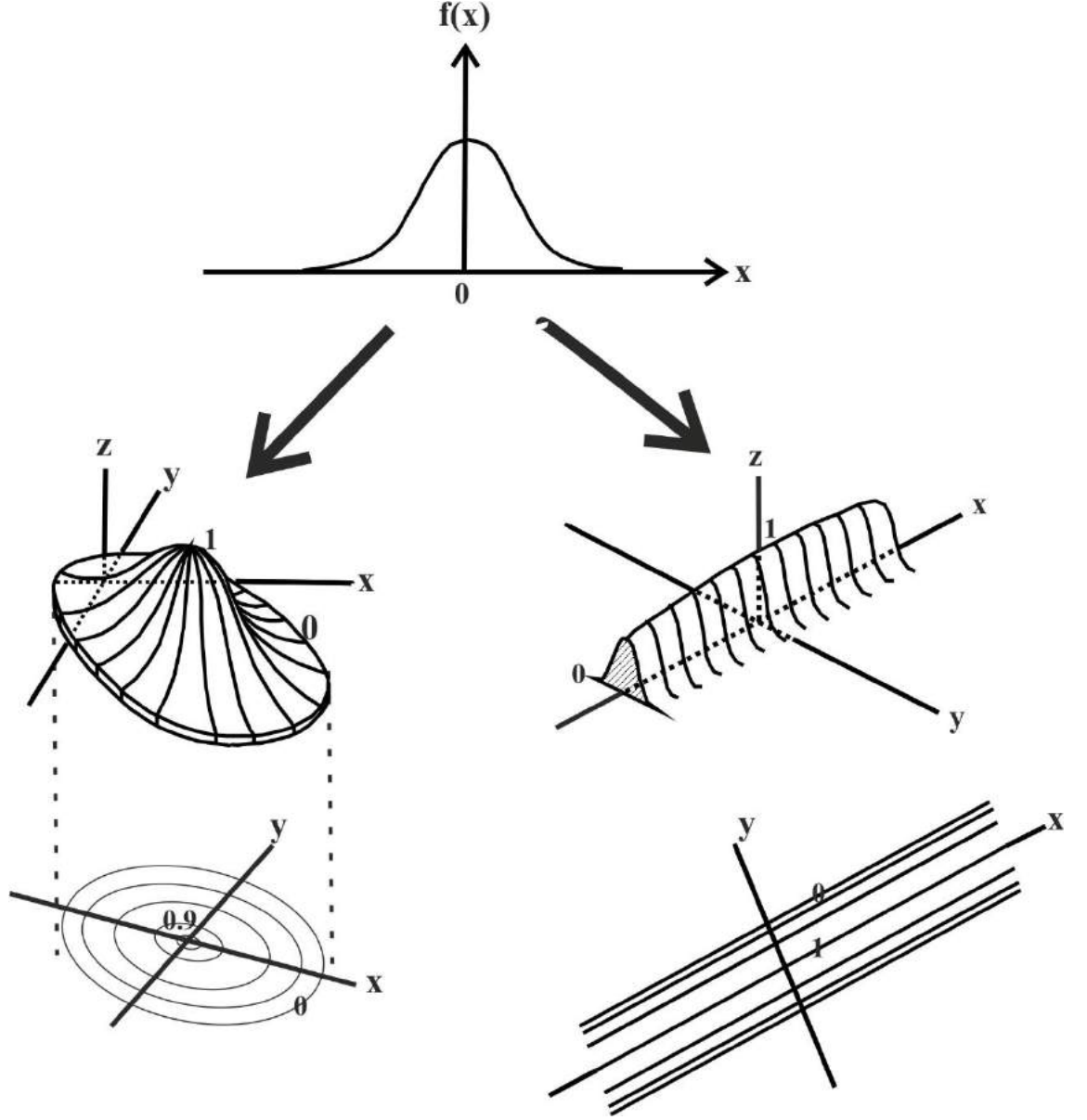
(E.1)

yazılabilir. İstenen zamana karşılık gelen hız “v(t)” değişimi, (E.1) den bulunabilir. Bu nedenle, “t” eksenine karşılık gelen değerler, hiçbir önkoşul olmadan, seçilebilir. Örneğin, 1, 5. veya 15.5 saatlerindeki hız değerleri elde edilebilir. Bu nedenle “t” eksenini; **değişken, bağımsız değişken, boyut (t boyutu), serbest değişken** olarak adlandırılır.

f(t), t'ye bağlı olduğu için **bağımlı/bağlı değişken, büyüklük, genlik** denilir.

a, b, c ise o olaya ait sabit değerlerdir. Ancak olayın koşulları değiştikçe, bu katsayılar da değişir. Örneğin taşıt cinsi, sürücü, hava - yol koşulları vb. değiştikçe söz konusu a, b,c sayısal değerleri de değişecektir. Bu sayısal değerlere, **parametre, katsayı** isimleri verilir. Parametreler, anılan olay için sabit sayılardır. Bu nedenle türevleri sıfırdır. Oysa değişkene göre türev alınabilir.

### 1-2-3 boyut kavramları



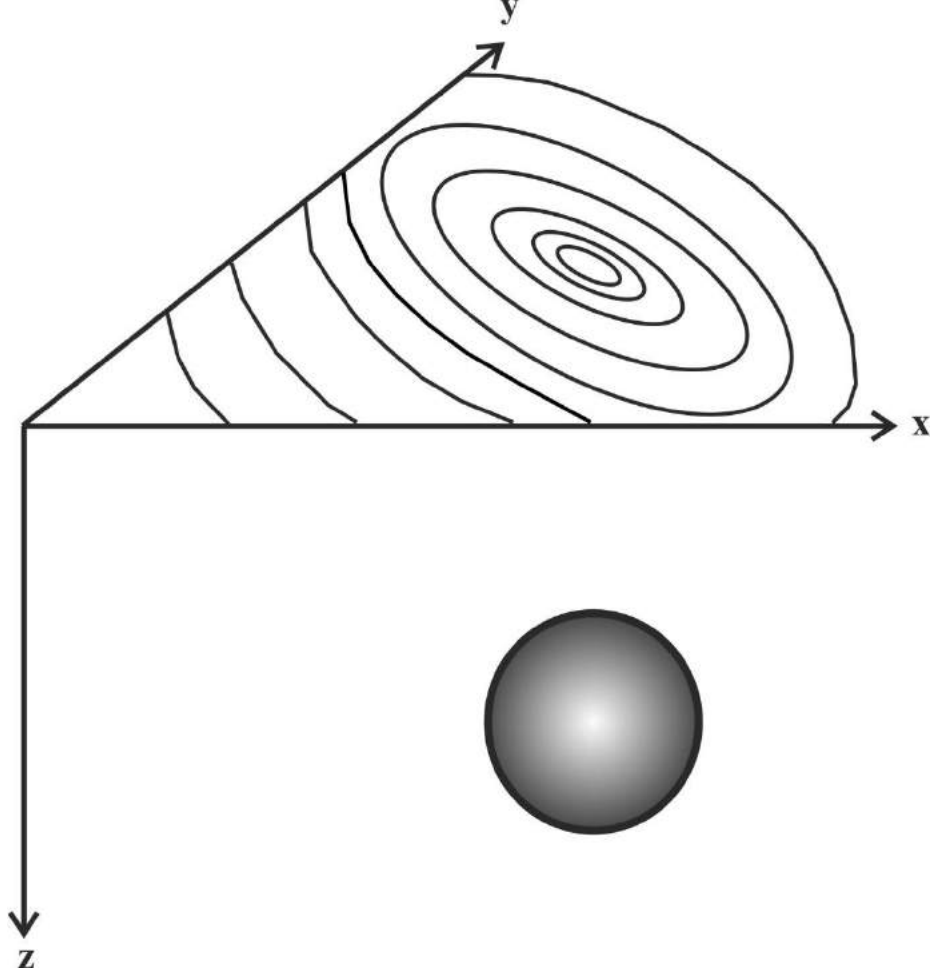
Şekil E2 tek boyutlu gauss çanının 3 ve 2 boyutlu olarak elde edilmesi.

- Şekil düşey eksen boyunca döndürülür (şekil E2 deki sol ok). Böylece 3B Gauss çanı elde edilir (İspanyol dansçı eteği).
- Çan bir yönde uzatılır (şekil E2 deki sağ ok). Şekilde “y” boyunca uzatılmıştır.

Üç boyutlu şekillerin kullanılması pratik değildir. Mühendislik işlemleri, daha çok kağıt düzleminde yapılır. Bu nedenle 3B. lu şekiller,

2B. a indirilir. Bunun için tepelerinden aşağı doğru bastırmak ve eşdeğerlere sahip sayısal değerleri konturlamak gerekir.

İspanyol dansçı eteği olarak gösterilen şekil uzunlukları km. olarak tanımlansa ve içine demir doldurulup yeraltına gömülse, yerin altında, 3 boyutlu demir cevheri elde edilmiş olur. Bu demir kütlesinin yeryüzündeki gravite, çekim bileşeni yeryüzünde ölçülse (veya bağıntısından hesaplanırsa) demir kütlenin, yeryüzündeki, düşey bileşeninin gravite değişimi elde edilir (şekil E3).



**Şekil E3** Yeraltındaki 3 boyutlu, küre biçimli, yoğunluğu büyük bir yapının gravite değişiminin 2B (x,y ortamı) ve 3B (x,y,z ortamı) olarak gösterilmesi.

Eğer değişim, yalnızca, “x” yönünde elde ediliyorsa, 1 boyutlu gravite değişimi  $[g_x(x)]$ , hem“x” hem de “y” yönünde elde ediliyorsa, 2 boyutlu gravite değişimleri  $[g_x(x,y)]$  elde edilir. 2B. lu değişimlere, Jeofizikte “anomali haritası” denilir. Jeofizikte, genelde 3B. lu gözlemler yapılmaz (düşey doğrultuda açılmış kuyu içi çalışmaları dışında).

*Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830)*



Fransız fizikçi ve matematikçi Joseph Fourier, sinüsoidal olmayan ama dönemli bir işlevin sinüs ve kosinüslerin sonsuz toplamı biçimde yazılacağını göstermiştir. Daha doğrusu sinüsoidal olmayan dönemli bir işlevin, genlik ve frekansları birbirlerinden farklı olan birçok sinüsoidal dalgaların toplamı olarak göstermiştir.

Joseph Fourier bu kuramı, ilk olarak metal çubuk veya levhadaki ısı denklemlerinin çözümünde kullanmıştır. Isı denklemi diferansiyel bir denklemdir ve çözümü zordur. Fourier bu denklemi basitleştirerek sinüs ve kosinüsleri katsayılarla birbirine ekleyerek karmaşık bir ısı kaynağı oluşturmayı amaçlamıştır. Kaynağın sonsuza ye kadar süreceği varsayımından hareketle oluşturduğu bu trigonometrik seri "*Fourier Serisi*" olarak adlandırılmaktadır.

*Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)*



Ünlü Alman matematikçidir. 1805 de Düren de doğmuş, eğitimini Paris'te almıştır. Yüksek öğrenimini matematik konusunda yapmıştır. 1822-1827 yılları, öğrenciliğinin son yıllarıdır, Bu dönemde önemli matematikçilerle ilişkiye geçmiştir. Bu matematikçiler arasında en çok Joseph Fourier kendisi ile ilişki kurmuştur. 1831-1855 yıllarında, Berlin Üniversitesinde akademisyen olarak göreve yapmıştır. Bu yıllar, Almanya'nın matematik olarak çok ileri gittiği yıllardır.

Lejeune Dirichlet, bir çok mekanik ve fizik problemleri matematikle çok iyi ilişkilendirmiştir. Dirichlet problemi olarak adlandırılan ve bir tümlevi kapalı bir çevredeki değerleriyle problemi çözmüştür. Bir diğer çalışması ise Fermat denklemleri ile ilişkin yaptığı çalışmadır. Önemli bir diğer çalışması serileri yakınsaklığı ile ilgili olanıdır. Bir işlevin hangi koşullarda trigonometrik bir seri ile gösterileceğinin koşullarını belirlemiştir.

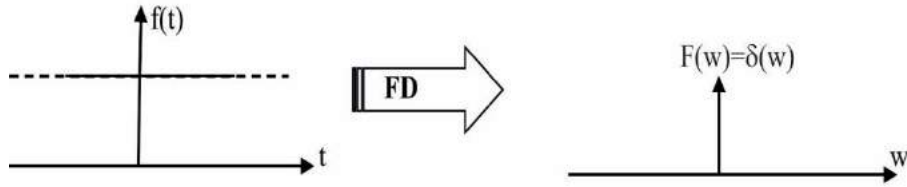
Lejeune Dirichlet, 5 Mayıs 1859 da, 54 yaşında, Göttingen'de ölmüştür.

## **BÖLÜM 3**

### ***FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ (DÖNEMİ BİLİNMIYEN İŞLEVLERİN FOURIER AÇILIMLARI)***

#### **3.1. GİRİŞ**

FS 1. ve 2. bölümlerde verilmiştir. FS serileri, dönemli, sonsuz uzunluklu izlerde kullanılır. “ $\infty$ ” uzunluktaki bir sinyal, dönemleri farklı, çok sayıda işlevlerin toplamından oluşabilir. Ancak toplam sinyalin dönemi, en uzun dönemli işlevin dönemiyle aynıdır. Bir sinyal içinde en uzun dönem ne olabilir? Kuşkusuz en düşük frekanstır.  $T=1/f$  (veya  $T=2\pi/w$ ) ilişkisinden de anlaşılacağı gibi “0” frekanslı sinyal, “ $\infty$ ” dönemlidir. Dönemi “ $\infty$ ” olan sinyal ise, “t” eksenine paralel olan düz bir çizgidir. “ $\infty$ ” uzunluklu, düz bir işlevin frekans ortamındaki denklemi, “0” frekansında birim dürtü işlevidir (şekil 3.1) (bkz bölüm 5.5, dürtü işlevi ve FD).



**Şekil 3.1** “ $\infty$ ” dönemli sinyal (düz çizgi) ve spektrumu (“0” frekansında birim dürtü)

Sonsuz boylu, dönemli sinyallerin harmonikleri, “n” tamsayı olmak üzere, “ $nw_0$ ” binlerinde, kesikli, olarak görülür.

Dönemsiz sinyallerin açılımları, dönemlilere benzetilerek, limit durumunda, dönemleri sonsuza götürülerek elde edilir (bölüm 3.3). Dönem sonsuza götürüldüğü için frekans sıfıra yaklaşır ve frekans örnekleme aralığı çok küçülerek, spektrum sürekli biçime dönüşür.

Bu nedenle, sonsuz dönemli (veya limit koşullarında dönemi sonsuza götürülen) sinyallerin spektrumları süreklidir. Yani spektrum “ $nw_0$ ”



binlerinde kesikli olarak değil, frekans ekseninin tüm değerlerinde, sürekli olarak görülür.

FD alınırken, sinyalin “enerji sinyali” koşuluna uygun olması gerekir. Yani tanımlı olduğu bölgedeki enerjisi sonlu olmalıdır (bkz. bölüm 3.3, 3.1 bağıntısı).

Jeofizikte, genelde 2 ortam (bağımsız değişken) kullanılır. Bunlar zaman veya uzay ortamlarıdır (“t” veya “x” bağımsız değişkenleri). Örneğin bir noktada, manyetometre cihazını kurarak, her 10 dakikada bir manyetik gözlem yapılırsa, o noktanın manyetik alan değişimini, zamana bağlı olarak elde edilir ve zaman sinylidir. Yine aynı manyetometreyi, 10 km. uzunluğunda bir profilde, 250 şer m. aralıklı olarak gözlem yapılırsa, yer manyetik alanı, 10 km uzunluğunda bir kesitte elde edilir ve uzay sinylidir. Zaman ortamında alınan izlerin analizi “frekans”, uzay ortamında alınan izlerin analizi ise “dalga sayısı” ortamlarında yapılır. Bu kitapta, söz konusu her iki ortam “spektrum/spektral ortam” olarak kullanılmaktadır.

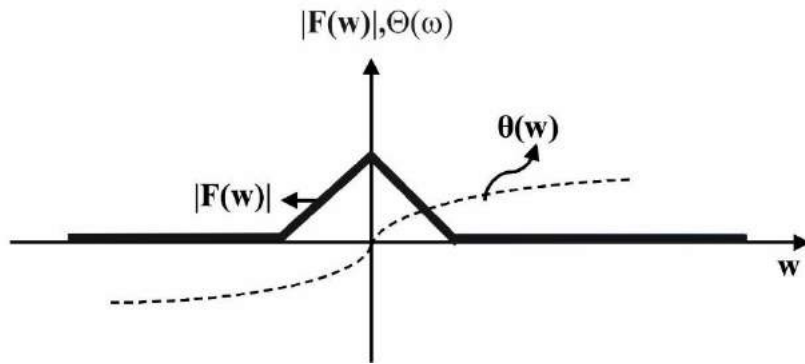
Fourier serileri, Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) tarafından kurulmuştur. Seriler bir yaklaştırma yöntemi olarak düşünülse bile, harmoniklerin hesaplanmasında çok sayıda işlem gerektirir. Harmonik sayısı ne kadar çok olursa, yanılğı miktarı o oranda azalacaktır. Dolayısıyla harmonik sayısının çok olması gerekir. Harmonik sayısı arttıkça, işlem sayısı da artar. Bu nedenlerden ötürü 1960 lı yıllara kadar uygulama alanı bulamamıştır. 2. dünya savaşı sırasında, iletişimin önem kazanması, sinyal kuramında hızlı gelişmelere neden olmuştur. Ayrıca uzun sayı dizilerinin analizinde bilgisayarların devreye girmesi, FS ve FD nin uygulamalarda yaygın kullanılmasının önünü açmıştır.

FS ve FD lerinin yaygın kullanılmasında, Dr. Ron Bracewell (1965), Lee (1967), Rabiner ve Gold (1975), vb. araştırmacıların katkısı çoktur. Sinyal kuramının Jeofizikte uygulanması ile ilgili olarak E. R. Kanassewich (1974), Markus Bath (1974), Jhon F. Claerbout (1976), vb. sayılabilir. Ülkemizde ise bu alanda birçok araştırmacı çalışmıştır. Öncelikle, sinyal kuramının Jeofizik dalında kullanılmasına ait ilk

yayımlar Prof. Dr. Nezihi Canitez (1978 – 1984 – 1987) tarafından yapılmıştır.

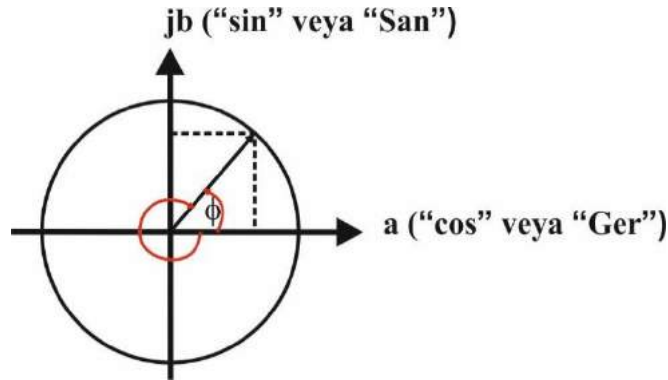
### 3.2. KARMAŞIK İŞLEMLERİN GÖSTERİLMESİ

Karmaşık işlemler zaman ( $t$  veya  $x$ ) ve frekans ( $w$  veya  $f$ ) ortamlarında olabilir. Dolayısıyla bağımsız değişkenler “ $t$ ” veya “ $w$ ” dir. Şekil 3.2 de frekans ortamında, karmaşık bir işlemin genlik ve evre spektrumları görülmektedir.



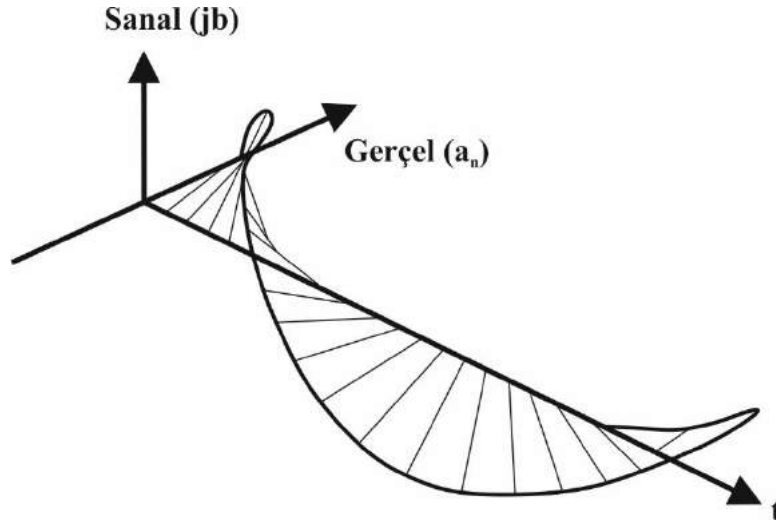
Şekil 3.2 Karmaşık işlev genlik, evre spektrumları (Bracewell, R.,N. 1986)

Şekil 3.3 de ise karmaşık bir “ $P=a+jb$ ” sayısı polar koordinatlarda verilmiştir (bkz bölüm 1 Ek-C3). Şekil 3.3 deki “ $P$ ” bir noktadır (veya vektör). Herhangi bir bağımsız değişkeni yoktur. Eğer “ $P$ ” bir vektör ise, yani değişik zamanlarda farklı açısız hız değerleri varsa, zaman değişkeninin konulması gerekir.



### Şekil 3.3 Karmaşık vektör

Zaman değişkeni, şekil 3.3 de, sayfa düzlemine dik olarak düşünülmelidir. Şekil bir soba borusuna benzetilebilir. Borunun düşey ve yatayı, gerçel ve sanal eksenler, tam ortasından geçen, boru boyunca uzanan ise zaman (t) eksenidir. Böyle bir 3 boyutlu karmaşık işlev şekil 3.4 te verilmiştir. Şekilde gösterilen her bir kırmızı çubuk, şekil 3.3 de verilen sabit “t” anlarındaki “P” vektörleri olarak düşünülebilir. Şekil 3.4 te verilen karmaşık işlev, zaman ortamındadır. Ancak frekans ortamında da olabilir. Bu koşulda bağımsız değişken “t” yerine “w” olacaktır.

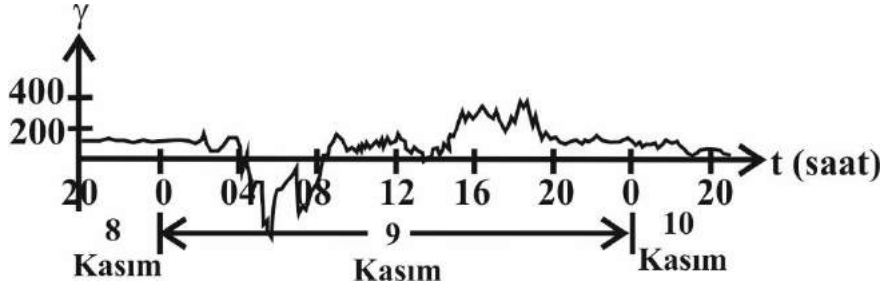


Şekil 3.4 Zaman ortamındaki karmaşık bir işlevin gösterilmesi (Bracewell, R.,N. 1986)

Şekil 3.4 te, karmaşık bir zaman işlevinin, gerçel ( $a_n$ ) ve sanal ( $b_n$ ) bileşenlerin, çeşitli “t” zaman dilimlerinde, konumları görülmektedir. Bilindiği gibi kosinüs bileşeni gerçel, sinüs bileşeni ise sanaldır. FD deki dönmeler, evre kaymasından oluşmaktadır (bkz . bölüm1, şekil 1.7). Sinyal, frekans ortamına aktarılarak, analizi yapılabilir (çeşitli frekanslardaki genlik ve evre bilgilerinin elde edilmesi).

### 3.3. FOURIER SERİLERİNDEN FOURIER DÖNÜŞÜMLERİNE

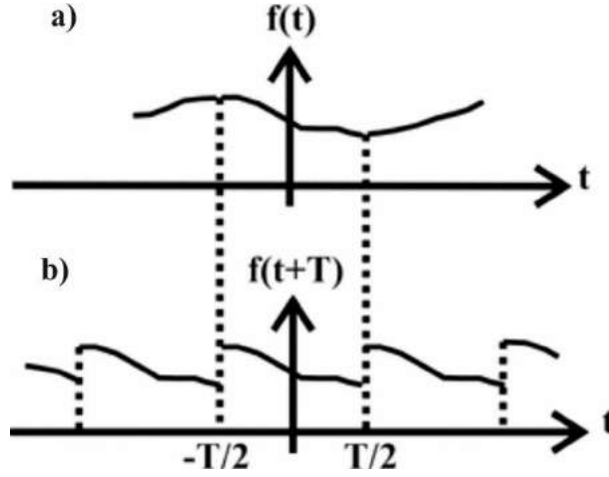
Dönemli, sonsuz boylu izler, frekans analizleri (veya trigonometrik serilere yaklaştırma) için FS' ne açılırlar. Ancak, mühendislik çalışmalarında süreçler kısa, ve sonludur. Şekil 3.5 te Sitka-Alaska 'da kayıt edilen manyetik alan değişimleri, yaklaşık 400  $\gamma$  genlikli, manyetik bir fırtınaya aittir. Kayıt, 8 Kasım 20.00 ve 10 Kasım 20.00 saatleri arasında alınmıştır. Kuşkusuz, manyetik alan, 8 Kasım saat 20.00 dan önce vardı ve 10 Kasım 20.00 dan sonra da sürecektir. Manyetik alan kaydı çok uzun olarak (olanak olsa dünyanın var oluşundan, şu ana dek) alınabilirdi. Ancak mühendislik problemlerde çok uzun kayıtlar gereksizdir. İlgilenilen zaman sürecindeki kayıtlar önemlidir. Onun dışında, olayın bittiği (sıfır olduğu) veya sönümlendiği (sıfıra asimptot) varsayılır. Böyle sinyallerin yani, zamanın veya uzayın kesikli bir sürecinde alınmış izlerin, frekans analizinde FS leri yerine FD kullanılır.



Şekil 3.5 9 Kasım 1947'de Sitka – Alaska'da kaydedilen manyetik fırtınalar (Dobrin, M.B., 1960).

FS' lerinin kullanılması için işlevin dönemli olması gerekir. Oysa mühendislikte, gözlemin bir süresi vardır. Gözlem başlar ve biter. Bu koşulda, zamanın (veya uzayın) sınırlı bir parçasına ait bilgi edinilir. Şekil 3.6.a da çok uzun dönemli bir iz verilmiştir. Şekil 3.6.b'de gözlem süresi  $-T/2$ ,  $T/2$  olan sinyalin bir kısmı alınmıştır (bu aralıkta gözlem yapılmıştır). Bu koşulda, şekil 3.6.a da verilen sürekli sinyal,  $-T/2$ ,  $T/2$  aralığında şekil 3.6.b' de verildiği gibi parçalanmıştır.

Dönemini bilmediğimiz, uzun dönemli, sürekli iz,  $-T/2, T/2$  aralığında parçalanarak, parçalı sürekli bir işleve dönüştürülmüştür.



**Şekil 3.6 a)** dönemi bilinmeyen işlev, **b)** “a” da verilen işlev,  $-T/2, T/2$  aralığında dönemlendirilerek, döneminin sonsuza götürülmesi

Şekil 3.6.b deki işlevin dönemi sonsuz büyürken (kesikli bir süreçte alınan izin, boyunun limitte sonsuza götürülmesi), serinin yaklaşımında bir limit varsa, işlev, uygun bir biçimde gösterilebilir. Mühendislik alanlarında, alınan kesikli sinyaller, ilgilenilen süreç dışında, aşağıdaki gibi varsayılır.

- Sonlu bir  $t_1, t_2$  zaman aralığında sıfırdan farklı ve bu aralığın dışında sıfır olan işlevler,
- $t = \pm\infty$  için  $f(t) \rightarrow 0$  (sıfıra asimptot) olan işlevler.

Drichlet koşullarına göre, enerjinin sonlu olması gerekliliği vardır.

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (3.1)$$

Bu durumda,  $F(w) = \mathfrak{F}[f(t)]$  olarak yazılabilir.

İkinci bölümde, karmaşık Fourier serileri ile ilgili denklemler aşağıda verilmiştir.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.32)$$

$$C_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (2.34)$$

İzin boyu, limitte  $\infty$ 'a götürüldüğünde, en büyük dönem, “0” frekansına yaklaşır.

$$w_0 = 2\pi \frac{1}{T} \quad , \quad w_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{1}{T} = 0$$

Söz konusu, “ $w_0$ ” frekansı, veri içinde bulunan en alçak frekanstır (temel frekans). Temel frekansın, düşey eksenden olan farkı “ $\Delta w$ ” dır (frekans ortamı örnekleme aralığı). Bu durumda “ $w_n$ ” binleri, “ $n$ ” tamsayı olmak koşuluyla, “ $w_n = n w_0$ ” larda görülür.

(2.34) bağıntısı, (2.32) denkleminde yerine konulursa;

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j n w_0 t} dt \right] e^{j n w_0 t} \quad (3.2)$$

elde edilir.

Gözlemsel verilerden elde edilen sinyale ait en büyük dönem, ancak kayıt süresi kadar olacağından (yani  $\infty$  değil), temel frekans olan “ $w_0$ ”, sıfırdan farklı bir frekansta görülecektir. Bu durumda,

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} = \Delta w \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\Delta w}{2\pi} \quad \text{olarak alınabilir.} \quad (3.2) \quad \text{bağıntısı düzenlenirse,}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\Delta w}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j n w_0 t} dt \right] e^{j n w_0 t} \quad (3.3)$$

ulaşılır. Son denklemde, tümlev

$$F(w) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j n w_0 t} dt$$

tanımlanır ve kolaylık olması için  $w_n = n w_0 = w$  olarak gösterilirse,

$$F(w) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j w t} dt \quad (3.4)$$

bulunur. Limitte,  $T \rightarrow \infty$ ,  $w \rightarrow 0$  gitmesi durumunda  $\Delta w = dw$  ya ve toplamlar da tümleve dönüşür. Böylece tümlev tanımından yararlanarak;

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{j w t} dw \quad (3.5)$$

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j w t} dt \quad (3.6)$$

bağıntıları elde edilir. (3.6) eşitliği, aslında, dönemli işlevlerin karmaşık açılımlarındaki “ $C_n$ ” katsayısıdır.

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jnw_0 t} dt \quad (3.7)$$

(3.5) ve (3.6) bağıntılarına Fourier dönüşüm çifti denilir. Matematiksel olarak “f(t)” veya “F(w)” dan birinin bilinmesi durumunda diğeri de bulunabilir.

$$F(w) = \mathfrak{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jw t} dt \quad (3.8)$$

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{jw t} dw \quad (3.9)$$

Son denklemlerde;

$\mathfrak{F}$ : düz Fourier dönüşümünü (zaman ortamından frekans ortamına geçişi veya uzay/uzunluk ortamından dalga sayısı ortamına geçişi),

$\mathfrak{F}^{-1}$ : ters Fourier dönüşümünü (frekans ortamından zaman ortamına geçişi veya dalga sayısı ortamından uzay/uzunluk ortamına geçişi) gösterir.

### 3.4. ENERJİ VE GÜCE GÖRE SINIFLAMA

Sinyallerin sınıflaması, daha çok, süre ile ilişkilidir. Enerji sinyalleri sonsuz aralıkta olmasına karşın güç sinyalleri sınırlıdır.

#### 3.4.1 Enerji Sinyalleri

Herhangi bir izin Drichlet koşullarına göre enerjisinin sonlu olmalıdır.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{Joule}) \quad (3.10)$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).f(t)^* dt < \infty \quad (\text{Joule}) \quad (3.11.a)$$

Ancak, çoğu işlev bu koşulu sağlayamaz ve enerjileri sonsuzdur. Oysa işlevlerin, sonsuz bir zaman  $(-\infty, \infty)$  veya  $(0, \infty)$  aralığında saçtığı enerjinin sonlu olması (**enerji sinyalleri**) gerekir (şekil 3.7).

Gerçel ve sanal işlevler için (3.10), (3.11) denklemleri geçerlidir.

Tümlev ile toplam yer değiştirirse,

$$E = \sum_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \quad (3.11.b)$$

veya ayırık olarak,

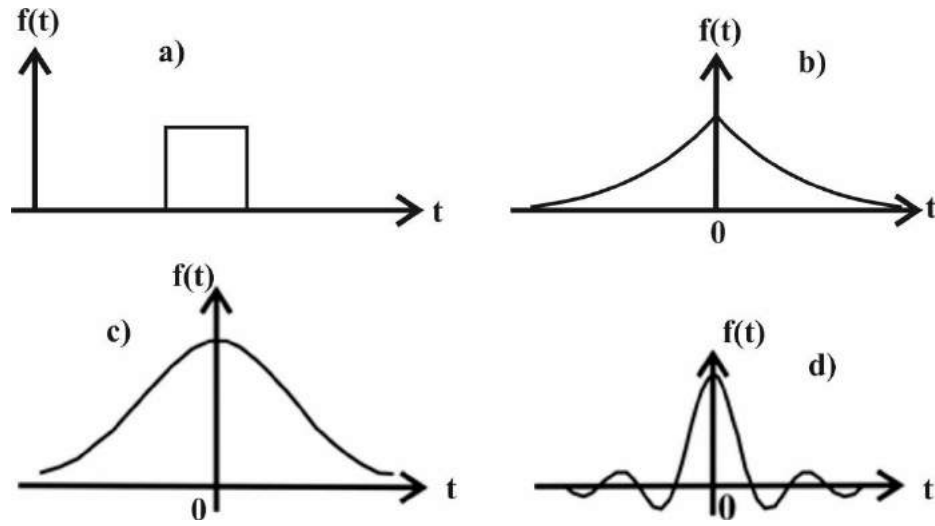
$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f(n)]^2 \quad (3.11.c)$$

yazılır. Burada “f(n)”: ayrık sinyalin her bir binde aldığı değerlerdir. Bir sinyal, FD’ nün alınabilmesi için 3.1 denklemini sağlamalıdır. Yani tanımlı olduğu bölgede (verilen denklemde tanım bölgesi – T/2,T/2 dir) enerjisinin sonlu olması gerekir. Buradan hareketle, “dönemsiz sinyallerin enerjisi sonludur” genellemesi yapılabilir (enerji sinyalleri). Aynı zamanda, enerji sinyallerin ortalama gücü sıfırdır.

---

**Not:** Enerji sinyali,  $t < 0$  için sıfır değerini alıyorsa, dalgacık denir.

---



**Şekil 3.7** Enerji sinyalleri

a) Dikdörtgen dalga   b)  $e^{-\alpha|t|}$  işlevi   c) Gauss sinyali   d) Sinc işlevi

### 3.4.2 Güç Sinyalleri

Enerji sinyalleri, “ $\infty$ ” bir zaman aralığındadır. Oysa mühendislikte, sınırlı işlevlerle uğraşılır. Bu nedenle, genelde dönemsiz (veya dönemi bilinmeyen) olan enerji sinyalleri, kullanışsızdır. Uygulamada, enerji sinyalleri yerine güç sinyalleri yeğlenir. Bunun için (3.10) denklemi, belirli bir süreçte (sınırlı), limit koşullarında incelenir.

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \quad (3.12.a)$$

Tümlev, toplam olarak yazılırsa,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \quad (3.12.b)$$



(3.12) bağıntılarında, “T”, “-T/2,T/2” aralığında, işlevin incelendiği süreçtir. (3.12) denklemleri, sinyalin “T” aralıkta **ortalama gücüdür**. Eğer işlevin ortalama gücü, “T” sürecinde, “0” dan farklıysa yani ortalama gücü, herhangi bir değere sahipse, **güç sinyali** olarak isimlendirilir. Bu koşulda, ortalama güç “0<P<∞” aralığında tanımlı ve sabit bir değere sahiptir. (3.12) bağıntısında sınırlar da kullanıldığında, güç sinyali eşitliği (0<P<∞),

$$0 < \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \right\} < \infty \quad (3.13)$$

olarak tanımlanır. Güç sinyalleri, “T” süreci içindeki, ortalama gücü sıfırdan farklı ve sınırlıdır. Dönemli izlerin tümü, belirli bir “T” sürecine, ortalama güçleri sınırlı bir değere sahip olduklarından, güç sinyalleridir (şekil 3.7). Dönemli işlevin, dönem boyunca, gücü kullanılarak, sinyalin ortalama gücü elde edilir. Bu durumda, limit işlemine gerek yoktur.

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \quad (3.14.a)$$

“N” ile dönemli, ayrık sinyallerde güç bağıntısı ise

$$P = \frac{1}{N+1} \sum_{n_0}^{n_0+N} [f(n)]^2 \quad (3.14.b)$$

olarak tanımlanır.

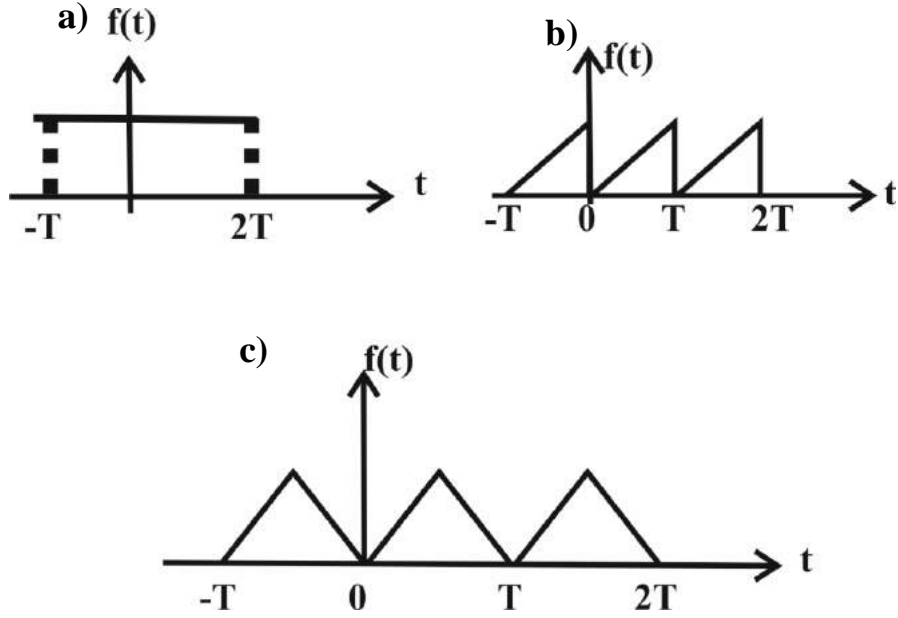
$n_0$ : ayrık değerlerden herhangi bir tanesidir.

Ne enerji ve ne de güç sinyali kurallarına uymayan izler de vardır.

Örnek olarak,  $-\infty < t < \infty$  aralığında tanımlı  $f(t) = e^{-\alpha t}$  işlevi verilebilir.

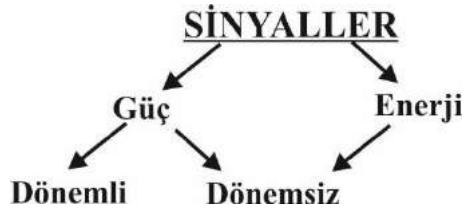
### **Öz olarak güç ve enerji sinyalleri:**

- Güç sinyali  $0 < P < \infty$  aralıktadır.
- Enerji sinyali  $-\infty < E < \infty$  aralıktadır.
- Güç sinyalleri dönemli, yaklaşık dönemli, dönemsiz olabilir.
- Enerji sinyalleri daima dönemsizdir.



**Şekil 3.8** Güç sinyalleri a) sıfır frekanslı sabit genlikli sinyal, b) testere dişi c) üçgen dalga

Güç ve enerji sinyalleri dönem açısından incelendiğinde özet olarak, şekil 3.9 geçerlidir.

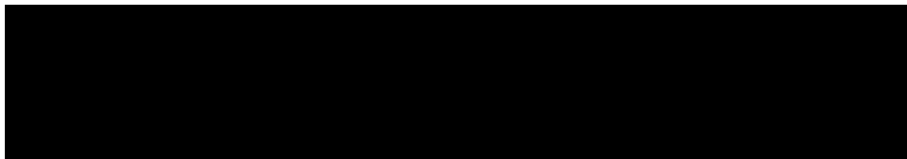


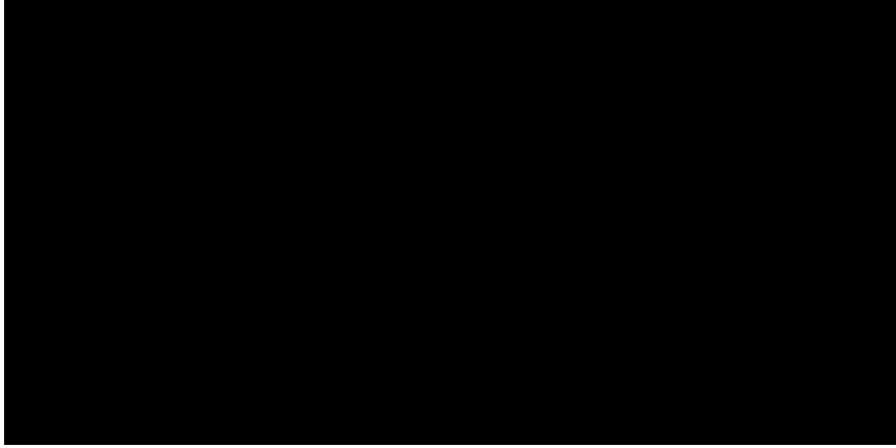
**Şekil 3.9** Dönem açısından güç ve enerji sinyalleri

**Örnek 3.1**

$f(t)=e^{-10t}$  izini, enerji veya güç sinyali açısından irdeleyiniz.

**Çözüm**

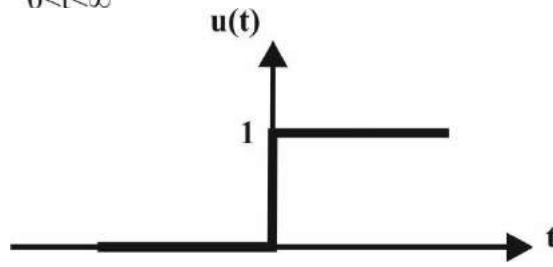




### **Örnek 3.2**

$f(t)=e^{-10t}u(t)$  izini, enerji veya güç sinyali açısından irdeleyiniz.  
 $u(t)$  birim basamak işlevidir (şekil 3.10) ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

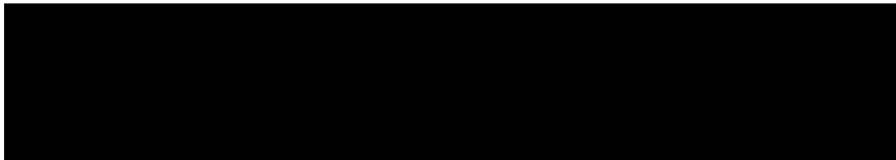
$$u(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \infty \end{cases}$$

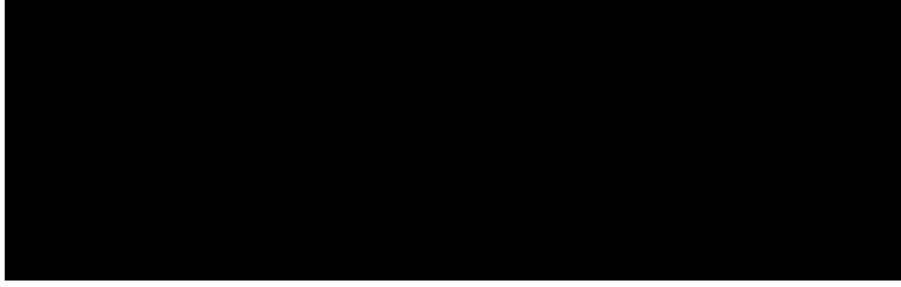


**Şekil 3.10** Birim basamak işlevi

(3.10) denklemi kullanılır.

$$E = \int_0^{\infty} |e^{-10t}|^2 dt =$$





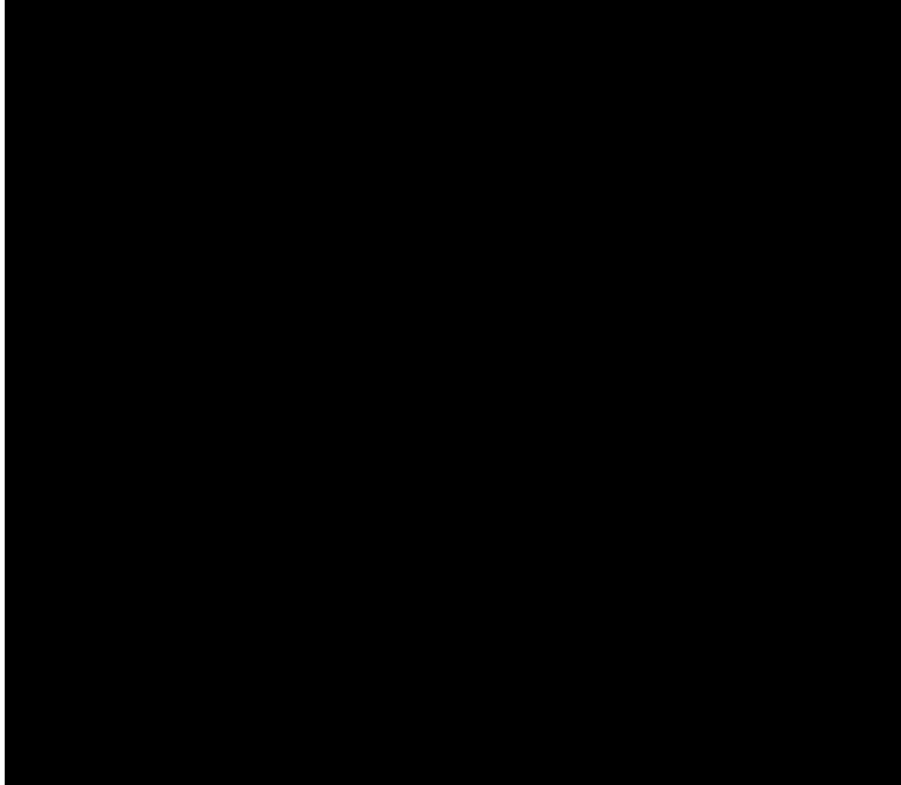
Sinyalin ortalama g¼c¼ sifirdir. (3.12) bağintısını sağlamadığı için g¼c¼ sinyali değildir.

**Örnek 3.3**

Örnek 2.10 da verilen işlevin, hangi sınıfa girdiğini bulunuz.

***Çözüm***

Örnek 2.10 daki testere dişi işlevinin tanımı,



Dolayısıyla g¼c¼ sinyalidir.

### Örnek 3.4

$f(t)=A$  denklemleri ile verilen (Şekil 3.11) işlevin enerjisini ve ortalama gücünü bulunuz.

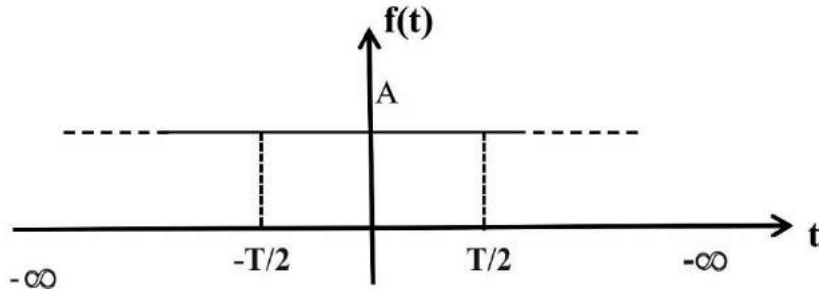
#### Çözüm

Verilen işlevin enerjisi sonlu değildir. Gerçekten de  $f(t)$  izinin  $1\Omega$  luk bir dirençte, sonsuz bir süreçte harcadığı enerji sonsuzdur.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 dt = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt = A^2 |t|_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

Sonsuz aralıkta,  $f(t)$  izinin enerjisinden söz edilemez. Bunun yerine (3.12) denklemleri ile verilen ortalama güç kullanılır.  $f(t)=A$  izinin  $1\Omega$  luk bir dirençte harcadığı ortalama güç;

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} |t| = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \left[ \frac{T}{2} - \left( -\frac{T}{2} \right) \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} T = A^2 < \infty$$

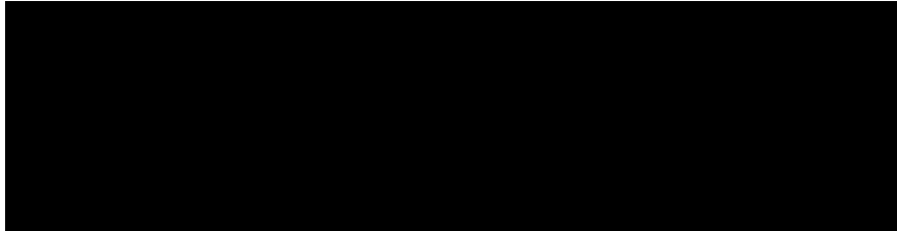


Şekil 3.11 “A” izi

### Örnek 3.5

Sonsuz uzunluklu bir  $f(t)$  işlevinin, Fourier dönüşümünün “ $w_0$ ” binlerindeki birim dürtüler olduğunu gösteriniz.

#### Çözüm





elde edilir. (3.34) bağıntısından görüldüğü gibi dönemli bir  $f(t)$  işlevinin FD, eşit aralıklarla  $w=nw_0$  binlerinde görülen ve genlikleri  $2\pi C_n$  olan dürtülerden oluşmaktadır.

**Not:**  $C_n = (a_n^2 + b_n^2)$  dır (Bkz Bölüm 2, 2.44 denklemi).

### 3.5. FOURIER DÖNÜŞÜMLERİNE AİT BAZI BAĞINTILAR

3.5.1 (3.8) eşitliğinde  $e^{jn\omega_0 t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t)$  yazılarak,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \quad (3.17)$$

elde edilir. Bu bağıntıda FD'nün gerçel kısmı

$$\text{Ger}\{F(\omega)\} = G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad (3.18)$$

ve sanal kısmı da,

$$\text{San}\{F(\omega)\} = jS(\omega) = -j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \quad (3.19)$$

dır.

3.5.2 Gerçel ve sanal kısımlar kullanılarak (3.35) denklemi

$$F(\omega) = G(\omega) + jS(\omega) \quad (3.20)$$

olarak yazılır. Kutupsal koordinatlardan,

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (3.21)$$

elde edilir. Burada;  $f(t)$  işlevinin genlik spektrumu  $|F(\omega)|$  ve evre spektrumu  $\Phi(\omega)$  dır. Evre tanımından,

$$\Phi(\omega) = \arg F(\omega) = \tan^{-1} \left[ \frac{S(\omega)}{G(\omega)} \right] = -\tan^{-1} \left[ \frac{S(\omega)}{G(\omega)} \right] \quad (3.22)$$

dır. “ $\Phi(w)$ ”, aynı zamanda “ $F(w)$ ” nın argümanıdır (Bölüm 1 ek C) ve  $\Phi(w)=\arg F(w)$  şeklinde gösterilebilir. (3.39) eşitliği,

$$F(w) = |F(w)| e^{j \arg F(w)} \quad (3.23)$$

biçiminde yazılabilir. Genlik spektrumu ise;

$$|F(w)| = [G(w)^2 + S(w)^2]^{1/2} \quad (3.24)$$

denklemi ile verilir. (3.18) ve (3.19) dan elde edilen işlev, sırası ile “ $w$ ” ya göre çift ve tek işlevlerdir. Yani:

$$G(w) = G(-w) \quad \text{Çift işlev} \quad (3.25)$$

$$S(w) = -S(-w) \quad \text{Tek işlev} \quad (3.26)$$

**3.5.3**  $f(t)$  gerçel ise, spektrum genliği  $|F(w)|$ , “ $w$ ” nın çift işlevi, evresi de “ $w$ ” nın tek işlevidir. (3.21) de  $w = -w$  koyularak

$$F(-w) = |F(-w)| e^{j\Phi(-w)} \quad (3.27)$$

elde edilir. Son eşitlikte,

$$F^*(w)F(-w) \quad (3.28)$$

dır. (3.28) denkleminde, “ $F^*(w)$ ” karmaşık eşleniktir. (3.21)

bağıntısından,  $F^*(w) = |F(w)| [-e^{j\Phi(-w)}]$  olarak yazılabilir. Öyleyse;

$$|F(-w)| [e^{j\Phi(-w)}] = F(w) \exp[-e^{j\Phi(w)}] \quad \text{dir. Buradan da,}$$

$$\begin{aligned} |F(-w)| &\equiv |F(w)| \\ \Phi(-w) &\equiv -\Phi(w) \end{aligned} \quad (3.29)$$

olduğu kanıtlanır. Buraya dek yapılan kanıtlamalardan yararlanarak aşağıdaki bağıntıya ulaşılır.

$$|F(w)| = F(-w) = F^*(w) = |F(w)| e^{-j\Phi(w)} \quad (3.30)$$

**3.5.4** “ $t$ ” ortamında karmaşık bir işlev  $f(t) = g(t) + js(t)$  olarak gösterilebilir. O zaman,

$$F(w) = \mathfrak{Z}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [g(t) + js(t)] [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt$$

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} [g(t)\cos(wt) + s(t)\sin(wt)] dt - j \int_{-\infty}^{\infty} [g(t)\sin(wt) - s(t)\cos(wt)] dt \quad (3.31)$$

dır. FD ün gerçel ve sanal kısımları ise:

$$G(w) = \mathfrak{I}[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [g(t)\cos(wt) + s(t)\sin(wt)] dt \quad (3.32)$$

$$S(w) = \mathfrak{I}[s(t)] = - \int_{-\infty}^{\infty} [g(t)\sin(wt) - s(t)\cos(wt)] dt \quad (3.33)$$

dır. Aynı yoldan gidilerek ters dönüşüm bağıntısının gerçel ve sanal kısımları elde edilir.

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [G(w)\cos(wt) - S(w)\sin(wt)] dw \quad (3.34)$$

[f(t) sinyalinin zaman ortamındaki çift bileşeni]

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [G(w)\sin(wt) + S(w)\cos(wt)] dw \quad (3.35)$$

[f(t) sinyalinin zaman ortamındaki tek bileşeni]

Böylece f(t) izi, tek ve çift bileşenlerine ayırabilir (bkz. bölüm 6.3).

**3.5.5** “f(t)” işlevi gerçel ise; s(t)=0 demektir. O zaman “F(w)” nin gerçel ve sanal kısımları;

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cos(wt) dt \quad (3.36)$$

$$S(w) = - \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\sin(wt) dt \quad (3.37)$$

Dırt. Tek ve çift işlev özellikleri kullanılarak;

$$G(w) = G(-w), S(w) = -S(-w), F(-w) = G(w) + jS(w)$$

olacağından (3.28) denkleminde ulaşılır.

**3.5.6** “f(t)” sanal ise; g(t)=0, f(t)=js(t) dır. Bu kez, “F(w)” nin gerçel ve sanal kısımları:

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sin(wt) dt \quad (3.38)$$

$$S(w) = - \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos(wt) dt$$

sinüs ve kosinüs işlevlerinin özelliklerinden:

$$G(-w) = -G(w), S(w) = S(w), F(-w) = -G(w) + jS(w)$$

$$F(-w) = -F^*(w) \quad (3.39)$$



elde edilir. Eğer bir işlevin FD de (3.39) özelliği varsa, işlev sanaldır.

**3.5.7** “f(t)” çift işlev ise; f(-t)=f(t), "t" ye göre, f(t)=cos(wt) çift, f(t)=sin(wt) tektir.

$$S(w)=0 \quad , \quad F(w)=G(w)=2 \int_0^{\infty} f(t)\cos(wt)dt \quad (3.40)$$

(3.40) bağıntısı, Fourier kosinüs dönüşümüdür (FCD). Bu durumda ters Fourier kosinüs dönüşüm (TFCD) bağıntısı, aşağıdaki gibidir.

$$f(t)=\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(w)\cos(wt)dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(w)\cos(wt)dw \quad (3.41)$$

**3.5.8** “f(t)” tek işlev ise; f(-t)=-f(t) olacağından (3.6.4.c) ye benzer

$$G(w)=0 \quad , \quad F(w)=-jS(w)=-2j \int_0^{\infty} f(t)\sin(wt)dt \quad (3.42)$$

yolla yazılır. (3.42) bağıntısı Fourier sinüs dönüşümüdür (FSD). Ters Fourier sinüs dönüşüm (TFSD) bağıntısı aşağıda verilmektedir.

$$f(t)=-\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(w)\sin(wt)dw = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(w)\sin(wt)dw \quad (3.43)$$

**3.5.9** “f(t)” işlevi, tek ve çift işlevlerin toplamı şeklinde ise;

f(t)=f<sub>ç</sub>(t)+ f<sub>t</sub>(t), tek ve çift işlevlerin özelliklerinden

$$f(t)=f_{\text{ç}}(t)+f_t(t)$$

$$f_t(-t)=-f_t(t) \quad , \quad f_{\text{ç}}(-t)=f_{\text{ç}}(t)$$

$$F(w)=\mathfrak{F}[f(t)]=G(w)+jS(w) \quad (3.44)$$

$$F_{\text{ç}}(w)=\mathfrak{F}[f_{\text{ç}}(t)] \quad , \quad F_t(w)=\mathfrak{F}[f_t(t)] \quad (3.45)$$

ile gösterilir. G(w)+jS(w)=F<sub>ç</sub>(w)+F<sub>t</sub>(w) olacağından,

$$F_{\text{ç}}(w)=G(w), \quad F_t(w)=jS(w) \quad (3.46)$$

elde edilir. İşlev, tek ve çift bileşenlerinin bir toplamı olarak yazılabilir. f(t)=f<sub>ç</sub>(t)+ f<sub>t</sub>(t)

$$f_{\text{ç}}(t) \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow G(w) \quad , \quad f_t(t) \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow jS(w) \quad (3.47)$$

$$G(w)=2 \int_0^{\infty} f_{\text{ç}}(t)\cos(wt)dt$$

$$S(w)=-2 \int_0^{\infty} f_t(t)\sin(wt)dt \quad (3.48)$$

$$f_c(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(w) \cos(wt) dw$$

$$f_i(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(w) \sin(wt) dw \quad (3.49)$$

Buraya dek anlatılanlar şematik olarak çizelge 3.1 de verilmiştir

Çeşitli işlevlerin zaman, frekans ortamı görünümleri şekil 3.12 dedir.

$$f(t) = f_i(t) + f_c(t) = \text{Ger}[f_i(t)] + j\text{San}[f_i(t)] + \text{Ger}[f_c(t)] + \text{San}[f_c(t)]$$

$$F(w) = F_i(w) + F_c(w) = \text{Ger}[f_i(t)] + j\text{San}[f_i(t)] + \text{Ger}[f_c(t)] + \text{San}[f_c(t)]$$

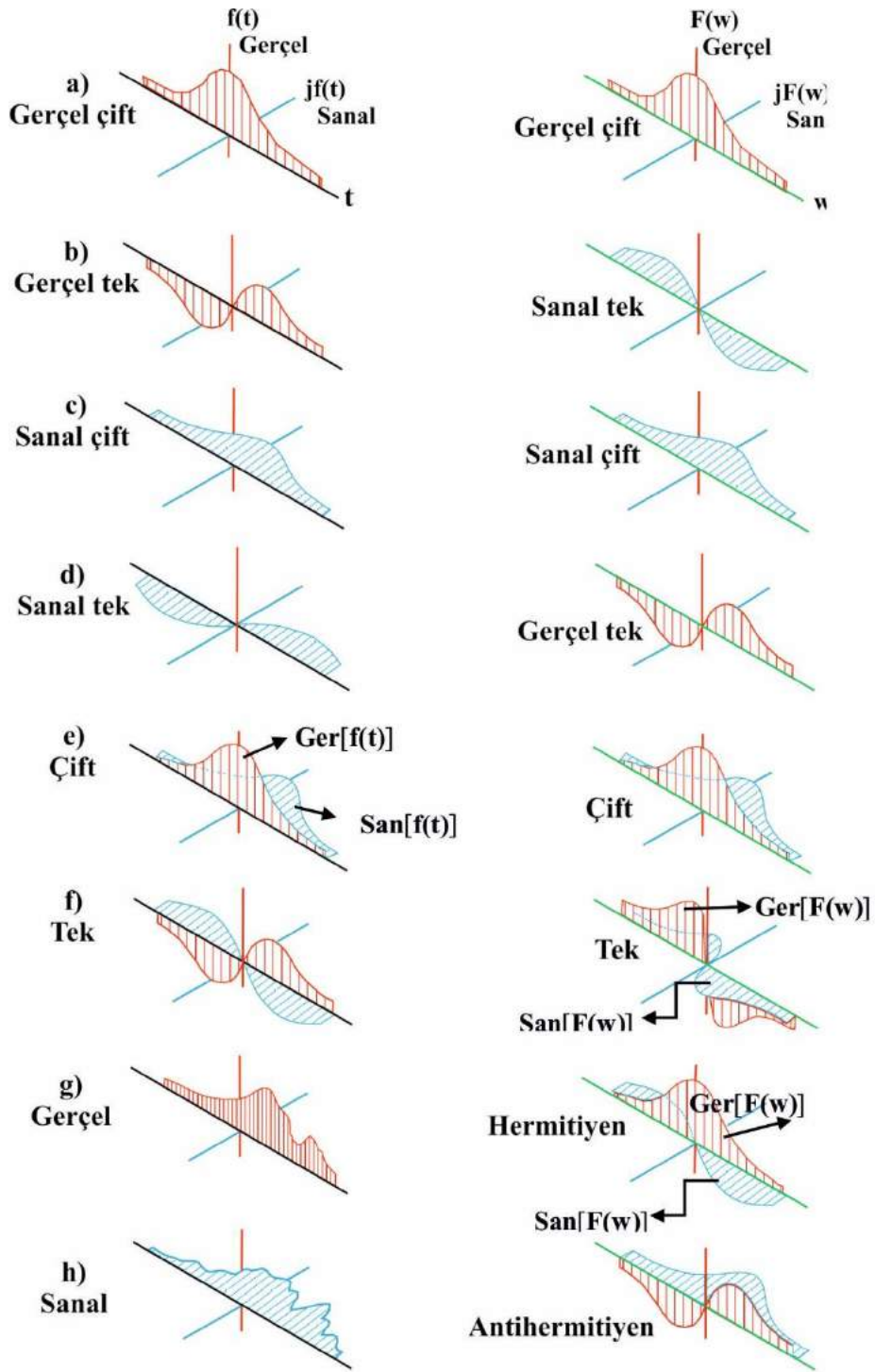
**Çizelge 3.1** Fourier Dönüşümlerinde bileşenler

Şekil 3.12 de gerçel ortamlar kırmızı, sanallar mavi, zaman eksenini siyah, frekans ortamı yeşil renkle gösterilmiştir.

Şekil 3.12.a. da, zaman ortamı verilen bir gerçel-çift işlevin (kırmızı düzlem), frekans ortamı görünümü; gerçel ve çifttir (kırmızı düzlem).

Şekil 3.12.f. de, zaman ortamında, gerçel-tek (düşey, kırmızı düzlem), ve sanal-tek (yatay, mavi düzlem) işlevlerin frekans ortamı görünümü; gerçel-tek (düşey, kırmızı düzlem), sanal-tek (yatay, mavi düzlem).

Şekil 3.12.g. de, zaman ortamında, gerçel, hem tek ve hem de çift bileşeni olan bir işlev verilmiştir (düşey, kırmızı düzlem). Bu işlevin frekans ortamı görünümü ise gerçel-çift (düşey, kırmızı düzlem) ve sanal-tek (yatay, mavi düzlem) işlevdir. Söz konusu işlev, Hermitiyen (Hermitian) olarak adlandırılır. Şekilden de anlaşılacağı gibi Hermitiyen işlevinin gerçel çift ve sanal tek bileşeni vardır. Hermitiyen işlevlerinde  $f(t) = f^*(-t)$  özelliği vardır.



Şekil 3.12 Bazı zaman ortamı işlevlerin frekans ortamı görünümleri

### 3.6. FOURIER DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ

#### 3.6.1 Doğrusallık özelliği

$a_1$  ve  $a_2$  sabit olmak üzere ve

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f_1(t)] &= F_1(w) \quad , \quad \mathfrak{F}[f_2(t)] = F_2(w) && \text{ise,} \\ \mathfrak{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] &= a_1 F_1(w) + a_2 F_2(w) && \text{dır.}\end{aligned}$$

**Kanıtlama:**

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] e^{-j\omega t} dt = a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ \text{birinci t\u00fcmlev } F_1(w), \text{ ikincisi ise } F_2(w) \text{ d\u0131r.} \\ \mathfrak{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] &= a_1 F_1(w) + a_2 F_2(w) \quad (3.50)\end{aligned}$$

#### 3.6.2 Zaman \u00f6l\u00e7kleme \u00f6zelli\u011fi

$$\mathfrak{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right) \quad (3.51)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[F(aw)] = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{t}{a}\right) \quad (3.52)$$

d\u0131r.

**Kanıtlama:**

$a > 0$  i\u00e7in  $at = x$  ve  $dt = dx$  d\u00f6n\u00fc\u015f\u00fcm\u00fc yap\u0131ls\u0131n,

$$\mathfrak{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j(w/a)x} dx$$

“x” yerine “t” konursa

$$\mathfrak{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(w/a)t} dt$$

$$\mathfrak{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right)$$

bulunur.  $a < 0$  de\u011ferleri i\u00e7in de benzer yol izlenirse,

$$\frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right) \text{ elde edilir.}$$

Sonuçta  $\mathfrak{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right)$  bulunur.

### 3.6.3 İşaret değiştirme

$\mathfrak{F}[f(t)] = F(w)$  ise,  $\mathfrak{F}[f(-t)] = F(-w)$  dir.

**Kanıtlama:**

(3.51) bağıntısında  $a = -1$  konarak

$$\mathfrak{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right) = \frac{1}{|-1|} F\left(\frac{w}{-1}\right) = F(-w)$$

$$\mathfrak{F}[f(-t)] = F(-w) \quad (3.53)$$

elde edilir.

### 3.6.4 Zaman kayma (öteleme) özelliği

$\mathfrak{F}[f(t)] = F(w)$  ise  $\mathfrak{F}[f(t-t_0)] = e^{-jw t_0} F(w)$  dir.

**Kanıtlama:**

$$\mathfrak{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0) e^{-jw t} dt$$

bağıntısında  $t-t_0=x$ ,  $t=x+t_0$  ve  $dt=dx$  dönüşümleri yapılırsa:

$$\mathfrak{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jw(t_0+x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jw t_0} e^{-jw x} dx = e^{-jw t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jw x} dx$$

son bağıntıdaki tümlev  $F(w)$  ya eşittir. Buradan da

$$\mathfrak{F}[f(t-t_0)] = e^{-jw t_0} F(w) \quad (3.54)$$

sonucuna ulaşılır.

### 3.6.5 Frekans kayma(öteleme) özelliği

$F(w) = \mathfrak{F}[f(t)]$  ise  $\mathfrak{F}[f(t)e^{jw_0 t}] = F(w-w_0)$  dir.

**Kanıtlama:**

$$\mathfrak{F}[f(t)e^{jw_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)e^{jw_0 t}] e^{-jw t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{[-jt(w-w_0)]} dt$$

tümlev  $F(w-w_0)$  a eşittir.

$$\mathfrak{F}[f(t)e^{jw_0 t}] = F(w-w_0) \quad (3.55)$$

Benzer yoldan gidilerek te

$$\mathfrak{F}[f(t)e^{-jw_0t}] = F(w + w_0) \quad (3.56)$$

yazılabilir.

### 3.6.6 Bakışım (simetri) özelliği

$F(w) = \mathfrak{F}[f(t)]$  ise  $\mathfrak{F}[F(t)] = 2\pi f(-w)$  dır.

**Kanıtlama:**

Ters Fourier dönüşüm (TFD) bağıntısı  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{jw_0t} dw$  dır.

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{jw_0t} dw \quad \Rightarrow t = -t \text{ konulursa}$$

elde edilir.

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{-jw_0t} dw$$

“t”, “w” ile yer değiştirilirse,

$$2\pi f(-w) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{-jw_0t} dt = \mathfrak{F}[F(t)]$$

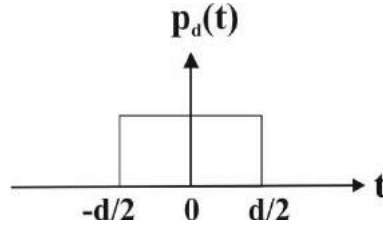
bulunur. Birçok sinyalin, zaman ve frekans ortamı görünümleri, denklemleri Ek2 de verilmektedir.

### Örnek 3.6

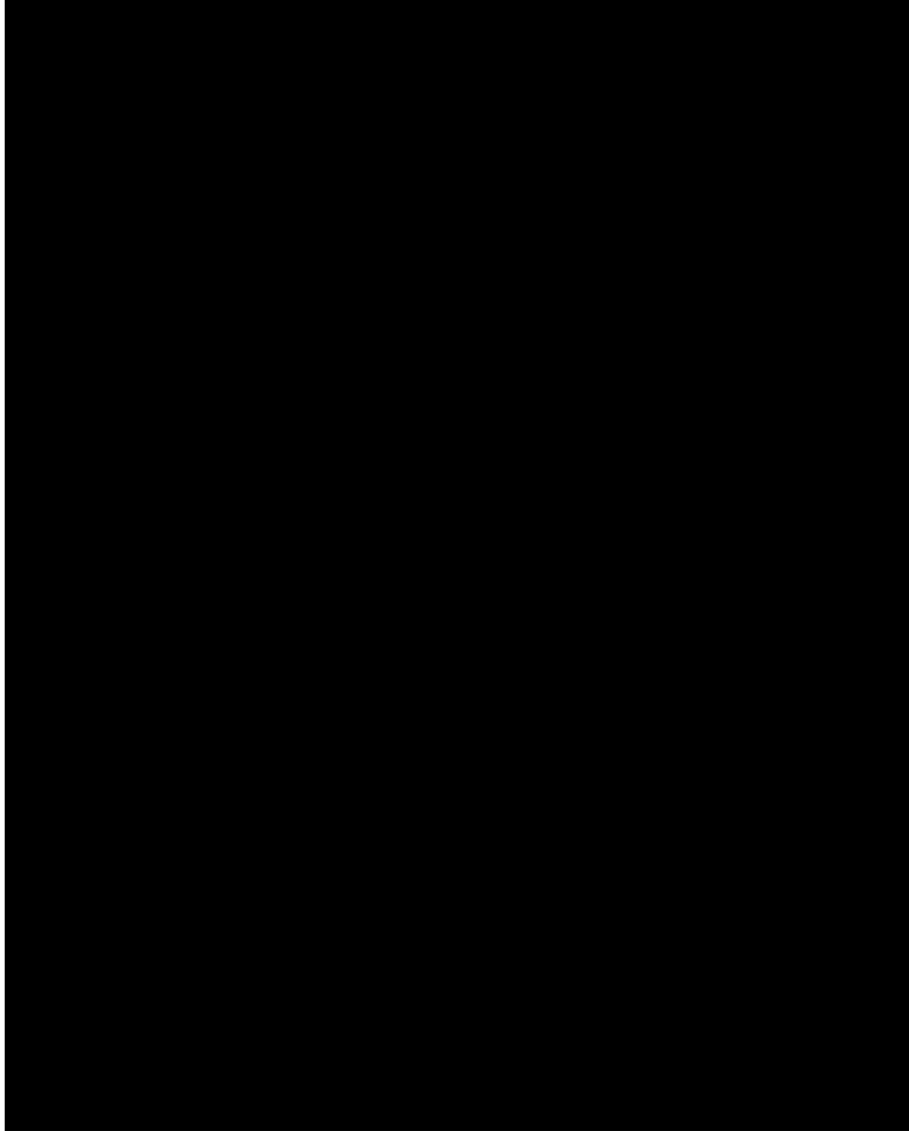
Aşağıda tanımını verilen “d” uzunluklu dikdörtgen dalganın (Şekil 3.13) FD nü bulunuz.

$$P_d(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{d}{2} \\ 0 & |t| > \frac{d}{2} \end{cases}$$

**Çözüm**



Şekil 3.13 Sınırlı dikdörtgen dalga

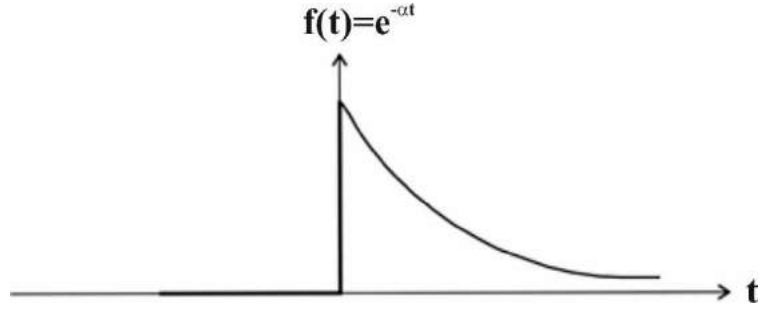


**Şekil 3.14**  $T=d$  genişlikli dikdörtgen dalğanın spektrumu/genlik spektrumu (düz “ $|F(w)|$ ”, kesikli “ $F(w)$ ”yı göstermektedir).

**Örnek 3.7**

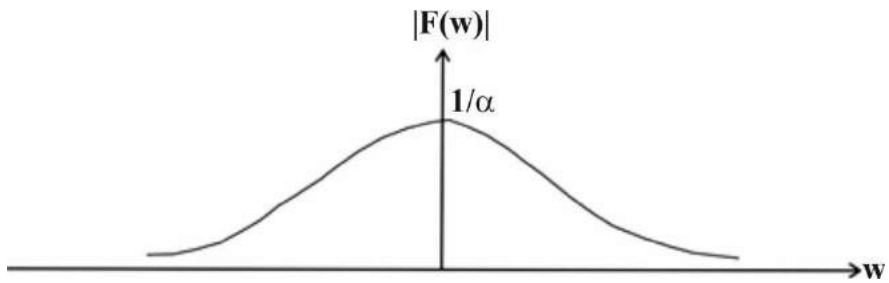
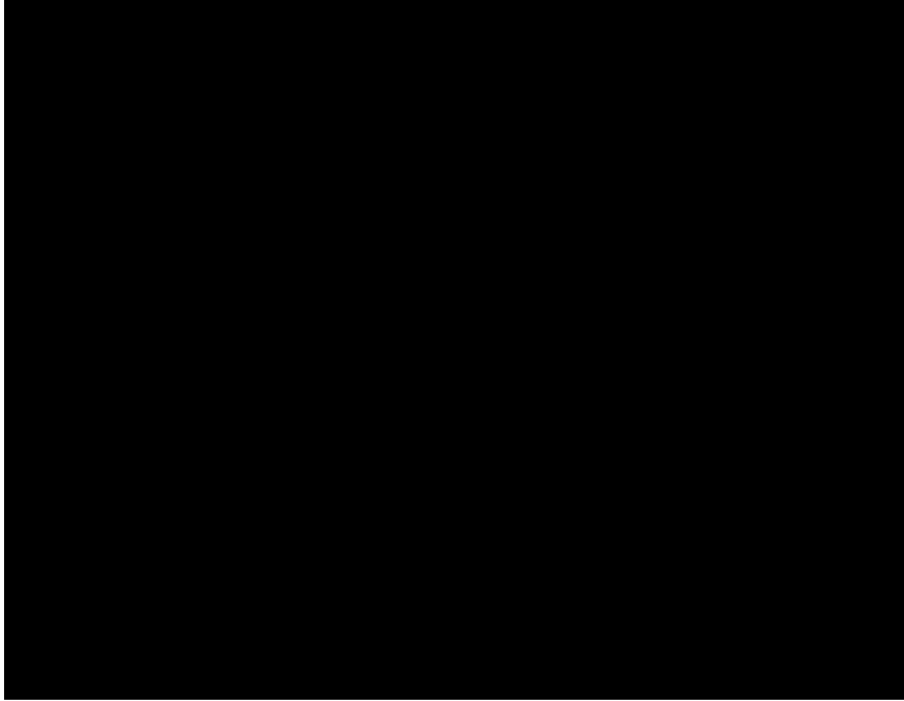
Şekil 3.15 de verilen  $f(t)$  işlevinin FD nü bulunuz.

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Şekil 3.15 Tanımı verilen  $f(t)$  işlevi

**Çözüm**



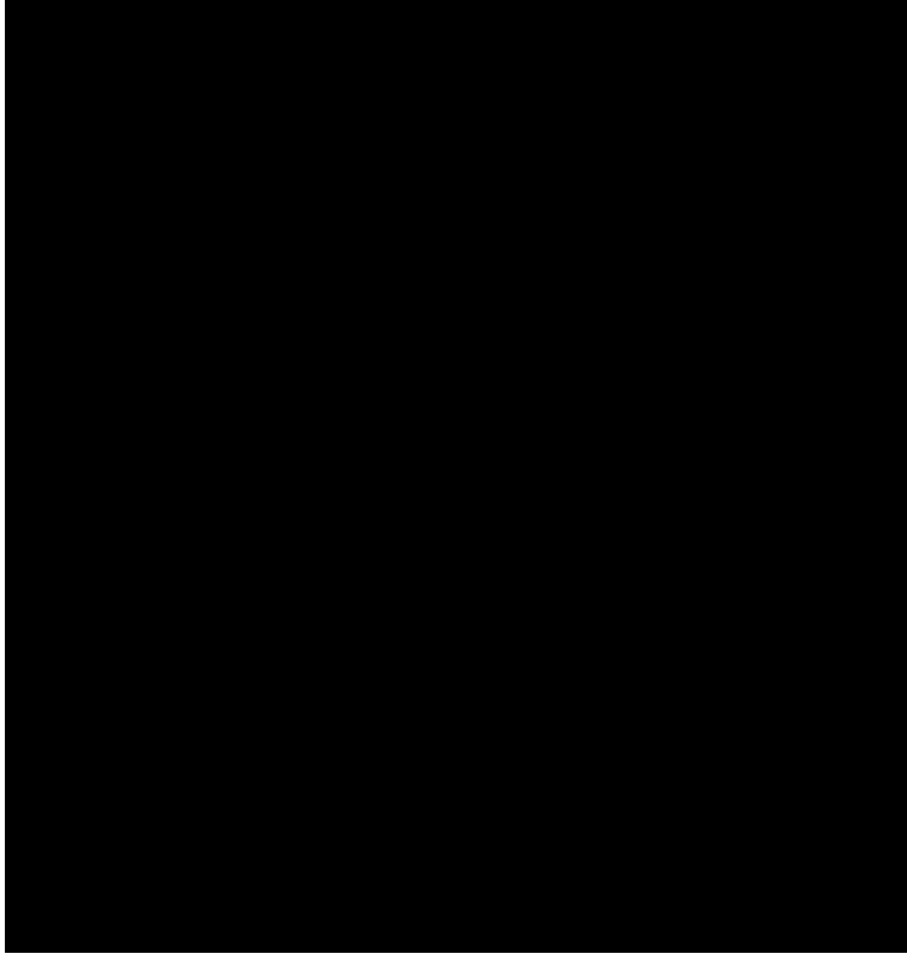
Şekil 3.16  $e^{-\alpha t}$  işlevinin genlik spektrumu



### **Örnek 3.8**

$e^{-\alpha t}$  işlevinin FCD ve FSD nü ( $\alpha > 0, t > 0$ ) bulunuz

### **Çözüm**

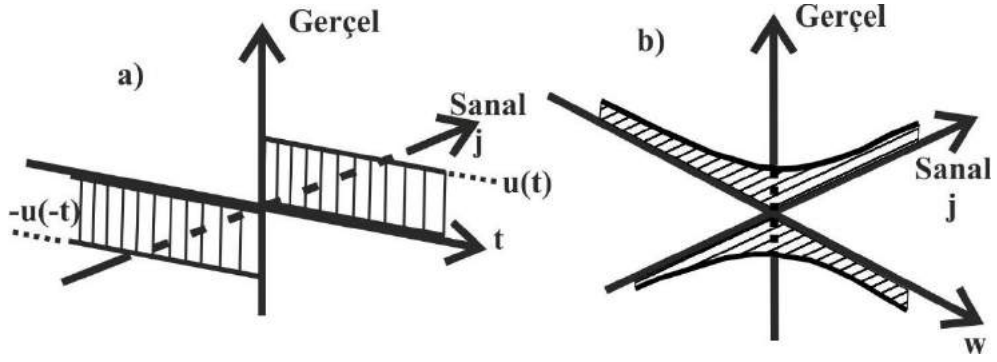


dır. Genlik spektrumu ise Örnek 3.6 daki gibi bulunur (şekil 3.16).

### **Örnek 3.9**

$x(t)=\text{sgn}(t)$  signum işlevinin (Şekil 3.17) FD nü bulunuz.

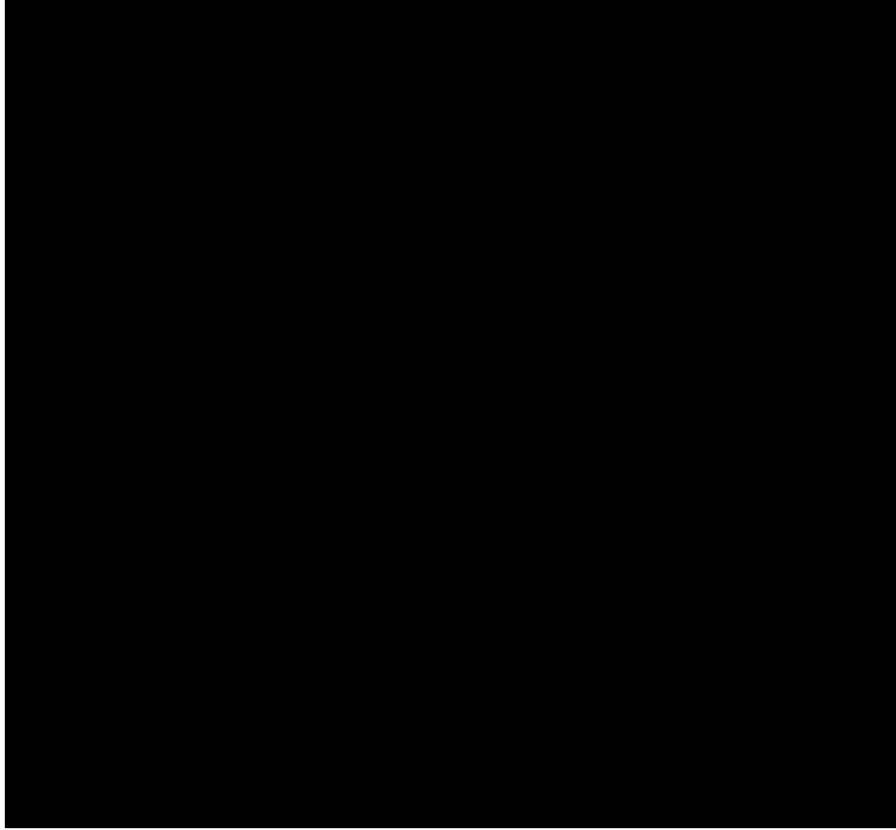
$$\mathfrak{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega} = \frac{1}{j\pi f}$$



**Şekil 3.17** Signum işlevi ve FD. **a)** “ $t$ ” ortamında tanımlı, gerçel signum işlevi (3.57 bağıntısı) **b)** Signum işlevinin FD. (sanal)

### Çözüm

“ $\text{sgn}(t)$ ” işlevinin kolları  $\infty$ 'a gittiğinde Dirichlet koşullarını sağlamaz (enerjisi sonsuzdur). Bundan dolayı limit kullanılarak FD alınır.



olarak bulunur(Bölüm 6.3 te Hilbert dönüşümlerinde kullanılacak).

### Örnek 3.10

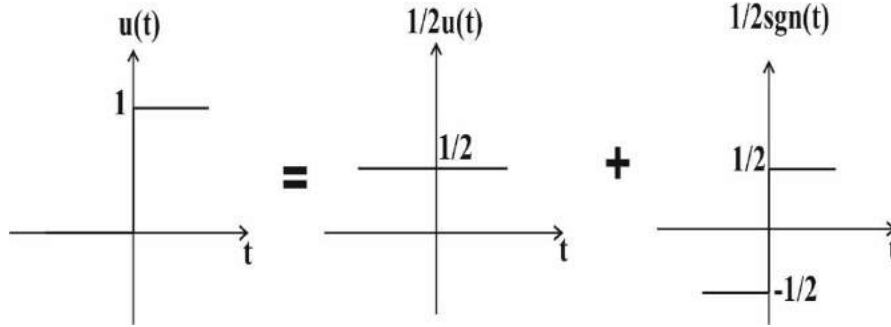
Birim basamak (Heaviside's unit step function) işlevinin FD. nü bulunuz.

“ $u(t)$ ” birim basamak işlevidir (şekil 3.10). Tanım aralığı,

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \text{ olarak verilir.}$$

### Çözüm

Birim basamak işlevi aşağıdaki şekil 3.18 deki gibi parçalanabilir.



Şekil 3.18 Birim basamak işlevinin parçalanarak signum işlevine dönüştürülmesi

Bu koşulda, birim basamak işlevi aşağıdaki gibi yazılır.

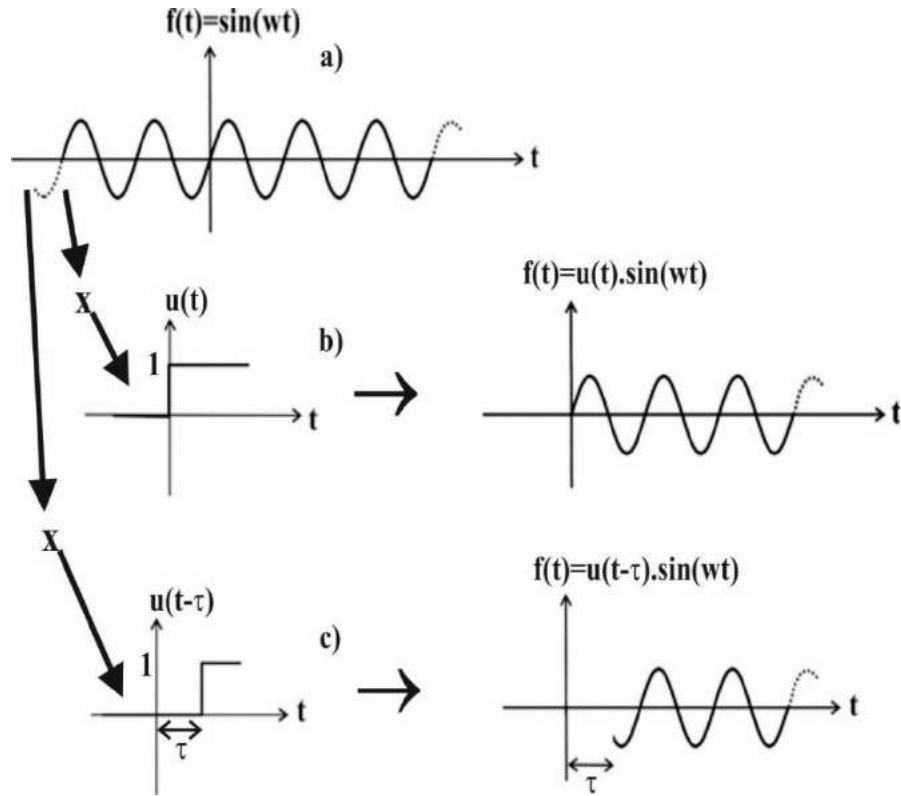
$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t)$$

(3.59)

Örnek 3.8 den yararlanılarak aşağıdaki çözüm yapılır.

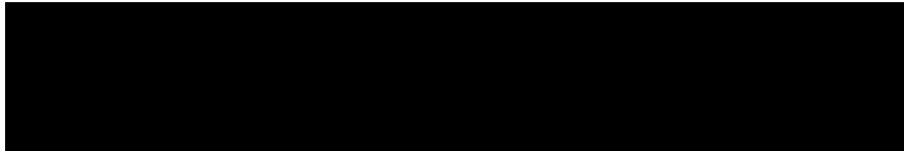


Şekil 3.19 da sonsuz uzunluklu bir sinüs izine birim basamak uygulanması verilmiştir. Birim basamak işlevinin sıfırdan önce geçmişi olmadığından, sinüs işlevinin “ $-\infty,0$ ” aralığında geçmişi kalmamıştır (şekil 3.19.b). Şekil 3.19.c de ise, “+” yönde, “ $\tau$ ” kadar ötelenmiş basamak işlevi görülmektedir. Dolayısıyla “ $+\tau$ ” dan önceki geçmişi silinmiştir.



Şekil 3.19 a) sinüs işlevi b) birim basamağın sinüs işlevine uygulanması

c) “ $\tau$ ” gecikmeli birim basamağın sinüs işlevine uygulanması 
$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$



Şekil 3.20 Birim basamak işlevinin ölçeklemesi ve kaydırılması

### Örnek 3.11

$f(t) = u(t) \frac{\sin(at)}{t}$  işlevinin FD nü, işlevi tek ve çift kısımlarına ayırarak bulunuz. Genlik ve evre spektrumunu hesaplayarak çiziniz.

#### **Çözüm**

Birim basamak işlevine ait çözümler ve şekli örnek 3.9 da verilmiştir.

$$f_c(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)]$$

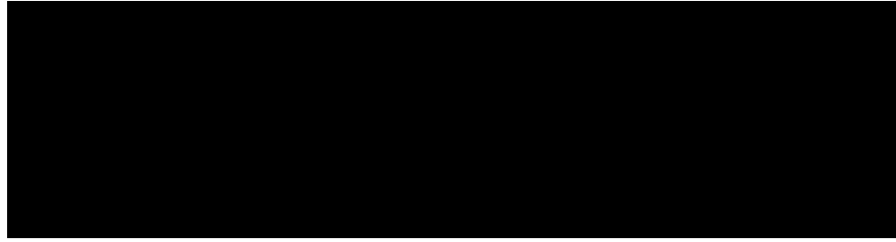
$$f_t(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]$$

$$f_c(t) = \frac{1}{2} \left[ u(t) \frac{\sin(at)}{t} + u(-t) \frac{\sin(-at)}{-t} \right] \Rightarrow f_c(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin(at)}{t} [u(t) + u(-t)]$$

$$f_t(t) = \frac{1}{2} \left[ u(t) \frac{\sin(at)}{t} - u(-t) \frac{\sin(-at)}{-t} \right] \Rightarrow f_t(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin(at)}{t} [u(t) - u(-t)]$$

---

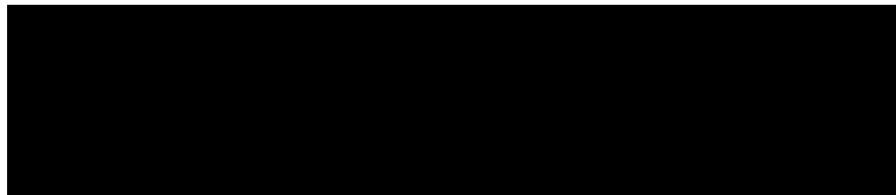
**Not:** Tek ve çift işlevlere ait özelliklerden (Bölüm 3.6.e ve 3.44 denklemleri) yararlanılır. Eğer  $f(t)$ ,  $t$ ' nin çift işlevi ise (3.36) bağıntısından,



---

(3.50, 3.51) denklemlerinden aşağıdaki bağıntılara ulaşılır.

$$G(w) = F_c(w) = \mathfrak{F}[f_c(t)], \quad S(w) = F_t(w) = \mathfrak{F}[f_t(t)]$$



---

**Not:**  $\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

---

bulunur.  $G(w)$  ve  $S(w)$  kullanılarak  $|F(w)|$ ,  $\arg[F(w)]=\Phi(w)$  genlik ve evre spektrumları elde edilir.  $f(t)$ ,  $f_c(t)$ ,  $f_i(t)$  ve elde edilen gerçel ve sanal kısımlara ait spektrumlar şekil 3.21 de verilmektedir.

### **Örnek 3.12**

$f(t)=\cos(w_0t)$  işlevinin FD nü bulunuz.

#### ***Çözüm***

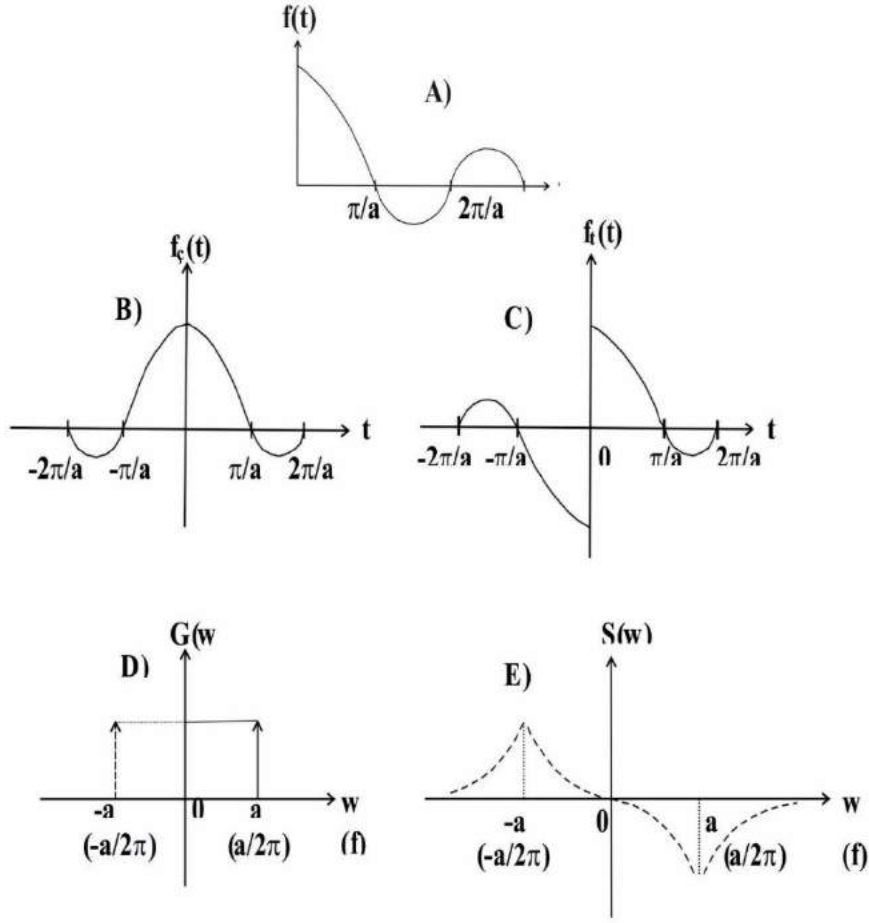
$$\cos(w_0t) = \frac{1}{2}(e^{jw_0t} + e^{-jw_0t})$$

$$\mathfrak{F}[\cos(w_0t)] = \frac{1}{2}\mathfrak{F}(e^{jw_0t}) + \frac{1}{2}\mathfrak{F}(e^{-jw_0t})$$

(5.24) denkleminde,

$$\mathfrak{F}[\cos(w_0t)] = \pi \delta(w + w_0) + \pi \delta(w - w_0)$$

$$\mathfrak{F}[\cos(w_0t)] = \pi [\delta(w + w_0) + \delta(w - w_0)]$$



Şekil 3.21 A) Verilen işlev B) çift bileşeni C) tek bileşeni D) gerçel kısmının spektrumu E) sanal kısmının spektrumu

### Örnek 3.13

$F(w) = \mathfrak{F}[f(t)]$  ise “ $f(t) \cdot \cos(w_0 t)$ ” nin FD nü bulunuz.

#### Çözüm

$$\cos(w_0 t) = \frac{1}{2} (e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}) \quad \text{dır.}$$

$$\mathfrak{F}[f(t) \cos(w_0 t)] = \mathfrak{F} \left\{ \left[ \frac{1}{2} e^{jw_0 t} + \frac{1}{2} e^{-jw_0 t} \right] f(t) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \mathfrak{F}[f(t)e^{jw_0t}] + \frac{1}{2} \mathfrak{F}[f(t)e^{-jw_0t}]$$

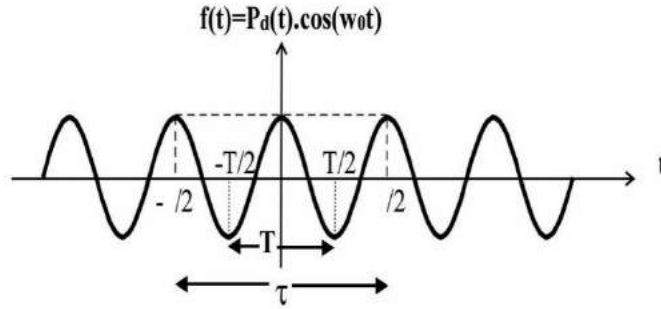
(3.73) ve (3.74) bağıntılarından;

$$\mathfrak{F}[f(t)\cos(w_0t)] = \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0) \quad (3.61)$$

Yazılabilir (frekans ekseninde “+” ve “-“ yönde ötelenmiş dürtüler).

### Örnek 3.14

Zaman ortamında, sonsuz boylu, “T” dönemli kosinüs işlevi, “ $\tau$ ” boyunda bir dikdörtgen pencere ile kesilmektedir. Pencerelemiş izin FD. nü (Şekil 3.22) bulunuz.



Şekil 3.22 Sonsuz boylu kosinüs dalgasının, “T” boyunda bir dikdörtgen pencere ile pencerelenerek zaman ortamının görünümü

### Çözüm

$f(t)=\cos(w_0t)$  işlevini, işlevin dönemi uzunluğundaki “ $\tau$ ” bir boya sahip dikdörtgen pencere işlevi kullanarak sınırlayalım.

$$P_d(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

Dikdörtgen pencerenin FD, Örnek 3.6 da bulunmuştu.

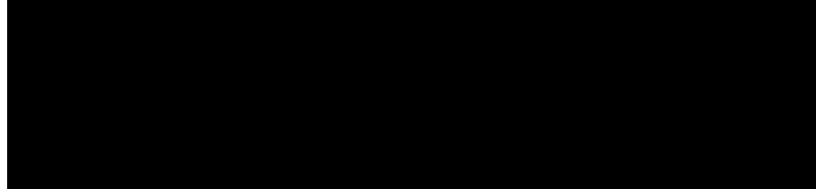
(3.75) bağıntısında  $f(t)=P_d(t)$  konarak

$$\mathfrak{F}[P_d(t)\cos(w_0t)] = \frac{1}{2} \mathfrak{F}[P_d(t)e^{jw_0t}] + \frac{1}{2} \mathfrak{F}[P_d(t)e^{-jw_0t}] \quad (3.62)$$



elde edilir. Son denklemde iki önemli etken vardır.

- Dikdörtgen pencereden gelen "sinc" işlevi:



- Trigonometrik işlevden gelen "w<sub>0</sub>" lar:



### **Örnek 3.15**

"+" ve "-" yönde "t<sub>0</sub>" kadar ötelenmiş aynı bir dalgacığın toplamlarının ve farklarının spektrumunu bulunuz.

### ***Çözüm***

$$\mathfrak{F}[f(t-t_0) + f(t+t_0)] = \mathfrak{F}[f(t-t_0)] + \mathfrak{F}[f(t+t_0)]$$

$$\mathfrak{F}[f(t \pm t_0)] = F(w)e^{\pm jw t_0}$$

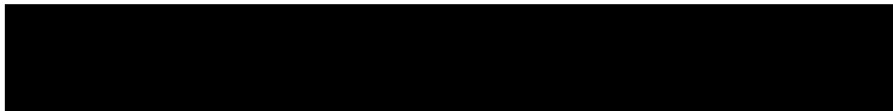
$$e^{-jw t_0} = \cos(w t_0) - j \sin(w t_0)$$

$$e^{jw t_0} = \cos(w t_0) + j \sin(w t_0)$$

---

$$e^{-jw t_0} + e^{jw t_0} = 2 \cos(w t_0)$$

$$e^{-jw t_0} - e^{jw t_0} = 2j \sin(w t_0)$$



### **Örnek 3.16**

$$f(t) = e^{-\alpha t} \quad , \quad F(w) = \mathfrak{F}[f(t)] = F(w) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + w^2}$$

bağıntıları bilindiğine göre (örnek 3.7);

$$f(t) = \frac{1}{\alpha^2 + t^2} \quad \text{nin FD nü bulunuz.}$$

**Çözüm**

$$F(w) = \mathfrak{F}[f(t)] = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\alpha^2 + t^2}\right) = ?$$

Bakışım özelliği;

$$\mathfrak{F}[F(w \rightarrow t)] = 2\pi f(t \rightarrow -w)$$

$$F(w) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + w^2} \rightarrow F(w \rightarrow t) = F(t) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2}$$

$$f(t) = e^{-\alpha t} \rightarrow f(t \rightarrow -w) = f(-w) = e^{\alpha w}$$

dir. Bu bağıntılar bakışım özelliğinde yerine yazılırsa,



**Örnek 3.17**

Bir dikdörtgen pencerenin zaman ve frekans ortamı bağıntıları (bkz örnek 3.5) aşağıda verilmektedir.

$$P_d(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \quad (3.63)$$

$$\mathfrak{F}[P_d(t)] = \frac{2}{w} \sin\left(\frac{wT}{2}\right) \quad (3.64)$$

Bağıntıları bilindiğine göre;

$$f(t) = \frac{\sin(at)}{\pi} \quad (3.65)$$

işlevinin FD. nü bakışım özelliğini kullanarak bulunuz.

### Çözüm

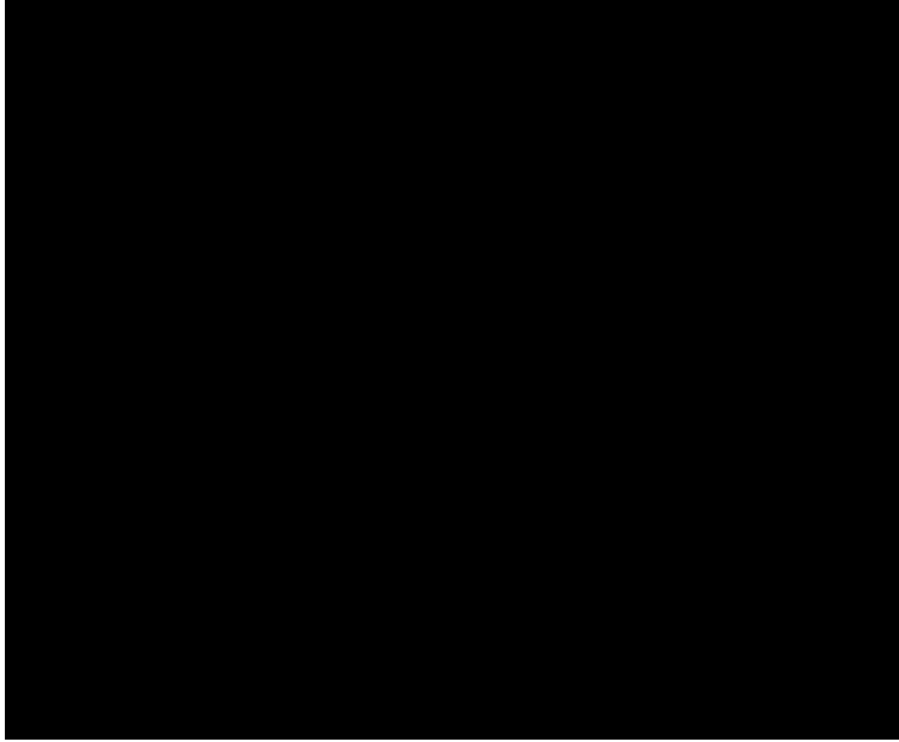
(3.65) de verilen işlev (3.65) bağıntısına (Fourier dönüşüm çifti bilinen bağıntılardan frekans ortamındaki olanına) benzetilmeye çalışılır. (3.65) bağıntısında  $a=d/2$  konulursa

$$f(t) = \frac{1}{\pi t} \sin\left(\frac{dt}{2}\right) \quad (3.66)$$

katsayılar dışında (3.66) bağıntısı [dolayısı ile (3.65)] ile (3.64) bağıntıları birbirlerine benzemektedir. Tek fark (3.66) bağıntısı zaman, (3.64) bağıntısı ise frekans ortamındadır. FD nün bakışım özelliği ise;

$$\mathfrak{F}[F(w \rightarrow t)] = 2\pi f(t \rightarrow -w)$$

dir. Bakışım özelliğinin 1. kısmını oluşturalım. Bunun için (3.64) bağıntısında;



tanımından dolayı  $P_d(-w)$  çift işlev olduğundan,  $P_d(-w) = P_d(w)$  yazılabilir.



bağıntılarında  $d=2a$  koyarak;



elde edilir.  $P_{2a}(w)$  ise (3.68) denkleminde verilmektedir.

### **Örnek 3.18**

$f(t)=\text{sgn}(t)$  işlevinin FD.,  $F(w)=2/jw$  olarak bilinmektedir. Bakışım özelliğini kullanarak, işlevinin FD. nü bulunuz.

#### ***Çözüm***

FD. nün bakışım özelliği

$\mathfrak{F}[F(w) \rightarrow t] = 2\pi f(t \rightarrow -w)$  olarak özetlenebilir.



### **Örnek 3.19**

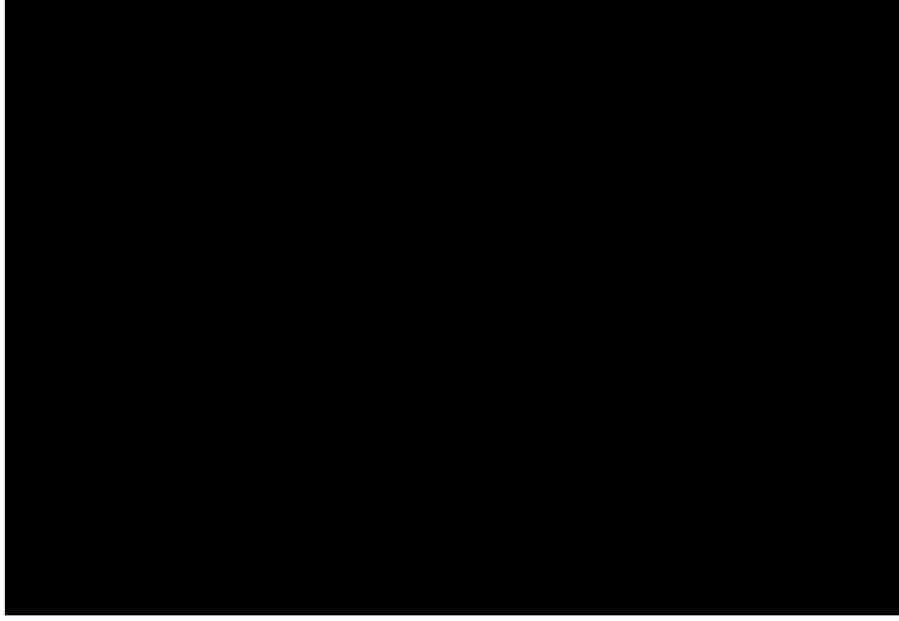
Aşağıda verilen işlevin

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

a) Genlik spektrumunu,

b) evre spektrumunu frekans ortami 6 devir/veri aralığı ile 6 devir/veri aralığına kadar hesaplayarak çiziniz.

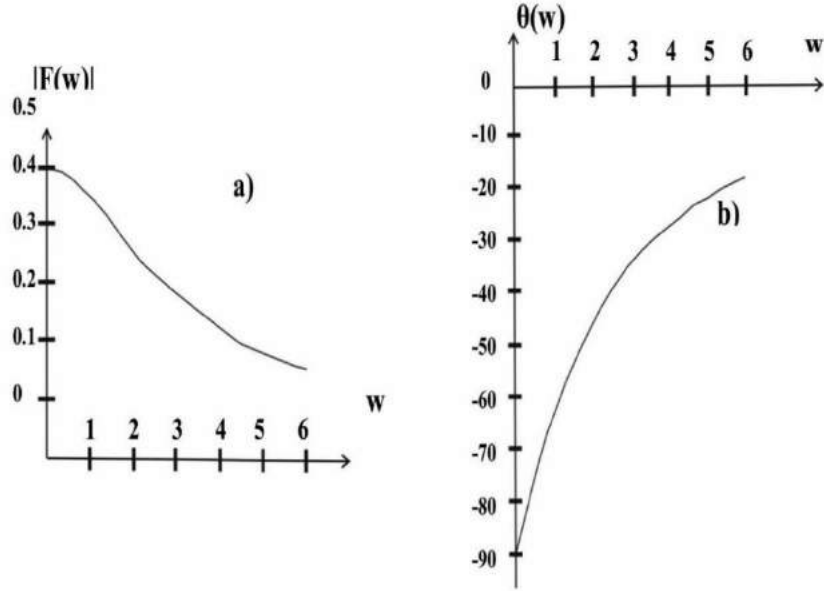
### Çözüm



Genlik ve vere spektrumları çizelge 3.2 ve şekil 3.23 te verilmektedir.

w (devir/veri aralığı)	0	1	2	3	4	5	6
F(w)	0.50	0.45	0.35	0.28	0.22	0.19	0.16
Φ(w) (derece)	-90	-63	-45	-34	-27	-22	-18

Çizelge 3.2 Genlik ve evre spektumları



**Şekil 3.23** Verilen işlevin **a)** genlik spektrumu, **b)** evre spektrumu (evre doğrusal değişmediği için, her frekans bileşeni ayrı ayrı etkilenmektedir).

**Örnek 3.20**

$\mathfrak{F}[\sin^5(w_0t)] = ?$

**Not:**

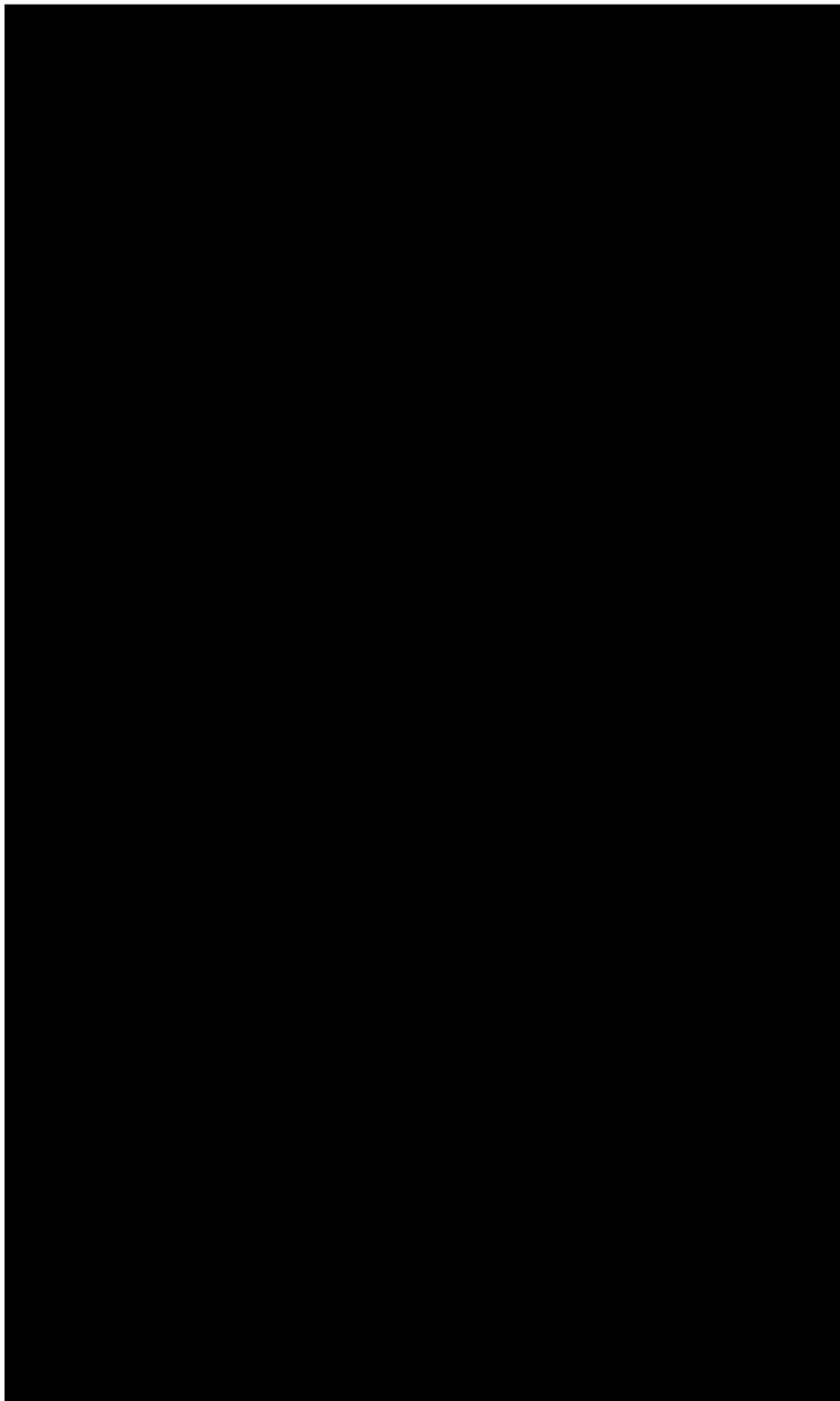
- Öncelikle, 2.18 örneğinden yararlanınız.
- 3.7.15 te verilen Euler açılımını, dürtü işlevinin özelliklerini ve Binom açılımını kullanınız.

Binom açılımını örnek 2.18 de verilmiştir.

**Çözüm**

$$\mathfrak{F}[\sin(w_0t)] = \frac{1}{2j} \mathfrak{F}[e^{jw_0t}] - \frac{1}{2j} \mathfrak{F}[e^{-jw_0t}]$$





### Örnek 3.21

$$\int_0^{\infty} f(t) \cos(wt) dt = \begin{cases} 1-w & 0 \leq w < 1 \\ 0 & w > 1 \end{cases} \text{ çözüünüz.}$$

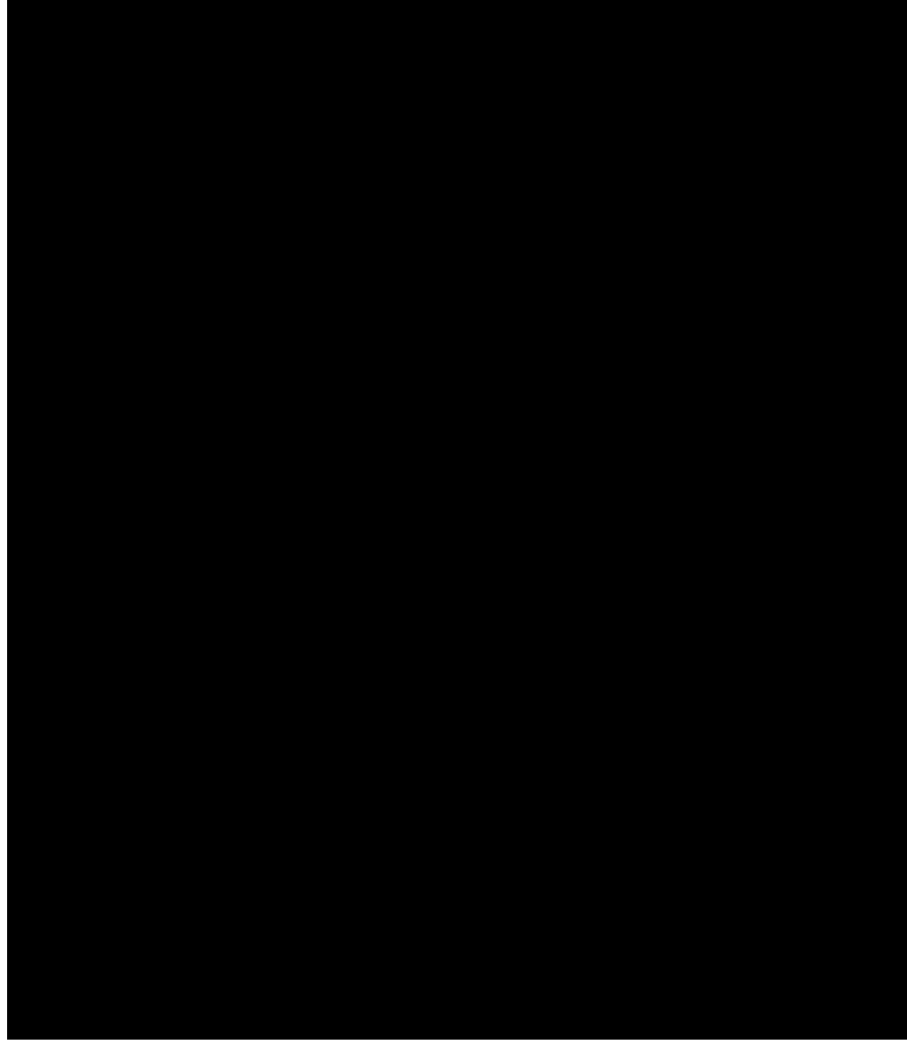
### Çözüm

---

**Not:** TFCD  $f_c(t) = \mathfrak{S}^{-1}[F(w)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(w) \cos(wt) dt$

---

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-w) \cos(wt) dw \quad \text{Kısmi tümler kullanılarak}$$



elde edilir.



## EK1

### EK 2 DE KULLANILAN SİMGELER

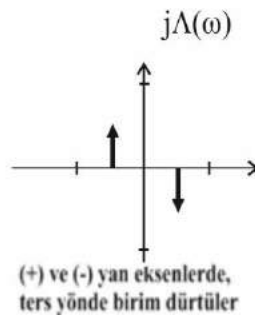
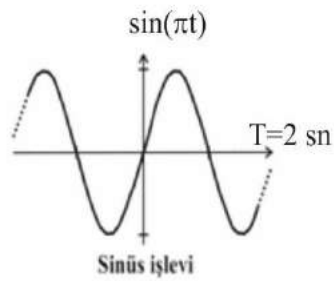
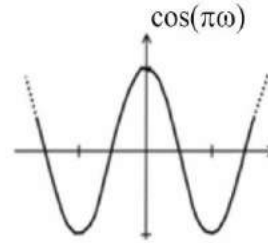
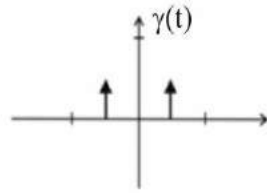
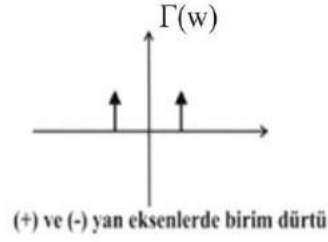
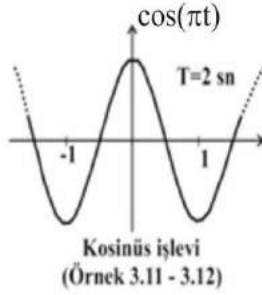
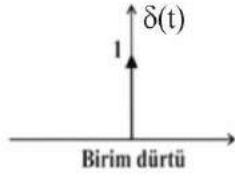
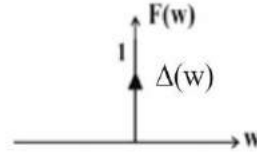
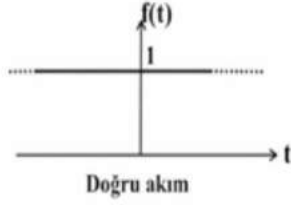
- Sanal ortama ait eksen “ $jF(w)$ ” ve sanal ortam işlevi mavi renk ile gösterilmiştir.
- Gerçek ortama ait eksen “ $F(w)$ ” ve gerçek ortam işlevi siyah renk ile gösterilmiştir.
- Hem gerçek ve hem de sanal kısımları içeren işlev, aynı düşey eksen üzerinde, mavi ve siyah renklerle gösterilmiştir.
- Özel işlevler ise Latin harfler ile gösterilmiştir. Zaman ortamı küçük, frekans ortamı ise büyük harflerle belirtilmiştir.

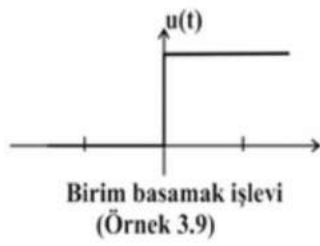
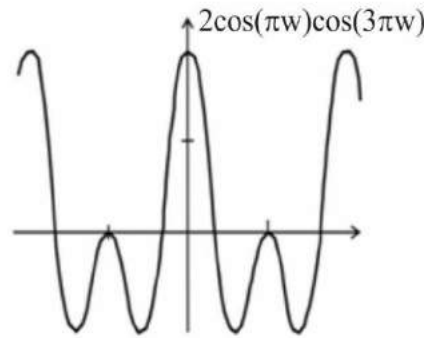
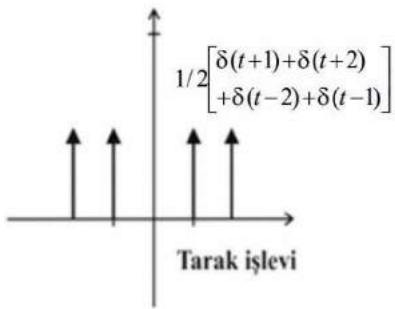
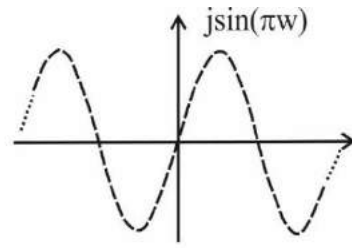
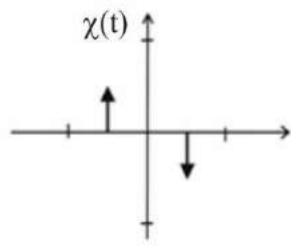
TANIM	ZAMAN ORTAMI (t)	FREKANS ORTAMI (w)	OKUMA
Birim dürtü (tek yan bantlı)	$\delta$	$\Delta$	delta
Birim dürtü (çift yan bantlı, aynı yönlü)	$\gamma$	$\Gamma$	gamma
Birim dürtü (çift yan bantlı, ters yönlü)	$\lambda$	$\Lambda$	lambda
Dikdörtgen dalga	dd	DD	

**EK2 BAZI İŞLEVLERİN İKİ ORTAM GÖRÜNÜMLERİ**  
(Kesikli çizgiler sanal bileşendir.)

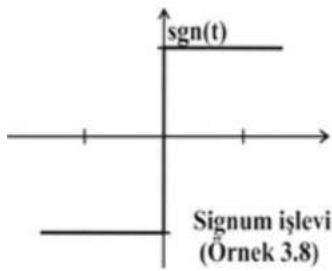
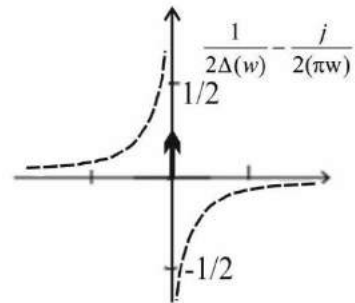
**ZAMAN ORTAMI (sn)**

**FREKANS ORTAMI (devir/veri aralığı)**

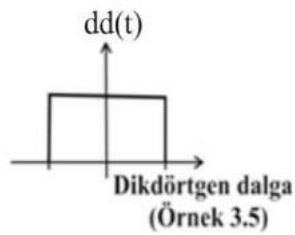
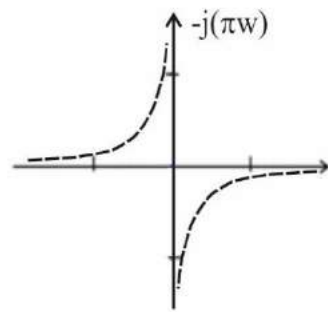




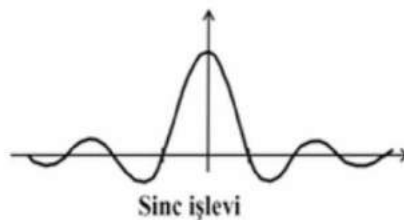
Birim basamak işlevi  
(Örnek 3.9)

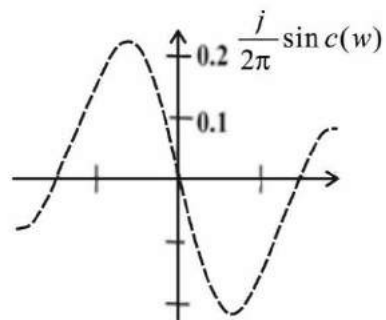
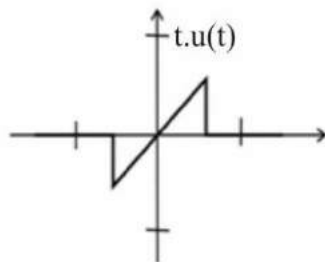
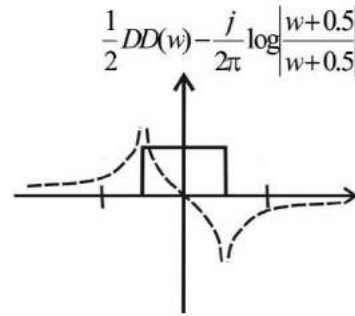
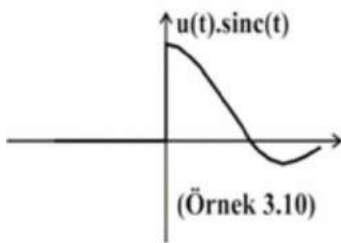
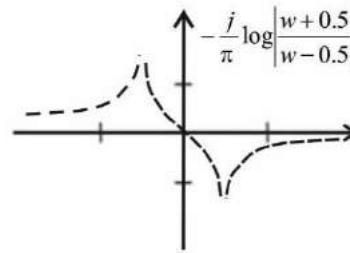
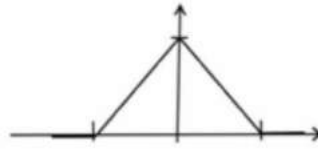
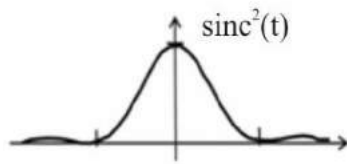
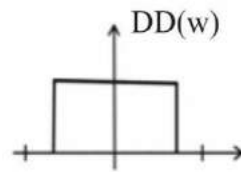
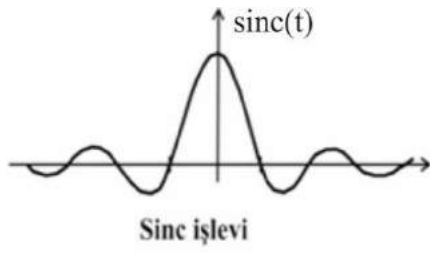


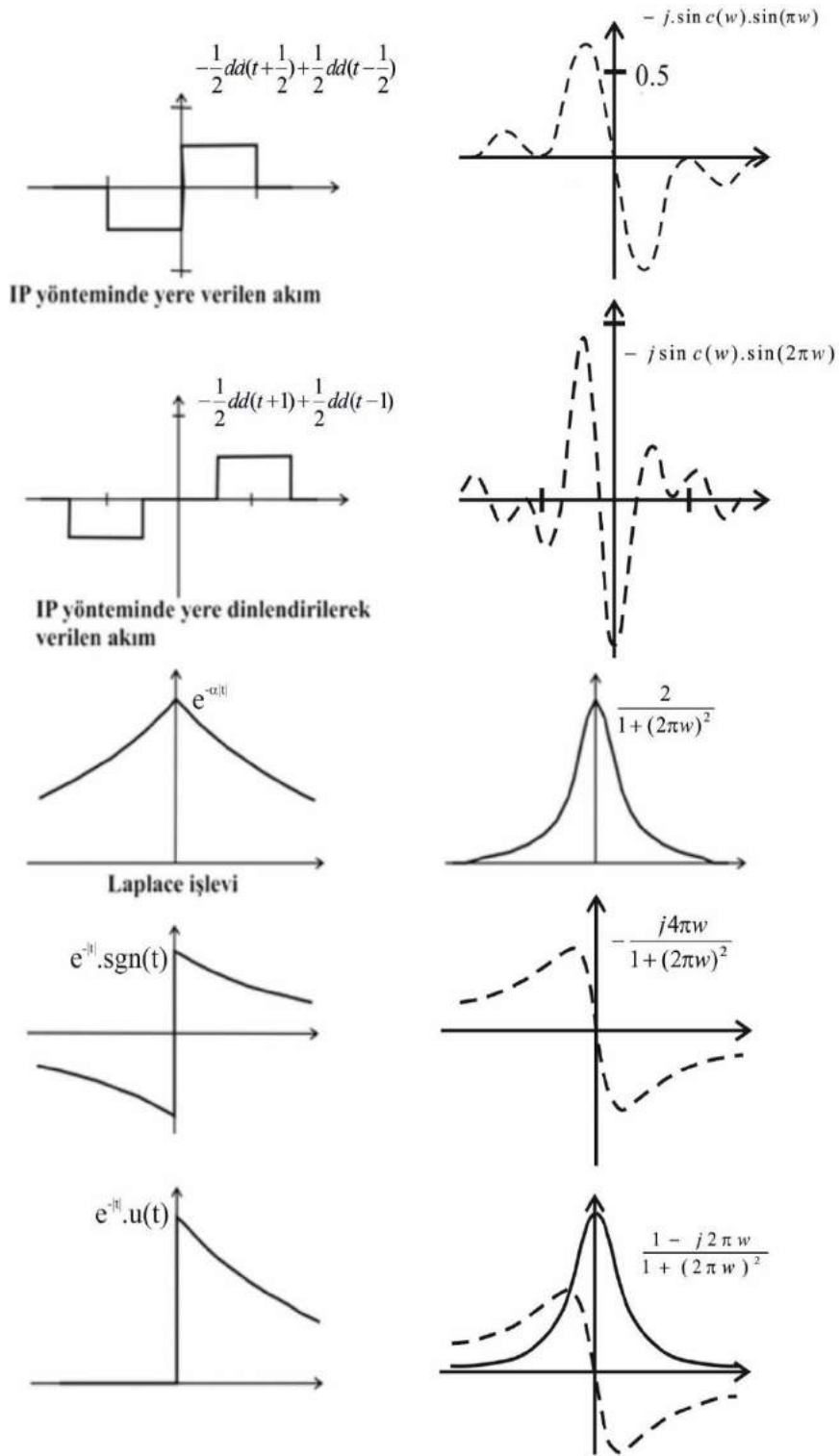
Signum işlevi  
(Örnek 3.8)



Dikdörtgen dalga  
(Örnek 3.5)







## ÖDEVLER

1. Aşağıdaki sinyalleri güç ve enerji açısından sınıflayınız.

a)  $f(t)=e^{-5|t|}$     b)  $f(t)=5\cos(\omega t)$ ,  $\omega=2\pi/T$     c)  $f(t)=5tu(t)$

2.  $f(t)=e^{-\alpha t}$  işlevinin Fourier kosinüs dönüşümünü bulunuz ( $\alpha>0$ ).

3. Gauss işlevi olarak verilmektedir. Bu işlevin FD nü bulunuz.

$$4. f(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t) & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

işlevinin FD nü hesaplayarak spektrumunu çiziniz.

## KAYNAKÇA

1965 Dr. Ron BRACEWELL "The Fourier Transform and Its Application"

Lee (1967) "Statistical Theory of Communication"

Rabiner ve Gold (1975) "Theory and Application of Digital Signal Processing"

Markus Bath (1974) "Spectral Analysis in Geophysics",

Jhon F. Claerbout (1976) "Fundamentals of Geophysical Data Processing With applications to Petroleum Prospecting"

E. R. Kanassewich (1974) "Time Sequence Analysis in Geophysics"

Nezihi Canitez (1978), "Matematiksel Jeoloji", KTÜ yayınları, Trabzon

Nezihi Canitez, Uğur Yaramancı, Hüseyin Özdemir (1987) Editörlüğünde TMMOB Jeofizik Mühendisleri Odası, Ankara

Nezihi Canitez (1984), "Jeofizikte Veri – İşlem", İTÜ Maden Fakültesi yayınları

Rahmi Pınar ve Zafer Akçığ (1995), "Jeofizikte Sinyal Kuramı ve Dönüşümler", TMMOB Jeofizik Mühendisleri Odası Eğitim yayınları 3, Ankara

Ahmet T. Başokur, (2007) "Spektral Analiz ve Sayısal Süzgeçler", TMMOB Jeofizik Mühendisleri Odası Eğitim yayınları 8, Ankara

Dobrin, M.B., (1960), Introduction To Geophysical Prospecting, McGraw-Hill Book Company, New York



*Prof. Dr. Nezih Canitez  
(1932 - 1994)*

27 Aralık 1931 tarihinde Denizli’de doğan Nezih CANITEZ, ilkokulu Denizlide, ortaokulu Kadıköy Yeldeğirmeni Ortaokulunda, lise eğitimini de Haydarpaşa Lisesi’nde tamamlamıştır. 1958 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Jeofizik Enstitüsünü bitirdi. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Maden Fakültesi Jeofizik Kürsüsü’nde asistan olarak akademik yaşantısına başladı. 1962 yılında “Gravite Anomalileri ve Sismolojiye göre Kuzey Anadolu’da arz kabuğunun yapısı” adlı çalışmasıyla Bilim Doktoru derecesini aldı. Daoktaora çalışmasında, yer kabuğunun Orta Anadolu’dan Karadeniz’e doğru incelendiğini gösteren Canitez, 1968 yılında Doçent, 1974 yılında Profesör ünvanlarını almıştır. Prof. Dr. Nezih CANITEZ, bilimsel yaşamı boyunca jeofizikğin birçok konuda araştırma yapmıştır. Gravite ile başlayan araştırmaları sismoloji, neotektonik, ısı akısı ve veri işlem konularında sürmüştür.

Jeofizik dışında iyi bir hattat olan hocamız, Klasik Türk Müziği’ne de özel bir ilgi duymuştur.

Çeşitli Üniversite ve fakültelerde olmak üzere 3 adet dekanlık (1974-1978), MTA genel direktörlüğü (1978 1979), İTÜ. Maden fak. Jeofizik Müh. Böl. Bşk (1980 -1987), TÜBİTAK-MAM Yer Bilimleri Bölüm Başkanlığı (1984 -1987)

## **BÖLÜM 4**

### ***VERİLERE UYGULANAN TEMEL SPEKTRAL İŞLEMLER***

#### ***4.1 GİRİŞ***

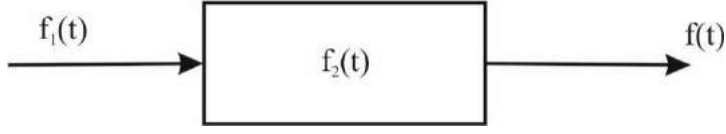
Gözlemler sonunda toplanan verilere birtakım işlemler yapılır. Bu işlemlerden bir kısmı bilinçli olarak (çeşitli süzgeçler, yuvarlatma, vb.) seçilir. Bir kısmı da uygulamanın doğasından (sınırlı boyda veri toplanmasından ötürü oluşan pencereleme) kaynaklanır. Tüm bu olayların frekans ortamında nelere yol açtığıнын bilinmesi gerekir.

Bilgisayarların gelişmesiyle birlikte, uzun sayı dizileri üzerinde yapılan sayısal işlemler kolaylaşmıştır. Dolayısıyla, ayrık Fourier dönüşümlerinin kullanılması, bilgisayarların gelişimiyle yakın tarihlere aittir. Özellikle hızlı Fourier dönüşümlerine ait algoritmaların geliştirilmesiyle, uzun verilerin frekans ortamına aktarılması kolaylaşmıştır. Böylece binlerce veriden oluşan ayrık Jeofizik verilerin, hızlı analiz edilme olanağı doğmuştur.

#### **4.2 EVRİŞİM (CONVOLUTION - FOLDING) KURAMI**

Jeofizikte araziden toplanan veriler hamdır. Verilerin daha iyi işleyebilmek veya yapı parametrelerine ulaşabilmek için bazı veri işlem yöntemleri kullanılır. Süzgeçleme, yuvarlatma, analitik uzanımlar, türev, özel dönüşümler (Hilbert, Hartley, Chirp, vb.) kullanılan yöntemlerin bir kısmıdır. Genelde, kullanılan yöntemlere ait katsayılar frekans ortamında hesaplanarak zaman/uzay ortamına aktarılır. Hesaplanan katsayılar ile veri zaman/uzay ortamında evriştirilerek istenen yöntemin uygulandığı çıktı verileri elde edilir (şekil 4.1). Şekil 4.1 de,  $f_1(t)$ : dizgeye (süzgeç) girecek olan araziden toplanmış ham veri,  $f_2(t)$ : doğrusal dizge işlevi,  $f(t)$ : istenen çıktıdır. Eğer dizge işlevi, alçak geçişli olarak düzenleniyorsa, çıktı verisinde, yüksek frekanslar giderilmiş, yalnızca, alçak frekanslar kalmıştır.  $f_2(t)$  işlevi, Hilbert dönüşümünü alabilecek katsayılardan oluşmuş ise çıktı işlevi, Hilbert dönüşümü alınmış işlevdir. Doğrusal dizge işlevinin düzenlenmesi 10. bölümde görülecektir.





Şekil 4.1 Doğrusal dizge (süzgeç) işlemi

Yukarıda tanımlanan işlem,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (4.1.a)$$

ve sayısal olarak

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1(k) f_2(n - k) \quad (4.1.b)$$

Yazılır. (4.1) eşitlikleri,  $-\infty, \infty$  aralığında  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  işlevlerinin evrişimidir. Mühendislik alanlarında, sinyaller ve dizgeler (sistem) sonsuz boyda olamazlar. Bu nedenle, boy sınırlanır. Ayrıca, dizgelerde  $t < 0$  için  $f_2(t)=0$  dır (dizge işlevi sıfır). Bu koşulda, tümlevin alt ve üst sınırları yeniden tanımlanmalıdır (bkz. bölüm 6.3.2 önbilgisiz, sinyaller).

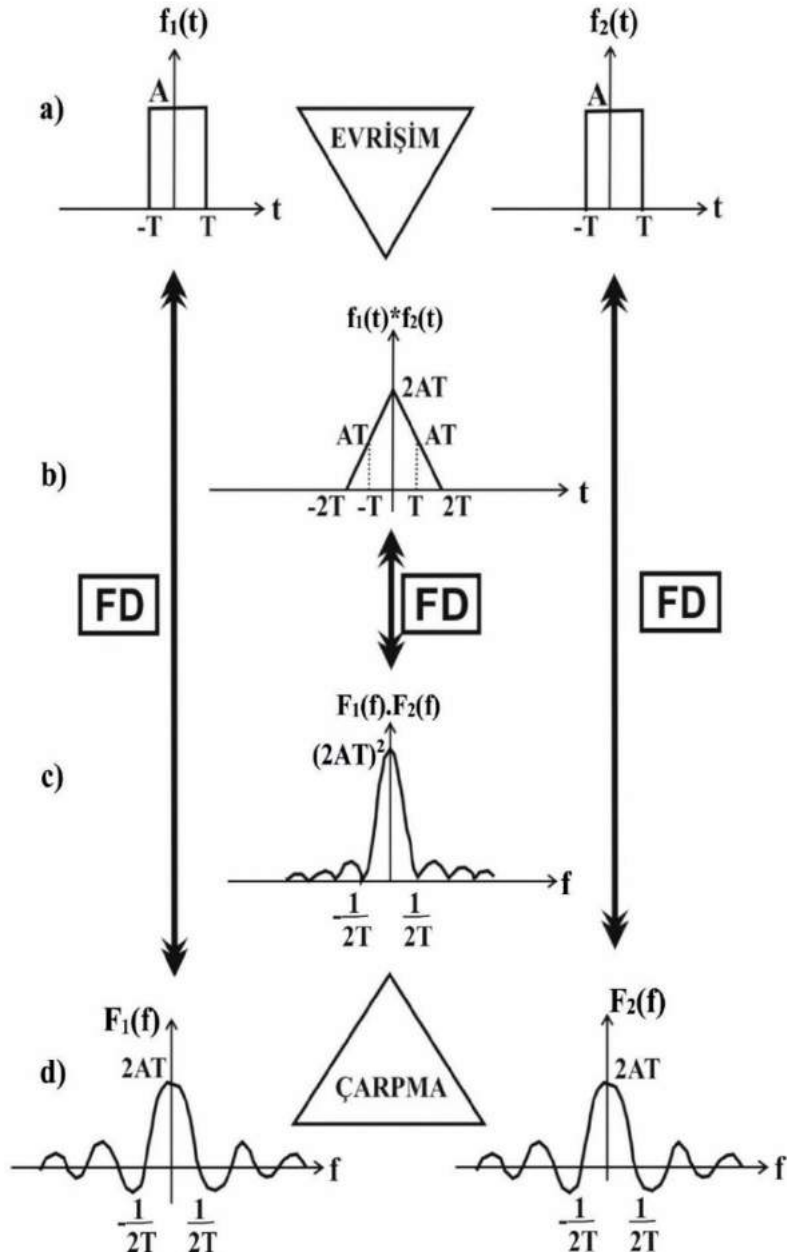
$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (4.2.a)$$

$$f(n) = \sum_{k=0}^n f_1(k) f_2(n - k) \quad (4.2.b)$$

denklemine dönüşür. Burada,

$$f(t)=f_1(t)* f_2(t) \quad (4.3)$$

olarak gösterilir. Şekil 4.2 de zaman ve frekans ortamlarındaki evrişim işlemi görülmektedir. Zaman ortamında aynı bir dalgacığın (“A” genlikli, “2T” uzunluklu) kendisiyle olan evrişimi verilmiştir(şekil 4.2.a). Evrişim, üst üste gelen, çakışan kısmın ortak alanlarının bulunmasıdır. Bu alan şekil 4.2.b de verilmiştir (üçgen). Dikdörtgenlerin FD. ise şekil 4.2.d deki gibi sinc işlevidir (bkz. bölüm 2-3). Evrişim, frekans ortamında bire bir çarpımdır (bkz örnek 4.1). Bu nedenle aynı iki dikdörtgen dalganın evrişiminin frekans ortamındaki görünümü şekil 4.1.c deki gibidir. Şekil 4.2.b de verilen üçgen biçiminin de FD. şekil 4.2.c deki “sinc” işlevidir. Bu şekil, sinc işlevinin karesinden oluştuğu için “-“ loblar bulunmamaktadır. Benzer açıklamalar, TFD yolu için de geçerlidir.



Şekil 4.2 Zaman ve frekans ortamlarında evrişim.

#### 4.2.1 Zaman evrişim kuramı

$$F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)], \quad F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)] \quad \text{ise}$$

$$\mathfrak{F}[f_1(t)*f_2(t)] = F_1(\omega)F_2(\omega) \quad (4.4)$$

dır. TFD bağıntısı ise aşağıda verilmiştir.

$$f_1(t) * f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega} F_1(\omega)F_2(\omega)e^{j\omega t} \quad (4.5)$$

#### 4.2.2 Frekans evrişim kuramı

$$f_1(t) = \mathfrak{F}^{-1}[F_1(\omega)] \quad , \quad f_2(t) = \mathfrak{F}^{-1}[F_2(\omega)] \quad \text{ise}$$

$$\mathfrak{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega)*F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u)du \quad (4.6)$$

---

**Not:**  $\omega - u = \tau$  dönüşümü yapılmıştır.

---

#### **Örnek 4.1**

Frekans ortamında evrişim aşağıdaki denklemlerle verilir.

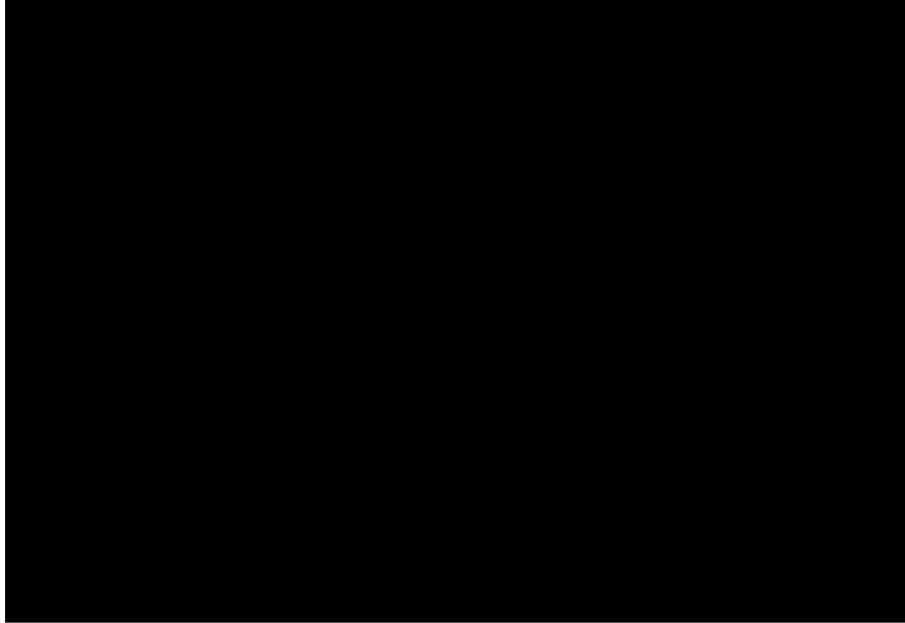
$$\mathfrak{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega)*F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u)du$$

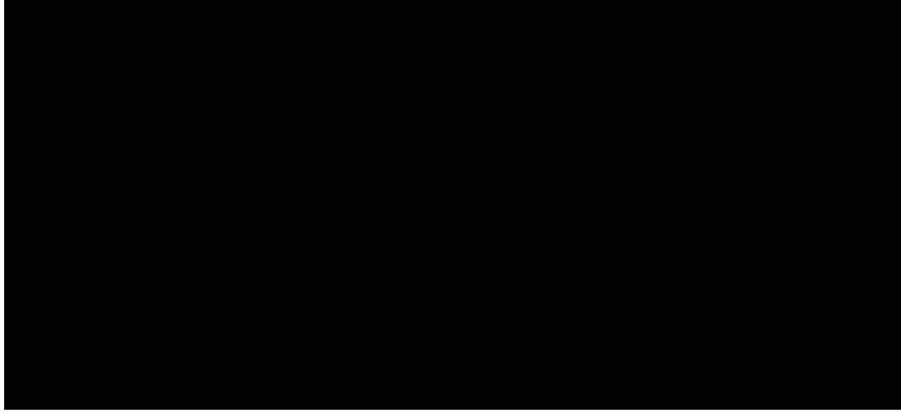
$$\mathfrak{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega)*F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u)du$$

Zaman ortamında her iki işlemin bire bir çarpımı olduğunu gösteriniz.

#### **Çözüm**

Verilen bağıntının TFD





bulunur.

### c. Evrişim tümlevinin özellikleri

$$\text{Değişim: } f_1(t)*f_2(t)= f_2(t)*f_1(t)$$

$$\text{Tedüzelik: } [a.f_1(t)]*f_2(t)= a[f_1(t)*f_2(t)]$$

$$f_1(t)*[f_2(t)*f(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f(t)$$

$$\text{Dağılım: } [f_1(t)+f(t)]*f_2(t)=[f_1(t)*f_2(t)]+[f(t)*f_2(t)]$$

(4.7)

### 4.2.3 Evrişim yöntemleri.

1. Seriler ile.
2. Katlama yolu ile.
3. Analitik denklemi belli sinyaller ile.
4. z dönüşümleri ile (Bkz Bölüm 6.4).

### Serilerle evrişim

İki seri;

$$A = a_0 + a_1x + a_1x^2 \dots , \quad B = b_0 + b_1x + b_1x^2 \dots$$

olsun. Bunların evrişimleri;

$$a_0(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) + a_1x(b_0 + b_1x + b_2x^2 \dots) + a_2x^2(b_0 + b_1x + b_2x^2 \dots)$$

dır. Burada;

$$\begin{array}{l}
c_0 = a_0b_0 \\
c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 \\
c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 \\
c_3 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 \\
\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots
\end{array} \quad \Bigg] \quad (4.8)$$

olarak gösterilirse evrişim sonucu bulunan yeni seri;

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \quad (4.9)$$

denklemini ile elde edilir. Sayısal evrişimde, evrenin kaymaması için sayı dizilerinin tek sayıda olması gerekir. Böylece evre kayması olayı oluşmaz, bakışım bozulmaz.

Evrişime giren uzun boylu ayrık verinin nokta sayısı “m”, kısa boylunun “n” olsun. Evrişimden çıkan ayrık değerlerin nokta sayısı ise, kullanıcının isteğine veya bu konudaki algoritmaların kurulması sırasındaki varsayımlarla bağlıdır.

Evrişimde, (n-1)/2 adet solda, bir o kadar da sağda yalancı veri oluşur. Sonuçta elde edilen nokta sayısı  $k=n+m-1$  dir. Örneğin diziler 5, dizi 15 noktadan oluşmuş ise, çıkan nokta sayısı  $k=5+15-1=19$  dur. Bunlardan (5-1)/2=2, 2 adedi sol, 2 adedi da sağ tarafta yer alır. Başka bir deyişle, ilk iki ve son iki tanesi yalancı değerlerdir (bu noktalarda kısa işlecin ayrık değerleri sıfır ile çarpılmıştır). Genelde, algoritmalar, bu varsayım üzerine kurulmuştur.

Veri yitiminin önemli olmadığı, buna karşılık sağlıklı verilerin elde edilmesinin önemli olduğu durumlarda, kısa işleç, tümüyle uzun işlecin içinden başlatılır. Bu durumda, (n-1)/2 adet veri hem soldan ve hem de sağdan yitilir. Bir üst adımda verilen örnek, bu durumda kullanılırsa, (5-1)/2=2, 2 şer adet veri sağdan ve soldan yitilir. Bu durumda, evrişim sonucu elde edilen nokta sayısı  $k=m-n+1$  yani  $k=15-5+1=11$  dir.

**Örnek 4.2**

$$\begin{array}{l}
A = [a_0, a_1] \quad , \quad A = [1,2] \\
B = [b_0, b_1, b_2] \quad , \quad B = [1,2,3]
\end{array}$$

“A” dalgacığı ile “B” dalgacığının evrişimini seriler yöntemi ile bulunuz.

### ***Çözüm***

“B” dalgacığı aynen alınır, “A” dalgacığı ise ters çevrilerek, (4.8) denklemlerine uygun olarak evriştirilir (şekil 4.3). Bu örnekte, “A” işleci çift sayıda olduğu için bakışım yitirilmiş ve evrişimden çıkan nokta sayısı da çift olarak elde edilmiştir.

### **Katlama yoluyla evrişim**

(4.8) denklemleri incelediğinde, evrişimin aynı zamanda bir katlama işleci olduğu da anlaşılır. (4.8) denklemlerinde verilen üç boyulu “A” ve “B” dalgacığlarının evrişimi, bir katlama olarak ele alınabilir (şekil 4.4).

### **Örnek 4.3**

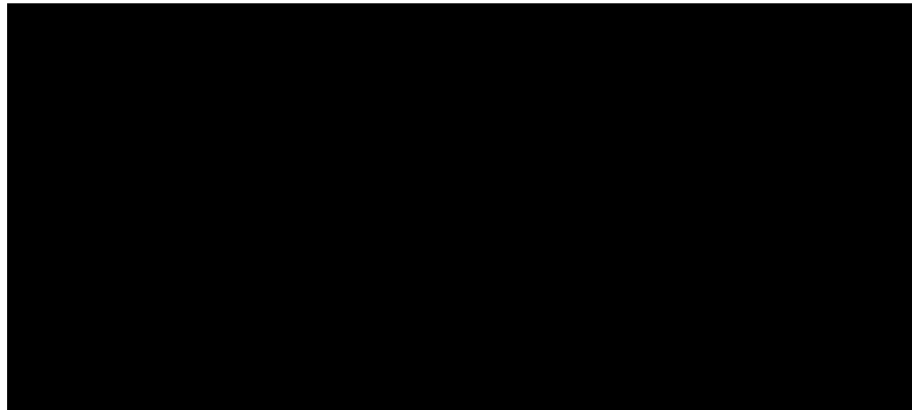
Sayısal örnek olarak yukarıda verilen iki dalgacığın evrişimini katlama yolu ile bulunuz.

---

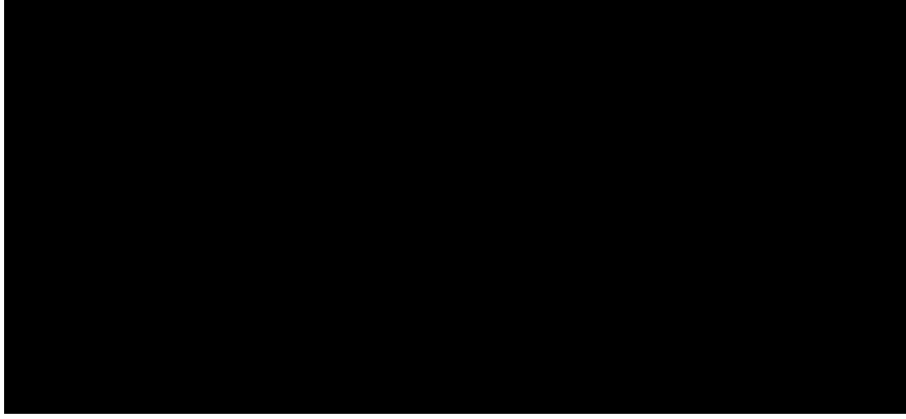
**Not:** Seriler ile evrişimde dalgacığlardan biri aynen alınır diğeri ters çevrilerek evrişime sokulur. Katlama yöntemi uygulanırken iki dalgacığlardan hiçbirisi ters çevrilmeden evrişimleri alınır (bkz. şekil 4.5).

---

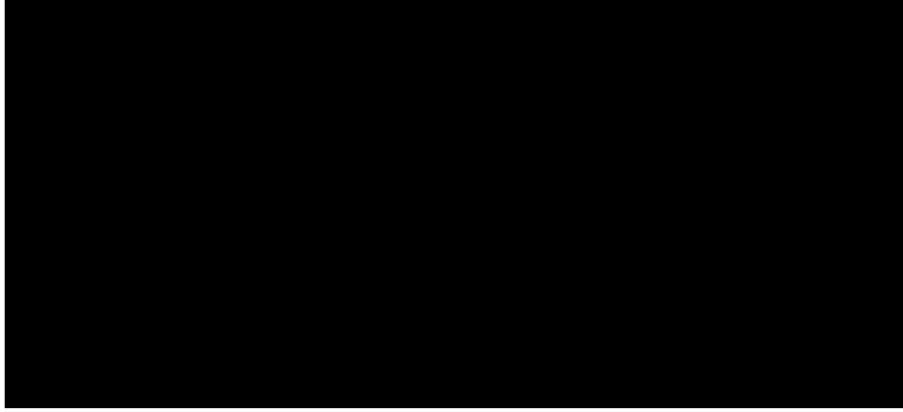
### ***Çözüm***



**Şekil 4.3** “A” ve “B” dalgacığının evrişimi



**Şekil 4.4** Üçer boylu “A” ve “B” dalgacıklarının evrişimi



**Şekil 4.5** Üçer boylu “A” ve “B” dalgacıklarının sayısal evrişimi

#### **Analitik denklemleri belli olan işlevlerin evrişimi**

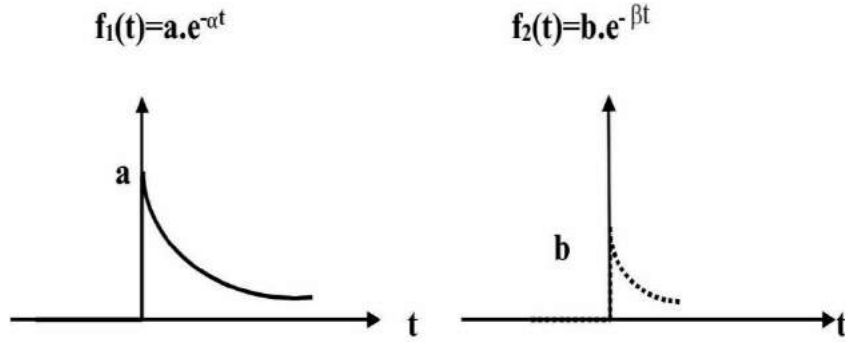
Eğer evriştirilecek işlevlerin analitik denklemleri belli ise (4.1-4.2) denklemleri kullanılarak evrişim sonucu bulunur.

#### **Örnek 4.4**

$f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  işlevleri ve denklemleri, şekil 5.25 te verilmektedir. Evrişimlerini bulunuz.

#### ***Çözüm***

Evrişim sırasında 1. işlev aynen alınır, 2. işlev ters çevrilir (Şekil 4.7). (4.1-4.2) denklemleri kullanılarak izleyen çözüm yapılır.



Şekil 4.6 Örnek 4.4'e ait işlevler



Şekil 4.7 Verilen işlevlerin, a) evrişimleri b) evrişim çıktısı

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \Rightarrow \int_0^t a e^{-\alpha\tau} b e^{-\beta(t-\tau)} d\tau$$

$$f(t) = ab \int_0^t e^{-\alpha\tau} e^{-\beta t} e^{\beta\tau} d\tau \Rightarrow \frac{ab e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \left| e^{(\beta-\alpha)\tau} \right|_{\tau=0}^t$$

$$f(t) = ab \frac{e^{-\beta t} e^{(\beta-\alpha)t} - e^0}{\beta - \alpha} = ab \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}$$

### Örnek 4.5

$$\mathfrak{Z}[f_1(t) + f_2(t)] = \frac{1}{(1+jw)(2+jw)}$$

dır.

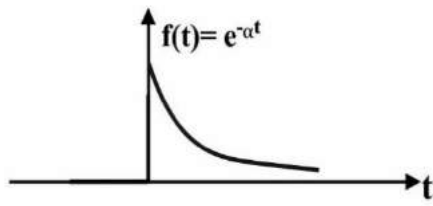
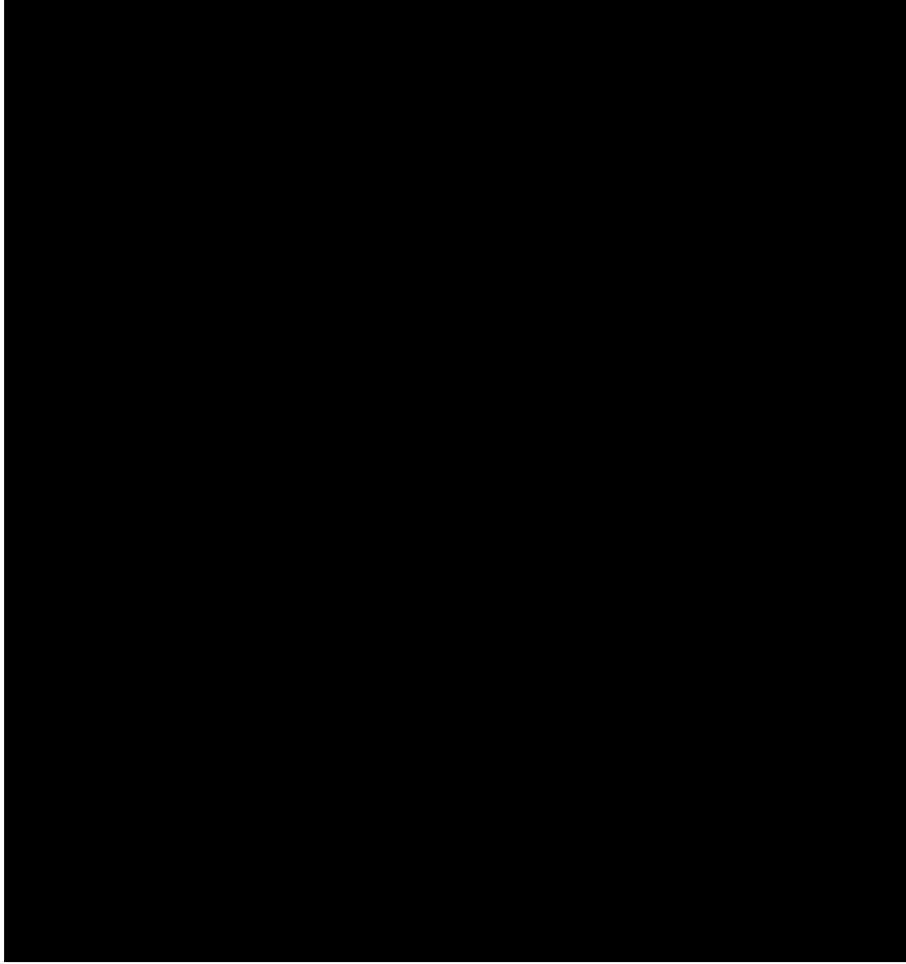
a)  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  işlevlerini bulunuz.

b)  $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$  işlevlerinin analitik olarak hesaplayınız.



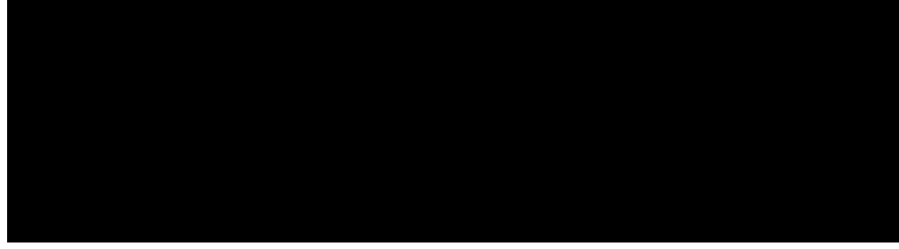
**Çözüm**

a)



$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

**Şekil 4.8** Verilen işlevin değişimi



#### 4.2.4. Evrişimin geometrik olarak gösterimi

4.1, 4.2, 4.3 bağıntıları kullanılarak, evrişim denklemi verilmiştir. Yazım kolaylığı olması amacıyla,  $x(t)=f_1(t)$ ,  $h(t)=f(t)$ ,  $y(t)=f_2(t)$  ile gösterilirse, evrişim;

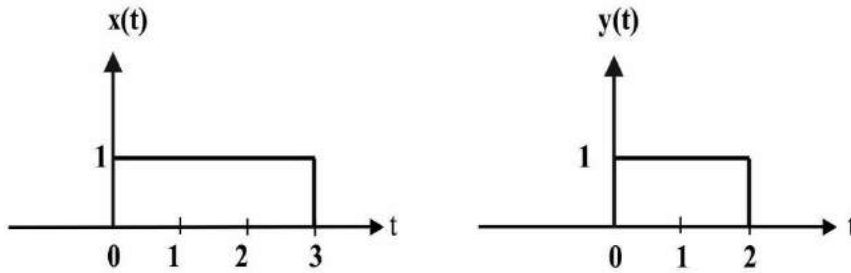
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \quad (4.10)$$

yazılır. Bu denklemden de anlaşılacağı gibi, elde edilecek tümlev, her bir kaymada, işlevlerin altında kalan alandır. Ancak evrişim zaman/uzay ortamında yapıldığından, bağımsız değişken zaman/uzunluktur.

#### Örnek 4.6

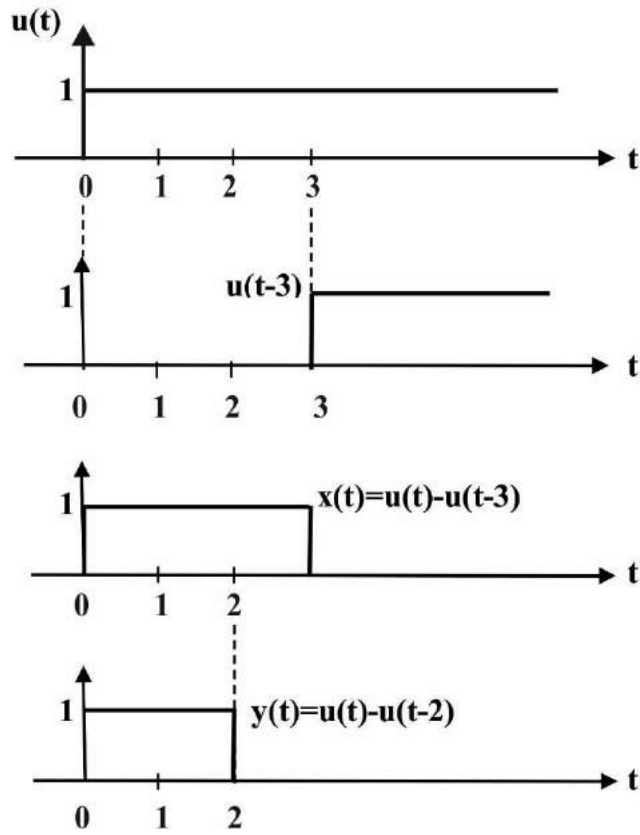
Şekil 4.8 de verilen değişik boyda iki dikdörtgen dalganın evrişimini analitik olarak bulunuz, geometrik olarak gösteriniz.

#### *Çözüm*



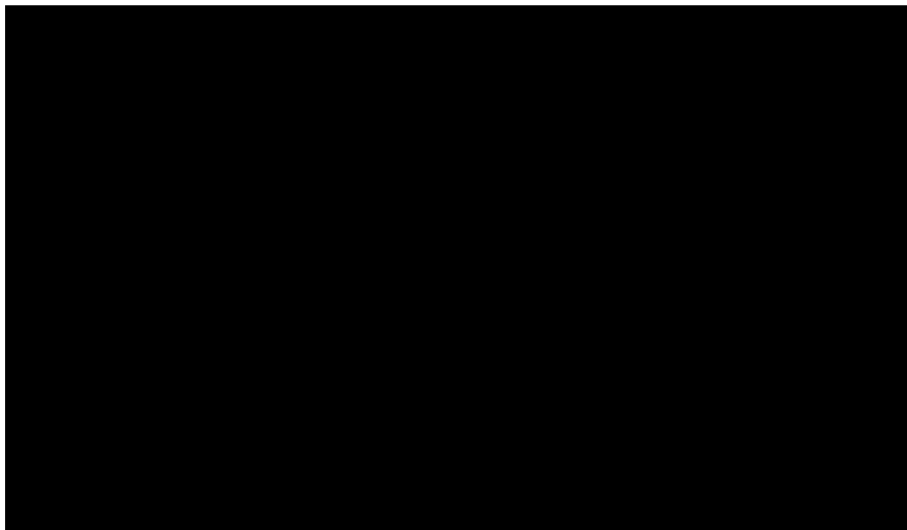
Şekil 4.8 Değişik boyda iki dikdörtgen dalga

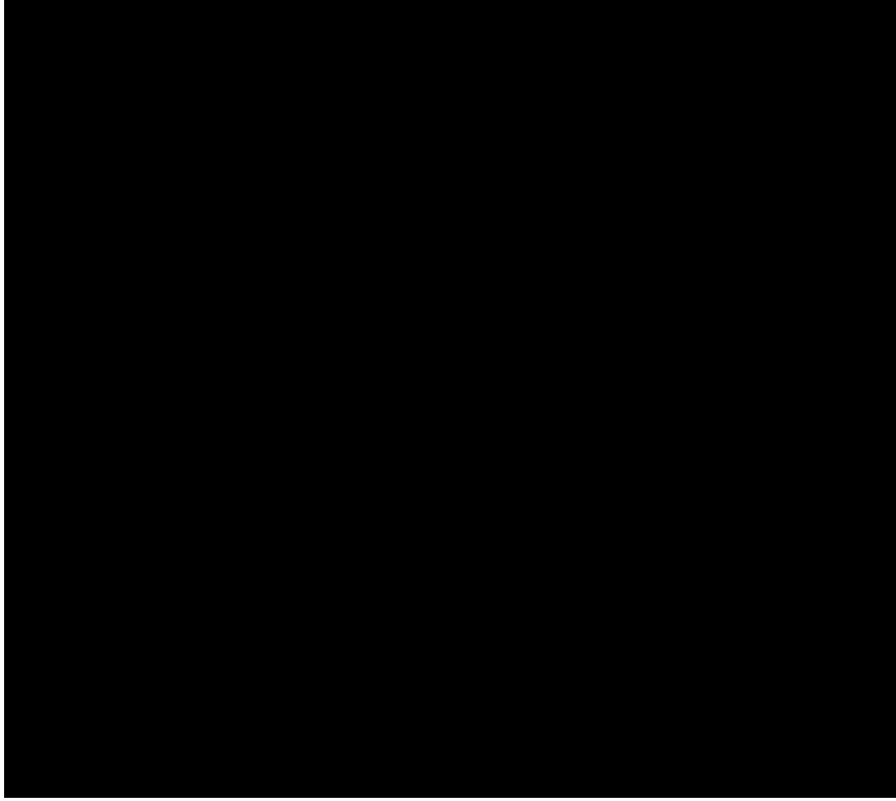
Öncelikle verilen dikdörtgen dalgaların analitik denklemlerinin bulunması gereklidir. Bunun için birim basamak işlevinden yararlanılır (bkz.örnek 3.9). Birim basamak işlevleri şekil 4.9 da verildiği gibi kullanılır.



Şekil 4.9 Dikdörtgen dalganın analitik denkleminin elde edilmesi

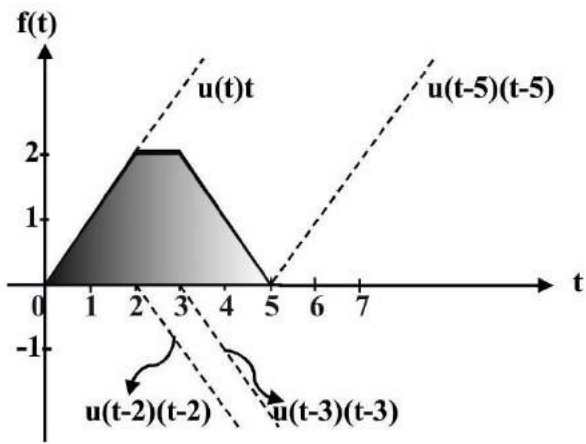
$$f(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau$$



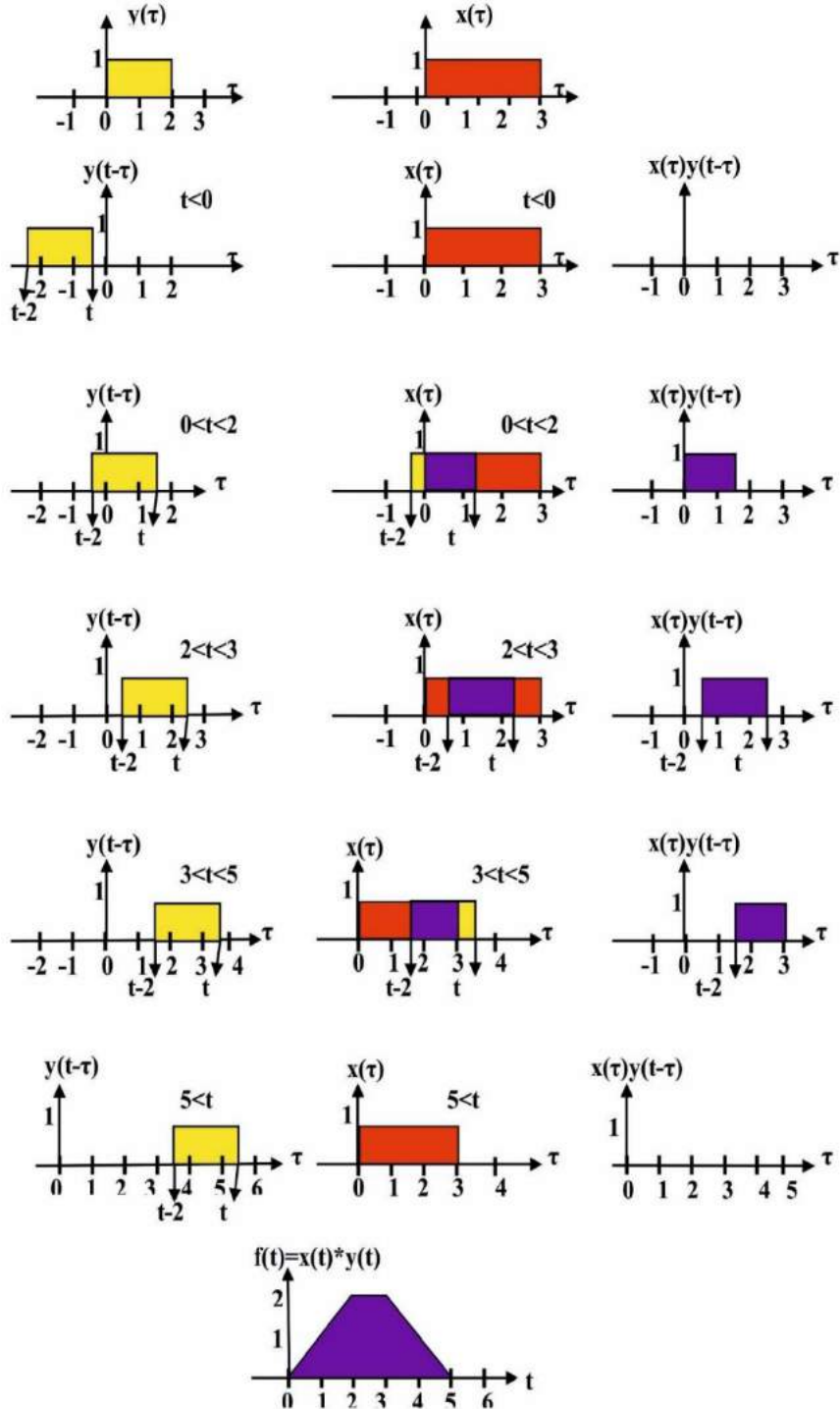


$$f(t) = u(t)t - u(t-2)(t-2) - u(t-3)(t-3) + u(t-5)(t-5)$$

elde edilir. Evrişim sonucu bulunan alan ise şekil 4.10 de verilmiştir.



Şekil 4.10 Farklı boyda, iki dikdörtgen dalganın evrişimlerinin sonucu

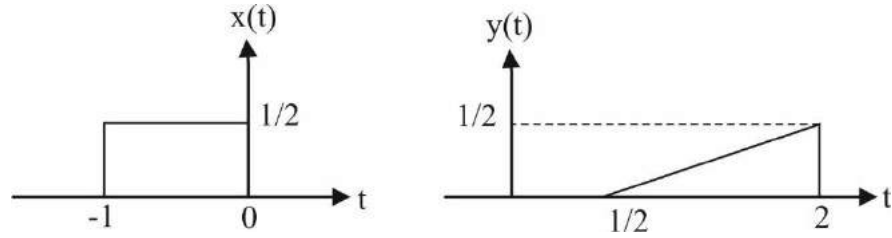


Şekil 4.11 Farklı boylu iki dikdörtgen dalğanın evrişim aşamaları

Yukarıda analitik çözümleri verilen dikdörtgen dalgalarının evrişimleri, şekil 4.11 de geometrik olarak gösterilmiştir. Şekilde; sarı, kısa, kırmızı uzun dikdörtgenleri, mor alan ise dikdörtgenlerin altında kalan alanı (evrişimi) gösterir.

#### **Örnek 4.7**

Şekil 4.12 de verilen üçgen ve dikdörtgen işlevlerin evrişimini bulunuz.



**Şekil 4.12** Evrişimi alınacak işlevler

#### **Çözüm**

Her iki işlevin evrişimi,  $x(t)$  ve  $h(t-\tau)$  işlevlerinin her bir kaymada, altlarında kalan alanların hesaplanarak çizilmesidir. "t" değişkeni  $-\infty$ ,  $+\infty$  aralığında değiştikçe,  $h(t-\tau)$  işlevi de " $\tau$ " ekseninde kayacaktır. Bu işlevi çizebilmek için aşağıdaki yol izlenir.

1.  $h(t)$  işlevinde  $t=\tau$  dönüşümü yapılır ve düşey eksende katlanır. Düşey eksende katlanması " $\tau$ " nun "-1" ile çarpılması anlamındadır (şekil 4.13).



**Şekil 4.13** Ters çevrilmiş üçgen dalga

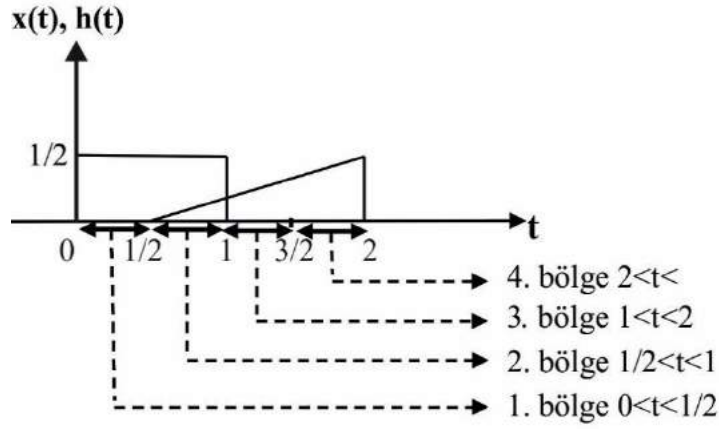
2. "t" değişmediğinden, gerçel bir sayı olarak düşünülür ve

$h(t - \tau) = h[-(t - \tau)]$  işlevi çizilir. Bu işlev aslında  $f_2(-\tau)$  işlevinin " $\tau$ " ekseninde " $t$ " kadar ötelenmesi ile elde edilir. Eğer  $t > 0$  ise sağa doğru,  $t < 0$  ise sola doğru kayar (şekil 4.14).



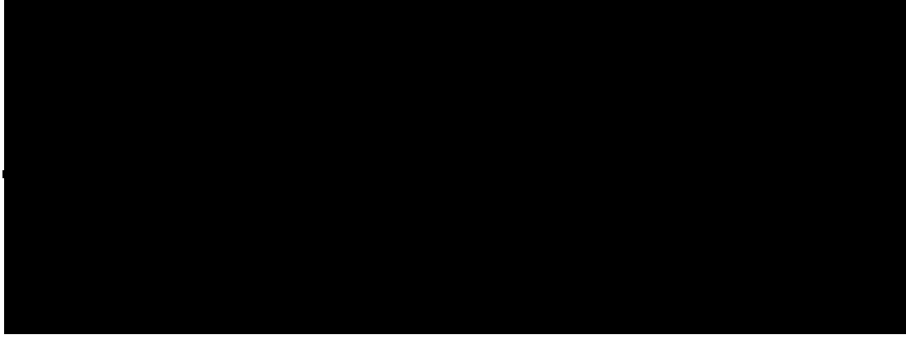
Şekil 4.14 Sağa ve sola ötelenme

3.  $x(\tau)$  işlevi de aynı grafik üzerine çizilir. Her iki işlevin çarpımlarının sıfır olmadığı bölgede tümlev alınır. Bu işlem " $t$ " parametresinin "+ ve -" tüm değerleri için yapılır. Evrişim tümlevinin hesaplanması için yukarıda açıklanan yöntemi verilen bu örneğe uygulayalım:  $t > 0$  için evrişim, dört adet bölgede yapılır (şekil 4.15). Tümlevlerin alt ve üst sınırları ait oldukları bölgelerin alt ve üst sınırlarıdır.



Şekil 4.15 Bölgeler ve sınırları

a.  $0 < t < 1/2$  için (şekil 4.16);  $x(\tau)$  ve  $h(t-\tau)$  çarpımlarının sıfır olmadığı bölge, taralı olan alandır. Dolayısı ile bu bölgede tümlev alınır. Bunun için  $h(t-\tau)$  doğrusunun denklemi bulunur (1. bölge).



$$y(t) = \frac{1}{12} \left[ (t - 1/2)^2 + 2t \right] \quad (4.11)$$



**Şekil 4.16** 1. bölgeye ait alan

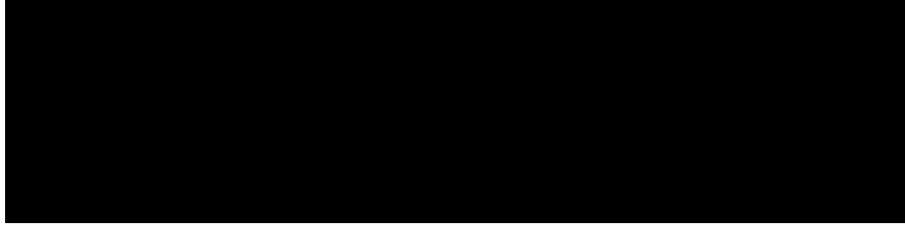
**b.**  $1/2 < t < 1$  için (şekil 4.17);

$h(t-\tau)$  işlevi “a” da bulunmuştu.



$$y(t) = t/6 \quad (4.12)$$





**Şekil 4.17** 2. bölgeye ait alan  
c.  $1 < t < 2$  için (şekil 4.18);



$$y(t) = -\frac{1}{12}(t-2)(t-1) \quad (4.13)$$



**Şekil 4.18** 3. bölgeye ait alan

d.  $2 < t < \infty$  için (şekil 4.19);

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\tau - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}t\right)d\tau \Rightarrow y(t) = 0 \quad (4.14)$$

e. Bu kez de  $t < 0$  değerleri için  $y(t)$  nin değişimini inceleyelim. “t” nin mutlak değeri büyüdükçe  $h(t-\tau)$  işlevi de sola kayar (şekil 4.20).

$-(1/2) < t < 0$  için

$$y(t) = \int_{-1}^{-1/2+t} \frac{1}{2}\left(-\frac{\tau}{3} - \frac{1}{6} + \frac{t}{3}\right)d\tau = y(t) = \frac{1}{12}\left[\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2t\right] \quad (4.15)$$



**Şekil 4.19** 4. bölgeye ait alan



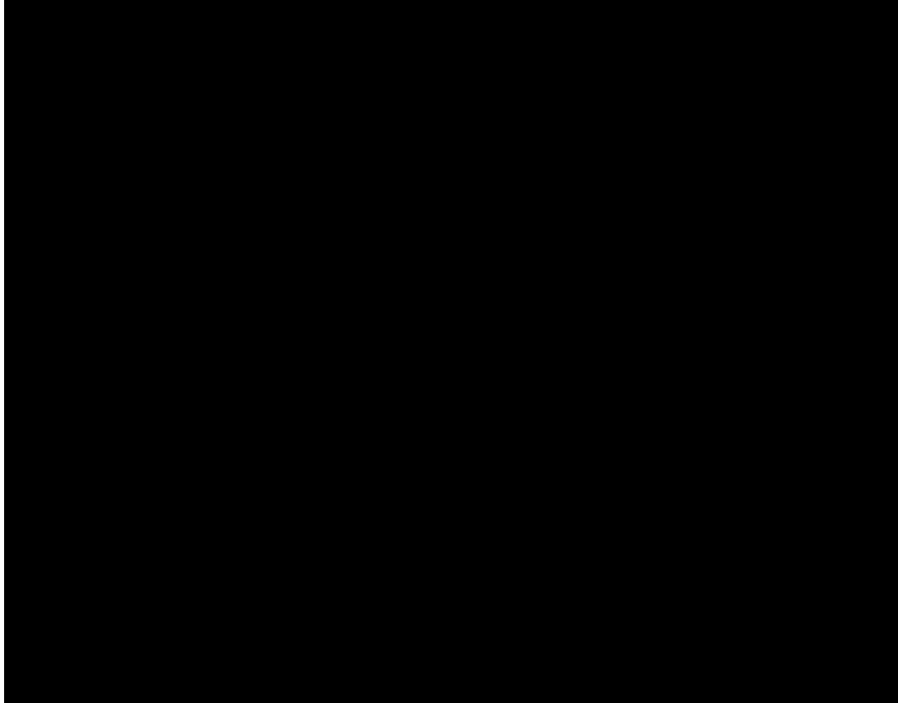
**Şekil 4.20** Sola doğru ( $t < 0$ ) kaymadaki alan

**f.**  $-\infty < t < -1/2$  için

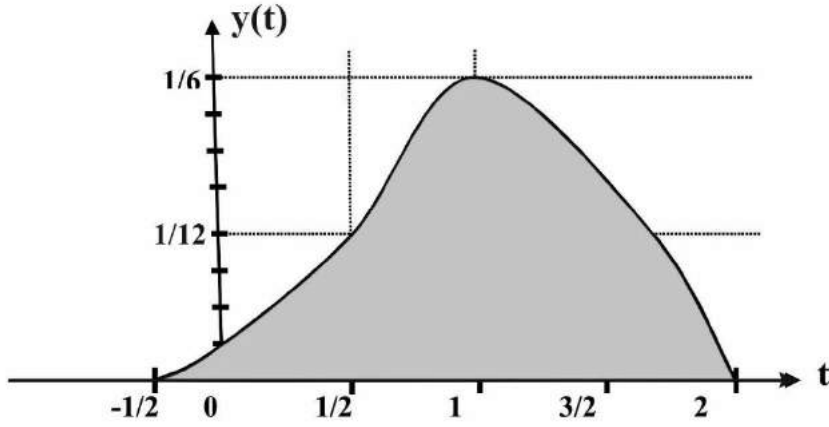
$$y(t) = 0$$

(4.16)

dır.  $y(t)$ 'nin çıkış işlevi ise hesaplanan bölgelerde çizilir.



dır. Elde edilen alan Şekil 4.21 de verilmiştir.



Şekil 4.21 Üçgen ve dikdörtgen dalgaların evrişimlerinin sonucu

### Örnek 4.8

$F(w) = \frac{1}{(1+jw)^2}$  bağıntısı verilmektedir. Zaman ortamı denklemini bulunuz. Çözümde, aşağıdaki eşitliklerden yararlanınız.

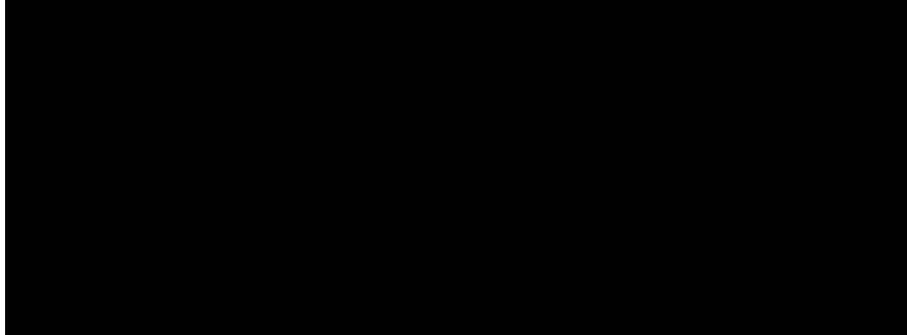
$$F(w) = \frac{1}{\alpha + jw} \rightarrow f(t) = \mathfrak{F}^{-1}[F(w)] = e^{-\alpha t} u(t)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$u(\tau) \cdot u(t-\tau) = \begin{cases} 0 & 0 > \tau > t \\ 1 & 0 < \tau < t \end{cases}$$

(birim basamak işlevi tanımı)

### Çözüm



evrişim tümlevi aşıağıda verilmektedir ve bu tümlev “u(t)” ile sınırlanmaktadır.

$$f(t) = [f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

**Not:** Çözümde, birim basamak işlevi kullanılmıştır.

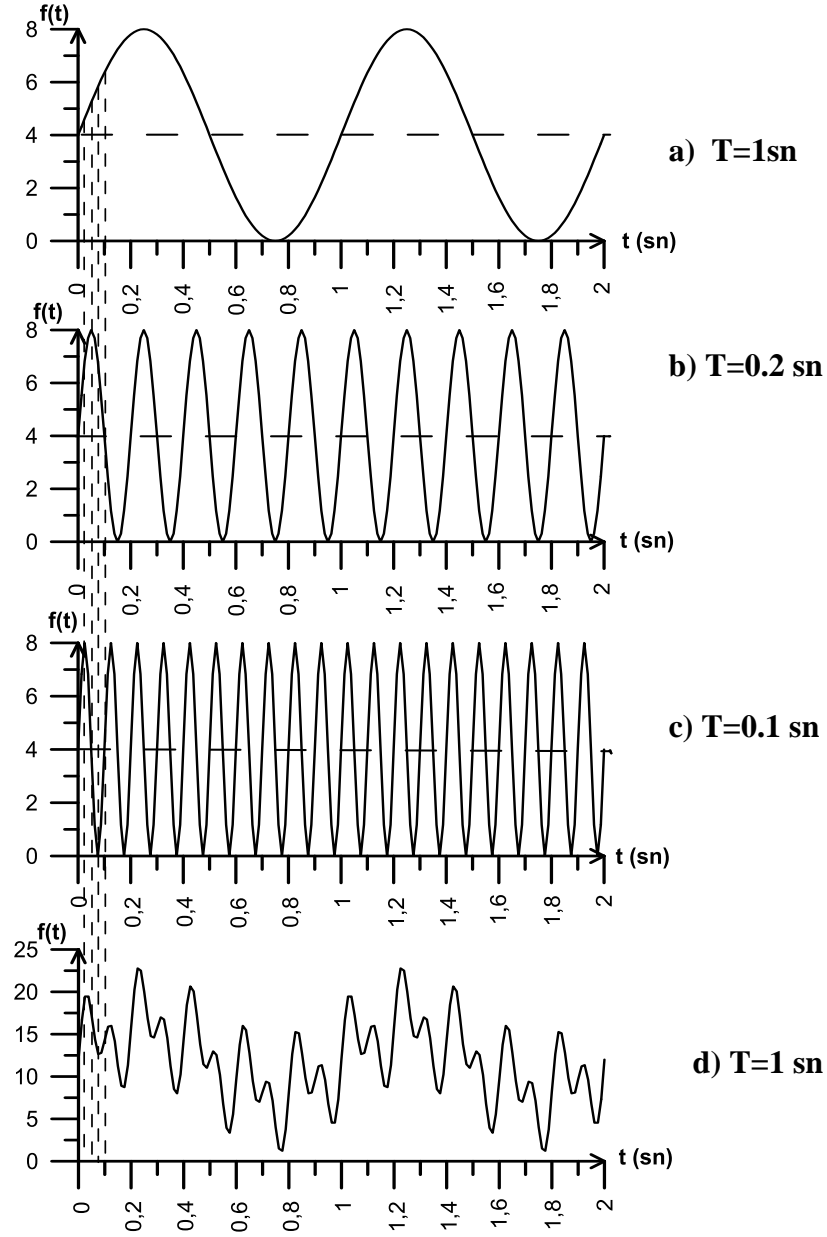
### 4.3 SİNYALLERİN ENERJİ, GÜÇLERİNİN HESAPLANMASI VE PARSEVAL KURAMI

#### 4.3.1 Giriş

Uzay ve zaman ortamındaki izler sonsuz uzunluktadır. Ancak elde edilen sinyaller (anomali), ilgilenilen alanda (yapı, etüd alanı) veya, zaman parçasında yapılır ve kuşkusuz söz konusu alanın veya zaman parçasının da dışında, sonsuz bir aralıkta sürer. Gözlemler, sonsuz olan bu sürecin sınırlı bir parçasında yapılır. Başka bir deyişle, sinyale, bir pencereden bakılır. Pencere dışında, sinyal yok olarak varsayılır. Kuşkusuz bu varsayım, sorunlara neden olacaktır (bkz. pencereler). Bu nedenle gözlenen x(t), y(t), g(x), v(x) gibi izler, belirli bir pencere içinde sayısal olarak elde edilirler.

Parseval kuramınının kavranabilmesi için aritmetik ortalamaya daha farklı bakalım. Bunun için bölüm 1.1, denklem 1.2.a, şekil 1.3’ü yeniden anımsayalım.

$$f(t) = 4 + \{4[\sin(2\pi t) + \sin(10\pi t) + \sin(20\pi t)]\} \quad (1.2.a)$$



**Şekil 1.3** Üç değişik dönemli iz (a-b-c) ve toplamları (d)

Şekil 1.3. (d)' de verilen iz analiz edilirse, 1. harmonik için (a), ikinci harmonik için (b), 3. harmonik için ise (c) de verilen sinüzoidaller elde edilecektir. Dönemleri içinde, her bir harmoniğin aritmetik ortalaması sıfırdır. Bu durumda, (1.2.a) bağıntısının parantez içi sıfırdır. Geriye bir tek "4" sayısal değeri kalır. Söz konusu "4" değeri,

$\omega_0=0$  frekansına ait genliktir. Bu aşamada, sinyal bir dalgalı akım elektrik sinyali olarak düşünülebilir. En genel durumda dalgalı akım sinyali

$f(t)=a+\sin(\omega_0 t)$  olarak gösterilebilir.  $\omega_0=0$  da,  $f(t)=a$  değerini alır (dalgalı akımın doğru akım bileşeni).

### 4.3.2 Parseval Kuramı

Parseval kuramı, dönemli bir işlevin ortalama gücünün, sinyalin sıfır frekansındaki ortalama gücü ve harmoniklerinin ortalama güçlerinin toplamına eşit olduğunu gösterir (şekil 4.22). Şekil 4.22 de verilen sinyalin (sarı renkli), ortalama gücü görülmektedir. Harmonik analizden elde edilen 1., 2., 3., .....harmonikler ise gerçel ve sanal bileşenleri olmak üzere ilgili şekilde verilmiştir.

$R=1$  ohmluk direnç üzerinden geçen akımın verdiği enerji:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 df \quad (4.17)$$

---

**Not:**  $f = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow df = \frac{1}{2\pi} d\omega$

---

Ortalama güç ise

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \quad (4.18)$$

$|C_n| = \frac{1}{2} (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$

ile verilir. son bağıntıda yerine yazılırsa,

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (4.19)$$

elde edilir. (4.18) bağıntısında  $a_0$ , “f(t)” işlevinin aritmetik ortalaması, “f(t)” işlevinin doğru akım bileşenidir. Şekil 4.22 de verilen işlevin ortalama gücü ise,

$$P_{ort} = P_{(\omega=0)} + P_{a1} + P_{b1} + P_{a2} + P_{b2} + \dots \quad (4.20)$$

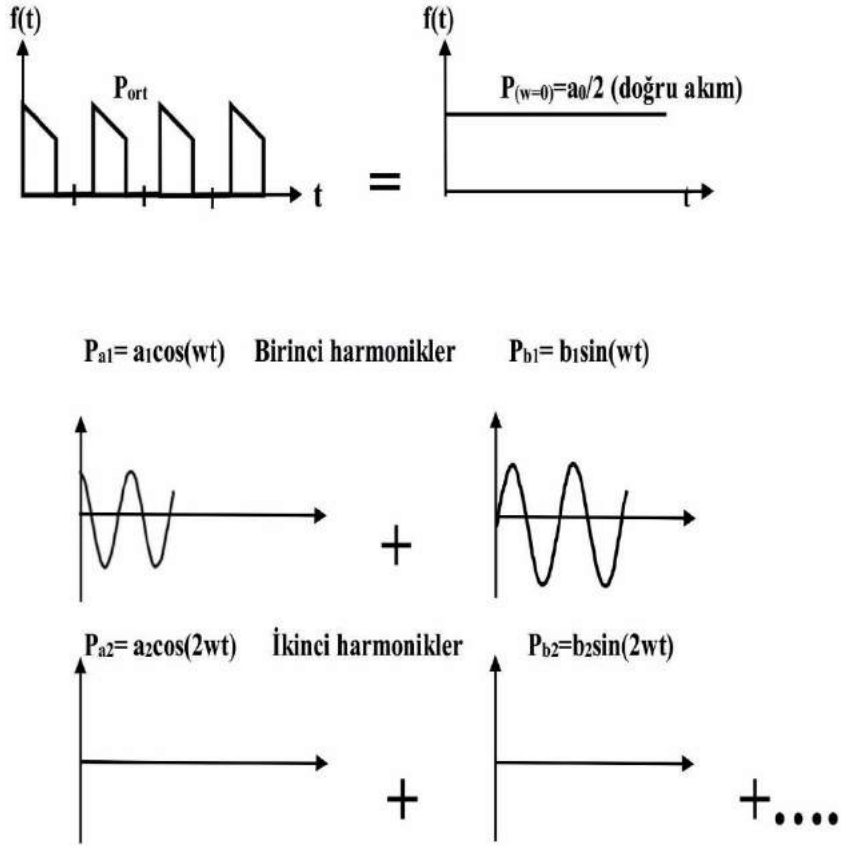
$$P_{ort} = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} b_1^2 + \frac{1}{2} a_2^2 + \frac{1}{2} b_2^2 + \dots \quad (4.21)$$

4.21 bağıntısından (4.19) eşitliğine ulaşılır. (4.17) eşitliğinde,

$$F(\omega) = \mathfrak{F}[f(t)]$$

$$S(\omega) = |F(\omega)|^2 = F^*(\omega) \cdot F(\omega) \quad (4.22)$$

olarak tanımlanabilir. “S(w)”, “x(t)” işlevinin güç spektrumu/spektral güç yoğunluğudur. Birimi joule/Hz dir. Fiziksel olarak “S(w)”, “f(t)” izinin enerjisinin ne miktarda ve hangi frekans binlerinde bulunduğunu belirtir. Başka bir deyişle, verinin gücünün (kullanılan günlük konuşmalarda “enerjisi” de olarak kullanılmaktadır bu durumda enerji ve güç terimleri karışır) hangi frekanslarda yoğunlaştığını gösterir (gerçel ve sanal kısımların kosinüs ve sinüs işlevleri olduğuna dikkat ediniz).



Şekil 4.22 Parseval kuramına göre bir işlevin gücü

### S(w) nm özellikleri

1.  $S(w) \geq 0$  ve “w” nin gerçel bir işlevidir [çünkü S(w), her bir binde taşınan enerjiyi gösterir].

2.  $S(w)$ ,  $w$ ' nın daima çift işlevidir [ $S(w)=S(-w)$ ]

### 4.3.3 Çapraz enerji spektrumu

Dönemsiz işlevler için tanımlanan (4.17) denkleminde  $|f(t)|^2$  işlevi gerçel ve çifttir. İşlevin karmaşık olması durumunda,

$$|f(t)|^2 = f(t)f^*(t) \quad (4.23)$$

$$f^*(t) = f(-t) \quad (4.24)$$

dır. O zaman (4.17) denklemi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)F^*[-(-w)]dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)F^*(w)dw \quad (4.25)$$

**Not:**

$$f(t)f^*(t) = |f(t)|^2, \quad F(w)F^*(w) = |F(w)|^2$$

olarak yazılabilir. Bu işlevler "t" ve "w" ortamlarında birbirlerine eşittir. (4.23) denkleminin spektrumu gerçel ve çifttir. Bu, özel bir durumdur. Özel olan bu durum genelleştirilirse iki ayrı işlev olan  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  alınmalıdır. O zaman (4.25) bağıntısı

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1^*(w)F_2(w)dw \quad (4.26)$$

durumuna gelir. Son denklemde,

$$E_{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} F_1^*(w)F_2(w)dw = F_1^*(w)F_2(w) \quad (4.27)$$

veya,

$$E_{1,2} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F_1^*(w)F_2(w)dw \quad (4.28)$$

dır. (4.26) eşitliğinden hareketle

$$f_1(t)f_2^*(t) = \frac{F_1^*(w)F_2(w)}{2\pi} \quad (4.29)$$

yazılabilir. "E<sub>1,2</sub>" çapraz enerji spektrumdur.



### **Örnek 4.9**

$f(t)=2 \sin(100t)$  izinin gücünü Parseval kuramını kullanarak bulunuz.

---

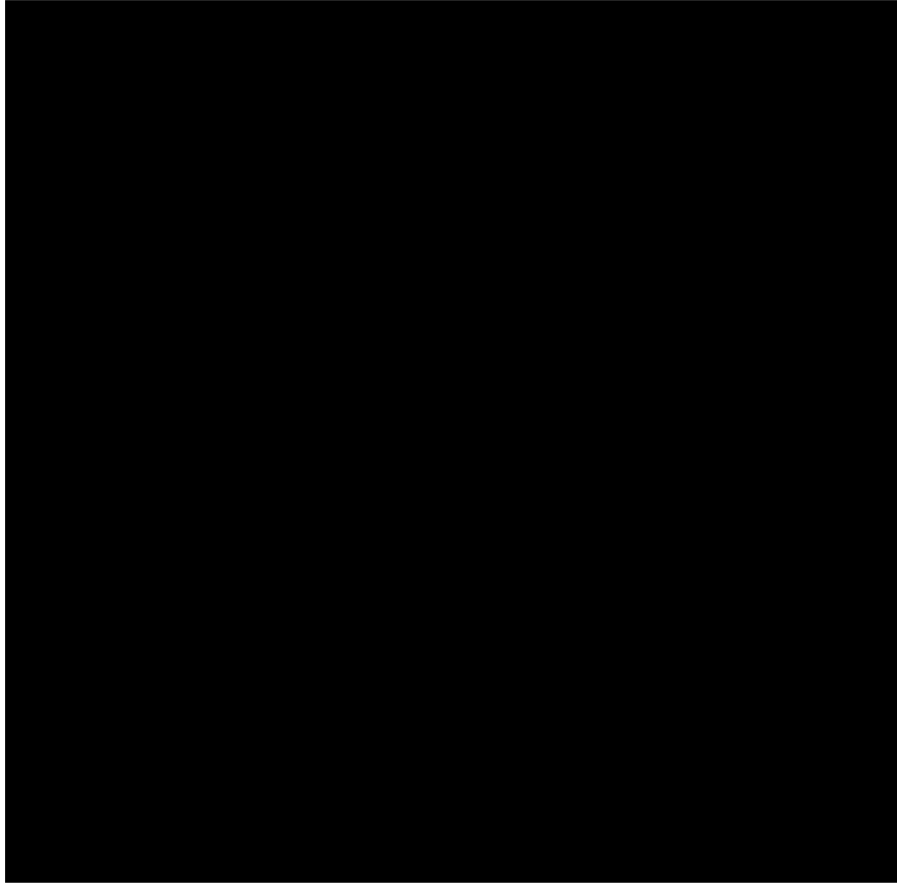
**Not:** çözümde aşağıda verilen kalıp denklemini kullanınız.

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$$

---

### ***Çözüm***

Güç,



### **Örnek 4.10**

Bir  $f(t)$  izinin enerji yoğunluk spektrumu

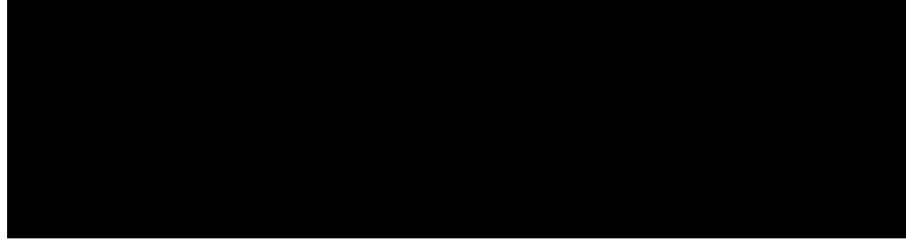
$$|F(\omega)|^2 = 10^{-10} \omega^2 \text{ joule/Hz olarak verilmiştir.}$$

- $\pm 2\pi 10^4$  rad/sn binindeki enerji yoğunluğunu,
- $\pm 2\pi 10^4$  rad/sn ile  $\pm 4\pi 10^4$  rad/sn frekansları arasında kalan bölgelerdeki izin enerjisini bulunuz.

### **Çözüm**

a)  $|F(w)|^2 = 10^{-10} (2\pi 10^4)^2 = 10^{-10} 4\pi^2 10^8 = 4\pi^2 10^{-2}$  Joule/Hz

b) iki adet frekans bölgesi vardır. Bunlar,



joule/Hz.

### **Örnek 4.11**

Aşağıda tanımlanan “f(t)” işlevinin spektrumu olan “F(w)” bilindiğine göre “f(t)” izinin enerjisini hesaplayınız.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

$$F(w) = \mathfrak{F}[f(t)] = \frac{2 \sin(aw)}{w}$$

### **Çözüm**

(4.17) denklemlerinden yararlanarak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{2 \sin(aw)}{w} \right]^2 dw$$

$$|t|_a^a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin^2(aw)}{w^2} dw$$

$$2a = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(aw)}{w^2} dw \rightarrow \pi a = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(aw)}{w^2} dw = \frac{\pi a}{2}$$

elde edilir.

### **Örnek 4.12**

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

tümlevini Parseval eşitliğini kullanarak hesaplayınız.

---

**Not:**

$$\frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x^2 + 1} \frac{dx}{x^2 + 1}$$

Yazılarak bağıntının sağ tarafının ikinci teriminde  $x=w$  konursa,

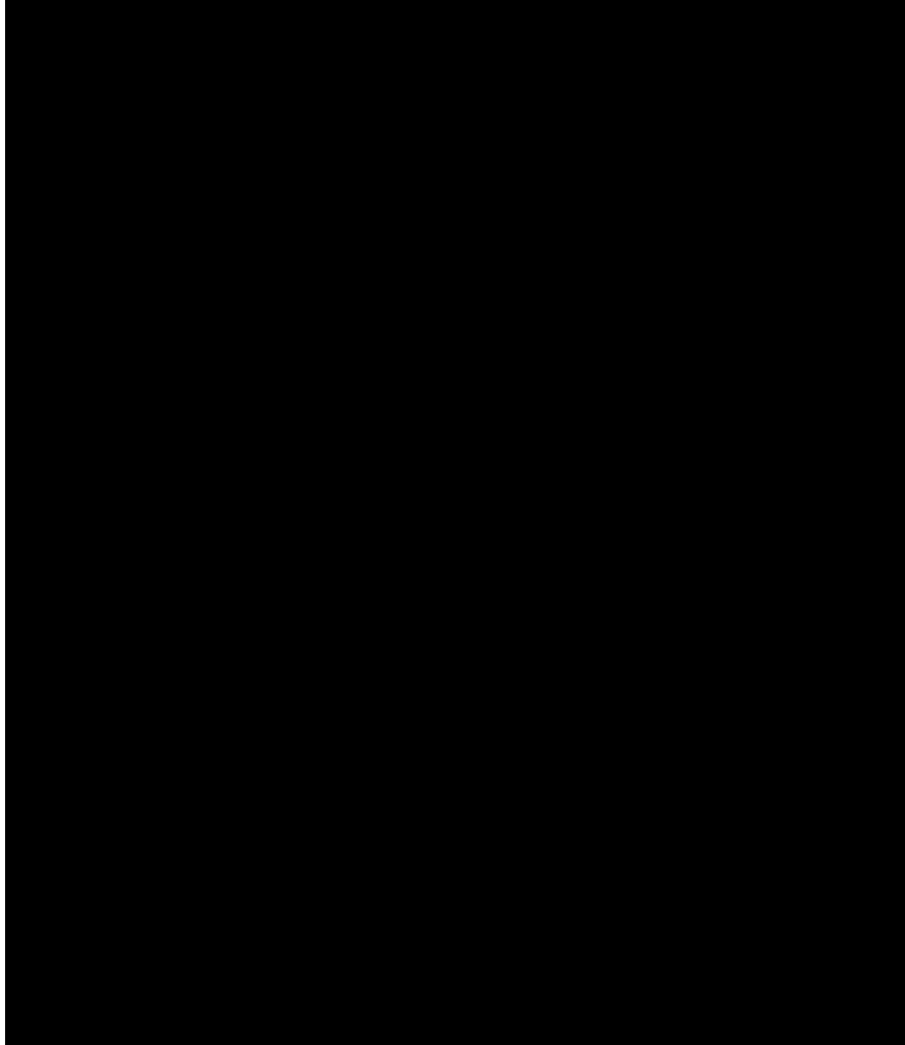
$$\frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{dw}{w^2 + 1}$$

elde edilir. Bu işlev ise  $e^{-x}$  'ın Fourier kosinüs dönüşümüdür (FCD).

---

**Çözüm**

$e^{-x}$  'ın FCD alınır (  $x>0$  için)



( $z=\pm 1$  için kutuplar, bkz bölüm 6.4). Rezidü kuramından,

$$\int_0^{\infty} f(z) dz = 2\pi j a_{-1}$$

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z)$$

dir. Buradan da

bulunur. Yani

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{iken,}$$

elde edilir.

### **Örnek 4.13**

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$$

tümlevini Parseval eşitliğini kullanarak hesaplayınız.

---

#### **Not:**

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} dx \quad \text{bağıntısında } x=w, dx=dw \text{ dönüşümü yapılırsa:}$$

$$F(w) = \int_0^{\infty} \frac{w^2}{w^2 + 1} dw \quad \text{elde edilir. Bu denklem,}$$

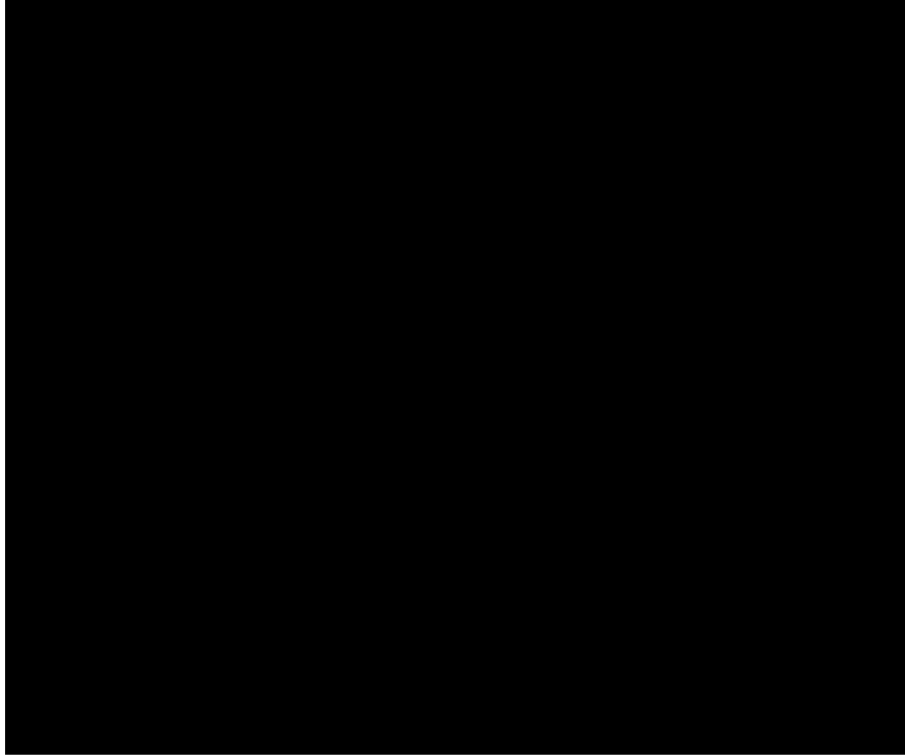
$$F(w) = \mathfrak{F}_s[f(x) = e^{-x}] = \frac{w}{w^2 + 1} \quad \text{dır. Yani}$$

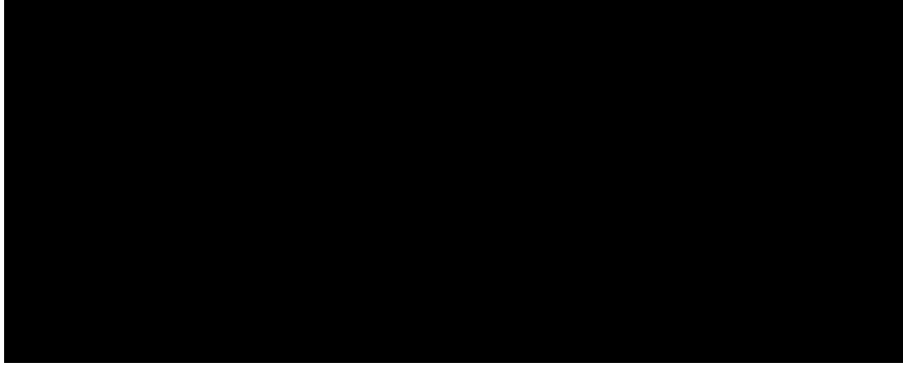
$$F_s(w) = \mathfrak{F}_s(e^{-x}) = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(wx) dx = \frac{w}{1 + w^2} \quad \text{dır.}$$

---

#### **Çözüm**

$f(x)=e^{-x}$  işlevinin sinüs dönüşümü:





$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \pi$$

elde edilir.

#### 4.3.4 Özilişki (autocorrelation)

Özilişki konusuna girmeden önce, ilişki kavramı anlaşılmalıdır. İlişki, birbirleriyle ilgisiz gibi görünen (X ve Y) iki farklı nitelik arasındaki bağılılıktır. Örneğin bir bölgede, gün bazında, yağış ve sıcaklık arasındaki bağılılık, çeşitli ülkelerdeki üniversiteyi bitirmiş kişi sayısı ile gelişmişliğin arasındaki ilişki veya bir sınıftaki öğrencilerin boy ve kiloları arasındaki ilişki aranabilir. Söz konusu farklı nitelikler, yatay ve düşey ekseninde gösterilerek bağılılığın ölçüsü bulunabilir. Nitelikler arasında gelişigüzel bir dağılım varsa, iki nitelik arasında hiçbir ilişkinin olmadığı, dağılımlar bir nokta çevresinde veya bir doğru üzerinde toplanıyorsa ilişkinin büyük olduğu söylenir. Bu çizimlere saçılma diyagramları (scatter diagram) adı verilir.

(3.12) bağıntısı ile verilen ortalama güç eşitliği kullanılarak özilişki işlevleri ile bulunabilir. (3.12) bağıntısı limit durumunda

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \lim_{\tau \rightarrow 0} f(t \pm \tau) dt$$

olarak yazılabilir.

$$P \cong \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t \pm \tau) dt \right]$$

$$R(\tau) \cong \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t \pm \tau) dt \quad (4.30)$$

(4.30) denklemleri ile verilen “R(τ)” işlevine, “f(t)” nin özilişkisi denir. (4.30) denklemleri biraz daha basitleştirilerek, “T” nin limitte sonsuza gitmesi durumunda, “1/T” çarpanına gerek kalmadan kullanılabilir.

$$R(\tau) = R_{11}(\tau) \cong \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t \pm \tau) dt \quad (4.31)$$

FD. nün zaman öteleme özelliğinden yararlanır.

$$R(\tau) = R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(w)|^2 e^{jw\tau} dw \quad (4.32)$$

Özilişki, bir işlevin kendi kendine evrişimidir. Böylece (4.1) kullanılır. Bu denklemde,  $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$  alınarak evrişim bağıntısına farklı bir yoldan da ulaşılır.

$$R(t) = f(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t \pm \tau) d\tau \quad (4.33)$$

(4.32) denkleminde (4.22) tanımını kullanılarak,

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(w) e^{jw\tau} dw = \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 e^{jw\tau} dw \quad (4.34)$$

ve tersi olarak,

$$S_{11}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau) e^{-jw\tau} d\tau \quad (4.35)$$

dır. (4.22) tanımından yararlanarak,

$$S_{11}(w) = |F_1(w)|^2 = F_1 * F_1(w) \text{ ve } F_1(w) = \mathfrak{F}[f_1(t)] \quad (4.36)$$

olarak yazılır. (4.35 ve 4.36) bağıntıları, özilişki ve güç yoğunluğu spektrumunun FD. çifti oluşturduğunu gösterir (bkz. Wiener-Kintchine bağıntıları bölüm 4.5).

$$R_{11}(\tau) \Leftarrow \text{FD} \Rightarrow S_{11}(w) \quad (4.37)$$

$R_{11}(\tau)$  işlevi, gerçel ve çifttir (özilişki işlevi özellikleri). Bu nedenle,

$$S_{11}(w) = -S_{11}(w) \quad (4.38)$$

$$S_{11}(w) = 2 \int_0^{\infty} R_{11}(\tau) \cos(w\tau) d\tau \quad (4.39)$$

dır.  $\tau=0$  kaymadaki özilişki, aynı zamanda sinyalin enerjisidir.

$$\begin{aligned} R_{11}(\tau = 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(w) dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(w)]^2 dw \end{aligned} \quad (4.40)$$

Özilişkinin sıfır kaymaya oranı normalleştirilmiş veya indirgenmiş özilişkidir.

$$R'_{11}(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(\tau=0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t+\tau) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\tau) f(\tau-t) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f^*(\tau) d\tau} \quad (4.41)$$

Normalleştirilmiş özilişki işlevi, sıfır kaymada "1" değerini alır ve birimsizdir (özilişki hesaplayan program Ek2 Pr1de verilmiştir).

### Özilişkinin Özellikleri

$$1. R(-\tau) = R(\tau) \quad (4.42)$$

" $R(\tau)$ ", " $\tau$ " nun bir çift işlevidir. Başka bir deyişle, gelişigüzel verilerin özilişkisi mutlaka çift işlevdir.

$$2. R(\tau=0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt \quad (4.43)$$

Gelişigüzel verilerin sıfır kaymadaki özilişki işlevi, verinin ortalama karesel değerine (değişinti, varyans) eşittir. İstatistikten anımsandığı gibi ortalama değeri sıfır olan gelişigüzel bir zaman dizisindeki değişinti;

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt \quad (4.44)$$



denklemi ile verilir. (4.43) ile (4.44) denklemlerinin sağ tarafları birbirlerine eşittir. Bu nedenle;

$$P = \lim_{\tau \rightarrow 0} R(\tau) = R(\tau = 0) = \sigma^2 \quad (4.45)$$

yazılabilir.

**3.** Eğer “f(t)” işlevi “T” ile dönemli ise, “R(τ)” işlevi de “T” ile dönemlidir.

**4.** Tek yanlıdır. Yani her “f(t)” işlevinin özilişki işlevi hesaplanabilir. Ancak elde edilen özilişki işlevinden hareketle “f(t)” işlevi elde edilemez. Başka bir deyişle aynı özilişki işlevine sahip “∞” sayıda işlev bulunabilir. Bu özelliğin nedeni, özilişkide “f(t)” dizisine ilişkin evre bilgilerinin yitmesidir.

#### 4.3.5 Ayrık verilerde özilişki

Ayrık değerler, kullanılarak özilişki ve normalleştirilmiş özilişki (4.34 ve 4.41 denklemleri) aşağıdaki gibi yazılır.

$$R_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n f_{n+k} \quad (4.46)$$

$$R'_k = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} f_n f_{n+k}}{\sum_{n=0}^{N-1} f_n^2} \quad (4.47)$$

Son denklemlerde,

$R_k$ : Ayrık özilişki değerleri,

$R'_k$ : ayrık normalleştirilmiş özilişki,

$f_n$ : özilişkisi alınacak ayrık dizi,

$n$ : ayrık dizinin sayıcısı,

$k$ : kayma sayıcısı,

$N$ : özilişkisi alınacak sayısal dizideki nokta sayısıdır.

Özilişki, bir dalgacığın kendisi ile evrişimi olduğuna göre evrişimde kullanılan tüm kurallar geçerlidir. Önemli fark, dalga ters çevrilir ve ters çevrilmemiş dalgacık ile evrişimi bulunur. Ayrık evrişim için kullanılan kurallar özilişki için de geçerlidir. Ayrık özilişki,

**1.** seriler,

**2.** katlama yöntemi,

**3.** “z” dönüşümü (Bkz Bölüm 6.4 Örnek 6.8),

yöntemleri kullanılarak elde edilir.

### 4.3.6 Çapraz (veya karşıt) ilişki (cross correlation), çapraz spektrum (cross spectrum)

İki işlev arasındaki ilişki, çapraz ilişkidir (cross correlation).

$$R_{12}(\tau) \cong \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t \pm \tau) dt \quad (4.48)$$

Bu denklem “f<sub>1</sub>(t)” ve “f<sub>2</sub>(t)” işlevleri arasındaki çapraz ilişkiyi verir.

**Not:** f<sub>1</sub>(t)= f<sub>2</sub>(t) olarak alınması durumunda aynı işlevin özilişkisine ulaşılır.

“1/T” çarpanı kaldırılarak çapraz ilişki, izleyen denklemlerle verilir.

$$R_{12}(\tau) \cong \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t \pm \tau) dt \quad (4.49)$$

$$R_{12}(\tau) \cong \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) f_1(t + \tau) dt \quad (4.50)$$

Normalleştirilmiş çapraz ilişki ( $R'_{12}$ ), en büyük değer “1” olacak biçimde elde edilir.

$$R'_{12} = \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}R_{22}}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)]^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(t)]^2 dt}} \quad (4.51)$$

dir. Ek3 Pr2 de “normalleştirilmiş çapraz ilişki programı verilmiştir.

Çapraz ilişki, özilişkinin tersine olarak bakışımsızdır.

$$R_{12} \neq R_{21} \quad (4.52)$$

Çapraz ilişki en büyük değer herhangi bir kaymada görülebilir. Böylece, f<sub>1</sub>(t) ve f<sub>2</sub>(t) sinyallerinin hangi ötelemede, birbirlerine ne oranda benzedikleri, anlaşılır. Diğer bir deyişle, çapraz ilişki, iki ayrı işlevin çeşitli kaymalarda, birbirlerine benzerliğinin bir ölçüsüdür.

Çapraz ilişkinin FD alınarak çapraz spektrum elde edilir.

$$R_{12}(w) = \mathfrak{F}[R_{12}(\tau)]$$

İşlevlerin gerçel kısımlarının ortak çapraz spektrumuna (co-spectrum), ortak gerçel spektrum (OGS) denilir. Benzer biçimde sanal kısımlarının ortak çapraz spektrumuna (quad-spectrum), ortak sanal spektrum (OSS) denilir (Bkz bölüm 4.4).

$$Ger[R_{12}(w)] \Rightarrow \text{OGS (co-spectrum)}$$

$$San[R_{12}(w)] \Rightarrow \text{OSS (quad-spectrum veya quadratic spectrum)}$$

Ayrık verilerin çapraz ilişkisi, verilerin evrişiminin yapılması anlamındadır. Yalnız çapraz ilişkinin, evrişimden önemli farkı, hiçbir dalgacığın ters çevrilmemesidir.

### Çapraz ilişkinin özellikleri

$$1. R_{12}(-\tau) = R_{21}(\tau) \quad (4.53)$$

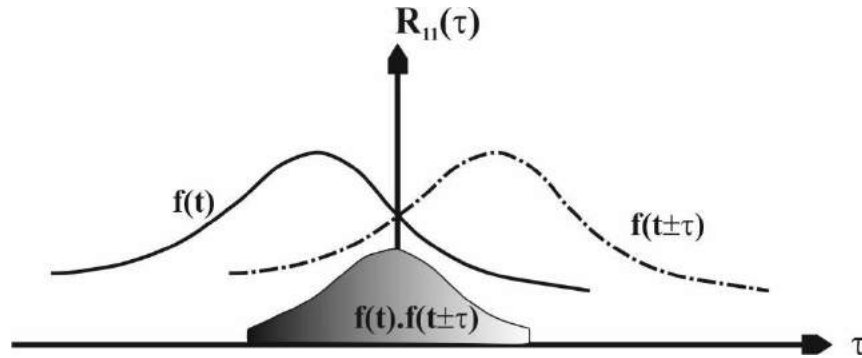
$$2. |R_{12}(\tau)| \leq \sqrt{R_{11}(\tau=0) \cdot R_{22}(\tau=0)} \quad (4.54)$$

$$3. R_{12}(\tau) \leq \frac{1}{2} [R_{11}(\tau=0) + R_{22}(\tau=0)] \quad (4.55)$$

4.  $R_{12}(\tau)=0$  ise  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  işlevleri ortogonaldır.

### Örnek 4.14

Gauss çanının özilişkisi şekil 4.23 te verilmektedir.



Şekil 4.23 Gauss çanının özilişkisi

Özilişki, bakışiktır ve “0” kaymada, en büyük değerini almaktadır. Sıfır kaymaya oranıyla normalleştirilmiş özilişki elde edilir

$$R'_{11}(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(\tau=0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t+\tau) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\tau) f(\tau-t) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f^*(\tau) d\tau} \quad (4.41)$$

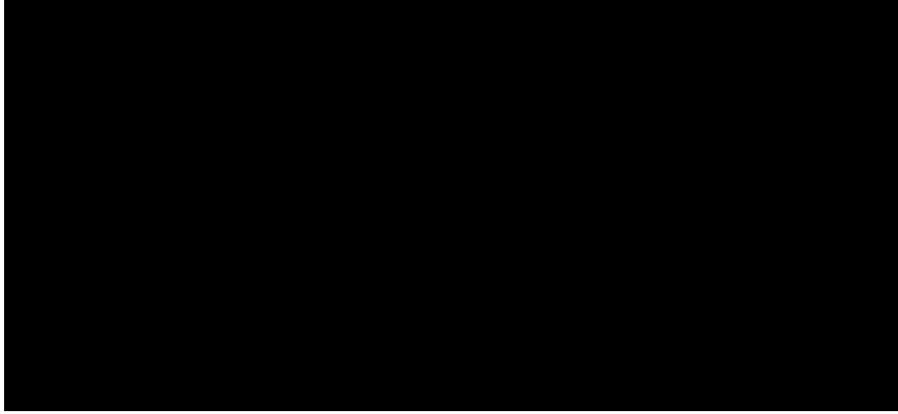
### **Örnek 4.15**

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

ile verilen  $f(t)$  işlevinin normalleştirilmiş özilişki işlevini bulunuz.

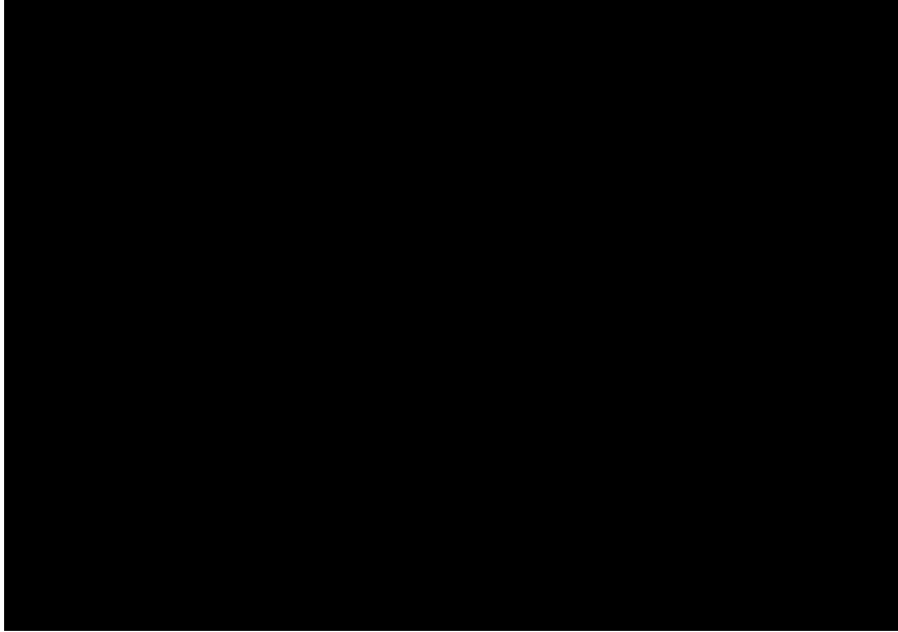
#### ***Çözüm***

**a)** (4.41) eşitliği kullanılır.



**b)** Aynı problem farklı olarak aşağıdaki gibi de çözülebilir.

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t + \tau)dt$$



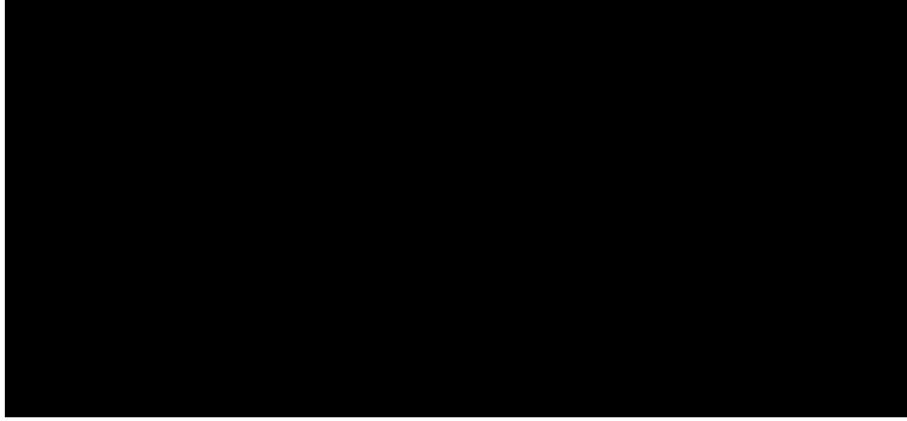


**Örnek 4.16**

(1,2,4,1) dalgacığının özilişkisini bulunuz.

***Çözüm***

**Seriler yöntemiyle:**



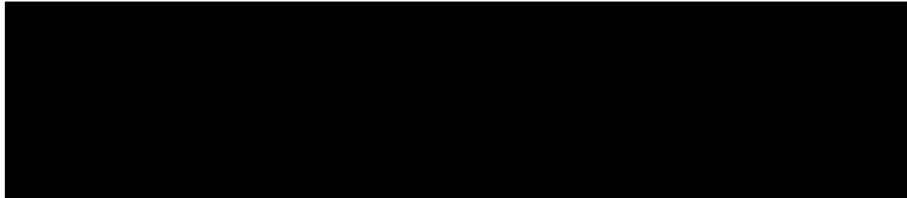
**Şekil 4.24** Seriler yöntemiyle özilişkinin bulunması

**Örnek 4.17**

Örnek 4.16 da elde ettiğiniz özilişkiyi normalleştiriniz

***Çözüm***

(4.41) denkleminde  $R'_{11}(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(\tau=0)}$  dir. Normalleştirilmiş özilişki



**Not:**  $\tau=0$  kaymadaki özilişki

$R_0 = 1.1 + 2.2 + 4.4 + 1.1 = 1 + 4 + 16 + 1 = 22$  birimdir. Bu değer aynı zamanda sinyalin enerjisidir.

	$b_2$	$b_1$	$b_0$	
$b_0$	$b_0b_2$	$b_0b_1$	$b_0b_0$	$r_2 = b_2b_0$ $r_1 = b_2b_1 + b_1b_0$
$b_1$	$b_1b_2$	$b_1b_1$	$b_1b_0$	$r_0 = b_0b_0 + b_1b_1 + b_2b_2$
$b_2$	$b_2b_2$	$b_2b_1$	$b_2b_0$	$r_{-1} = b_0b_1 + b_1b_2$ $r_{-2} = b_2 + b_0$

**Şekil 4.25** Dizey yöntemiyle özilişkinin bulunması

**c. Katlama yöntemiyle:**

	$b_3$	$b_2$	$b_1$	$b_0$	
	1	4	2	1	$r_{-3} = 1$
$b_0$ 1	1	4	2	1	$r_{-2} = 6$
$b_1$ 2	2	8	4	2	$r_{-1} = 14$
$b_3$ 4	4	16	8	4	$r_0 = 22$
$b_4$ 1	1	4	2	1	$r_1 = 14$
					$r_2 = 6$
					$r_3 = 1$

**Şekil 4.26** Katlama yöntemiyle özilişkinin bulunması

**Çapraz ilişkinin özellikleri**

$$R_{12}(-\tau) = R_{21}(\tau)$$

$$|R_{12}(\tau)| \leq \sqrt{R_{11}(\tau = 0) \cdot R_{22}(\tau = 0)}$$

$$R_{12}(\tau) \leq \frac{1}{2} [R_{11}(\tau = 0) + R_{22}(\tau = 0)]$$

$R_{12}(\tau)=0$  ise  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  işlevleri ortogonaldır.

### **Örnek 4.18**

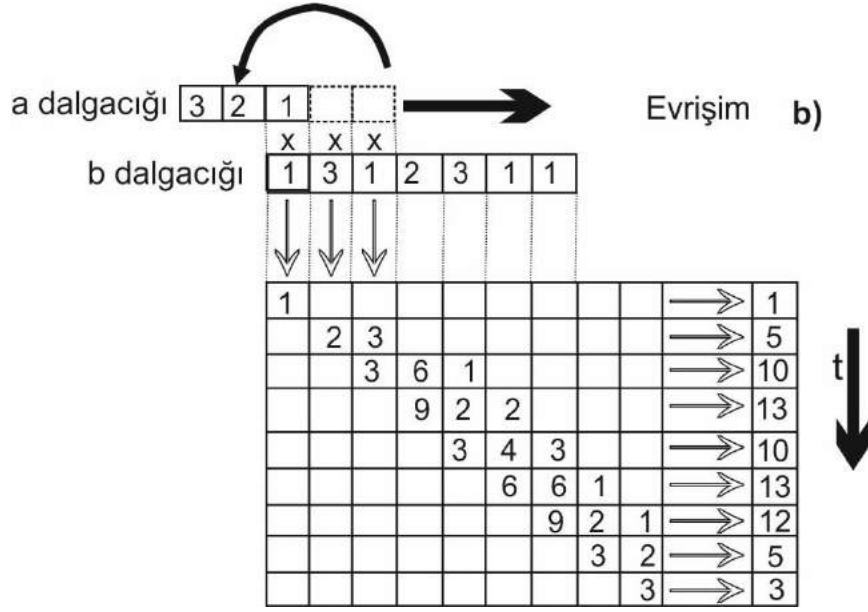
(1,2,3), (1,3,1,2,3,1,1) izlerinin çapraz ilişkisi ve evrişimini bulunuz.

### ***Çözüm***

İzlerin çapraz ilişkisi ve evrişimi Şekil 4.27 da verilmektedir.

a dalgacığı	1	2	3					→	Çapraz ilişki a)		
	x	x	x								
b dalgacığı	1	3	1	2	3	1	1				
	↓	↓	↓								
	1	6	3					→	10		
		3	2	6				→	11		
			1	4	9			→	14		
				2	6	3		→	11		
					3	2	3	→	8		
						1	2	0	→	3	
							1	0	0	→	1

t ↓

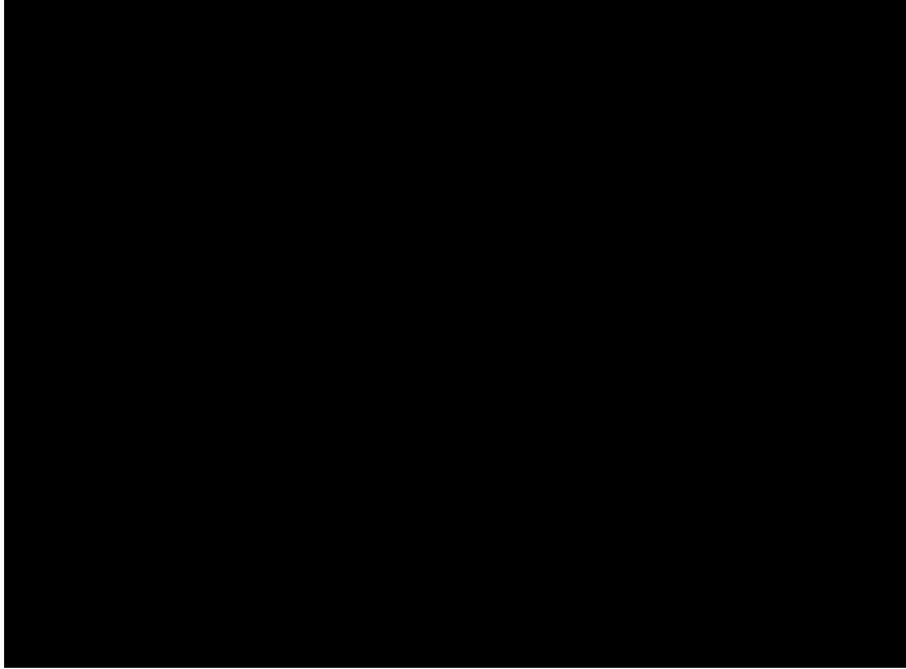


Şekil 4.27 a) Çapraz ilişki b) evrişimin (Lindseth 1982)

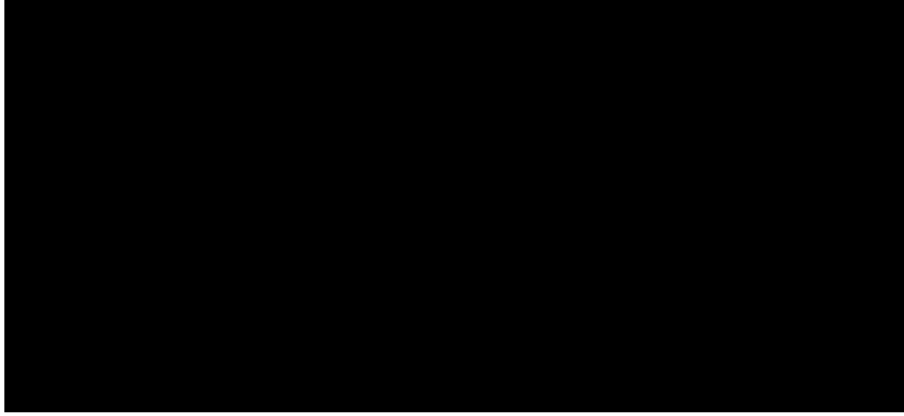
**Örnek 4.19**

$f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  işlevlerinin çapraz ilişkileri ile  $f_1(t)$  ve  $f_2(-t)$  işlevlerinin evrişimlerinin aynı olduğunu gösteriniz.

**Çözüm**







Sonuç olarak;  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  işlevlerinin çapraz ilişkilerinin alınması ile, işlevlerden bir tanesinin ters çevrilerek evrişimlerinin alınması aynı işlemdir.

#### **Örnek 4.20**

“T” ile dönemli, iki işlev arasındaki çapraz ilişki (4.45) denkleminde verilmektedir.

a) İki işlev arasında  $R_{12}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c_{1n}^* c_{2n}] e^{-jn\omega\tau}$  ilişkisinin varlığını gösteriniz.

b)  $\overline{R_{ff}}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{jn\omega\tau}$  olduğunu gösteriniz.

---

**Not:**  $\omega=2\pi/T$  (temel frekans) ve “ $c_n$ ” ler,  $f(t)$  işlevinin karmaşık Fourier katsayılarıdır. “ $c_{1n}^*$ ” ise  $c_{1n}$ ’ in karmaşık eşleniğidir.

---

#### **Çözüm**

a) Çapraz ilişki,

$$R_{12}(\tau) \cong \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t-\tau) dt \quad (4.48)$$

bağıntısıyla verilmiştir.





b) (4.58) denkleminde  $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$  alınarak çözüme ulaşılır.

$$\overline{R_{ff}}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n^* c_n}_{|C_n|^2} e^{-jn\omega\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{-jn\omega\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{jn\omega\tau}$$

### **Örnek 4.21**

Normalleştirilmiş çapraz ilişki (4.51) ve denklemini aşağıda verilen korelasyon (ilişki) katsayısının “0” kaymada birbirine eşit olduğunu gösteriniz.

**Çözüm**

$$R'_{12} = \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}R_{22}}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)]^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(t)]^2 dt}} \quad (4.51)$$

Korelasyon katsayısı:

$$K = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} (x - x_{ort})(y - y_{ort})}{[\sum_{-\infty}^{\infty} (x - x_{ort})^2 \sum_{-\infty}^{\infty} (y - y_{ort})^2]^{1/2}}$$

$x-x_{ort}=f_1(t)$  ve  $y-y_{ort}=f_2(t)$  ile gösterilsin. Bu koşulda korelasyon katsayısı bağıntısı,

$$K = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)}{[\sum_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)]^2 \sum_{-\infty}^{\infty} [f_2(t)]^2]^{1/2}} \quad (4.60)$$

yazılır. Tümler ve toplam yer değiştirilerek,

$$K = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)]^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(t)]^2 dt\right]^{1/2}}$$

elde edilir.

### **Örnek 4.22**

a=1,2,3 ve b=1,3,1,2,3,1,1 dalgacıklarının normalleştirilmiş çapraz ilişkilerini bulunuz.

#### **Çözüm**

(4.51) bağıntısından yararlanılır.

$$R_{11}=1.1+2.2+3.3=14 \text{ (birim)}^2$$

$$R_{22}= 1.1+3.3+1.1+2.2+3.3+1.1+1.1=26 \text{ (birim)}^2$$

$$R_{12}=1,5,10,13,10,13,12,5,3$$

$R_{12}$  de ilk(1) ve son (3) değerleri kullanılan algoritma (ekpr2) nedeniyle atılır



elde edilir. Sonuca dikkat edilirse, en büyük değer 0.68 dir. Oysa normalleştirme gereği, bu değer “1” olmalıdır. Bu nedenle elde edilen sayısal bir kez daha normalleştirilir (ekpr2 bu şekilde çalışmaktadır).

### **Genlik ve güç spektrumları**

FD. kullanılarak genlik spektrumu,

$$|F(w)| = \left\{ \left\{ \text{Ger}[F(w)] \right\}^2 + \left\{ \text{San}[F(w)] \right\}^2 \right\}^{1/2}$$

$$|C_n| = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$$

dır. Güç ve genlik spektrumu arasındaki ilişki ise; (4.20) denklemleri ile bilinmektedir.

$$S(w) = |F(w)|$$

Güç yoğunluğu (kısaca güç) spektrumu;

$$S(w) = \text{Ger}[F^2(w)] + \text{San}[F^2(w)] \quad (4.72)$$

olarak tanımlanabilir.

#### 4.4 GÜÇ YOĞUNLUĞU (GÜÇ) SPEKTRUMU

Güç spektrumu, Jeofizikte yaygın kullanılır. Özellikle, potansiyel alanlarda, anomaliye kaynak olan yapıların ortalama derinliklerinin bulunmasında, yararlanılan önemli yöntemlerden bir tanesidir. Güç spektrumunun kayan pencere olarak uygulanmasıyla değerlendirme ve yorum kolaylıkları elde edilir (Akçığ, Z., Pınar, R.,1990).

Sinyallerin enerjileri ve ortalama güç tanımları bölüm 3.4 te verilmiştir. İlgili bağıntılar;

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{Joule}) \quad (3.10)$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \quad (3.12)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \quad (3.14.a)$$

dır. Dönemi belirli bir izin ortalama gücü (3.12) denkleminle bilinir.

Yukarıda değinilen olay bölüm 3, örnek 3.4 te verilmiştir. Örnek 3.4 incelendiğinde, f(t) izinin enerjisinin sonsuz, ancak ortalama gücünün sonlu olduğu anlaşılır (güç sinyali, tekil sinyal).

(3.10-3.11a) denklemleri, zaman ortamındaki dönemsiz bir işlevin enerji spektrumudur (Parseval kuramı). İlgili bağıntılar aşağıda verilmiştir.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 df \quad (4.17)$$

Enerji “E” ve güç “P” arasındaki ilişki

$$P = E/T \quad (4.61)$$

dır. Enerjinin belirlenmiş bir zaman aralığı oranı güçtür.

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \quad (4.18)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (4.19)$$

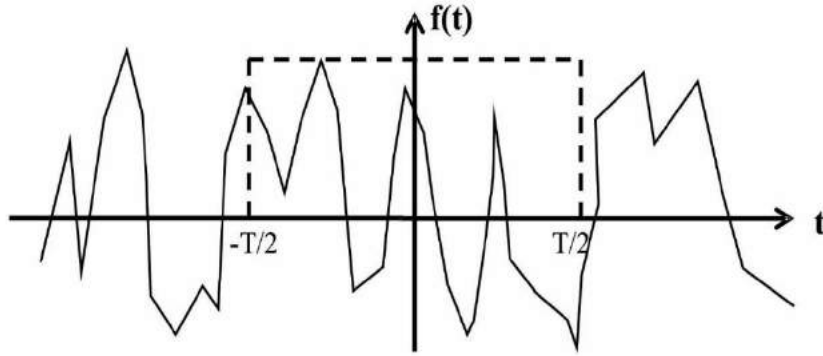
$F(w) = \mathfrak{F}[f(t)]$  olarak tanımlandığından

$$P(w) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(w)|^2}{T}$$

$$S(w)=|F(w)|^2=E_{11}(w) \quad (4.22)$$

(4.22), (3.10) eşitliğine benzer biçimde enerjidir (spektral ortamda). Bu nedenle enerji spektrumu veya spektral enerji yoğunluğu olarak isimlendirilir.  $E_{11}(w)=|F_1(w)|^2$  olduğuna 4.36-4.38 denklemlerinden kolayca ulaşılabilir.

Şekil 4.28 de verilen sinyalin gücü aşağıdaki bağıntıyla verilir.



Şekil 4.28 Gelişigüzel bir f(t) sinyali

Yukarıda verilen denklemlerden yararlanarak,

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(w) dw = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \quad (4.62)$$

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(w)|^2}{T} \right) dw \quad (4.63)$$

$$P = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(w)|^2}{T} \quad (4.64)$$

elde edilir. Son bağıntılar, "T" aralığındaki bir sinyalin gücünü verir. Şimdiye dek, tek bir sinyalin "güç spektrumu/güç yoğunluğu spektrumu" anlatılmıştır. Oysa iki ayrı sinyalin birlikte olan ortak güç spektrumu da kullanılır. Buna "çapraz güç spektrumu/ çapraz güç yoğunluğu spektrumu" adı verilir. (4.22) denklemi ile verilen güç spektrumu daima gerçel ve pozitifdir.

Bir f(t) işlevinin FD.

$$F(w) = \mathfrak{F}[f(t)] = Ger[F(w)] + San[F(w)] = a(w) + jb(w)$$

Olarak gösterilebilir (bölüm 2-3). İki farklı işlev arasında kurulan çapraz güç yoğunluğu izleyen bağıntıyla verilir.

$$S_{12}(w)=\Gamma_{12}(w)-jQ_{12}(w)=F_1^*(w).F_2(w) \quad (4.65)$$

Son eşitlikte,

$\Gamma_{12}(w)$  : iki değişkenin gerçel kısımlarının ortak spektrumudur (co-spectrum). Kısaca “OGS” olarak gösterilmiştir.

$Q_{12}(w)$  : iki değişkenin sanal kısımlarının ortak spektrumudur (quadrature spectrum veya quad-spectrum). Kısaca “OSS” olarak gösterilmiştir.

İki değişkene ait, frekans ortamı ortak spektrumları yukarıda tanımlanmıştır. Eğer işlev, zaman (uzay) ortamında da tanımlanmışsa spektrum yerine bileşen olarak isimlendirilecektir. Bu durumda gerçel ve sanal bileşenler kısaca “GB” ve “SB” olarak tanımlanacaktır (Bkz analitik sinyal, bölüm 6.3.1). OGS ve OSS izleyen denklemlerle verilir.

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}(w) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [R_{12}(\tau) + R_{21}(\tau)] \cos(w\tau) d\tau \\ &= a_1(w) \cdot a_2(w) + b(w) \cdot b_2(w)\end{aligned}\quad (4.66)$$

$$\begin{aligned}Q_{12}(w) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [R_{12}(\tau) - R_{21}(\tau)] \sin(w\tau) d\tau \\ &= a_1(w) \cdot b_2(w) - a_2(w) b_1(w)\end{aligned}\quad (4.67)$$

$$\Gamma_{12}(w) = \Gamma_{21}(w), \quad Q_{12}(w) = -Q_{21}(w), \quad Q_{11}(w) = -Q_{22}(w) = 0$$

Ortak evre spektrumu (OES) aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\Phi(w) = -tg^{-1} \frac{Q_{12}(w)}{\Gamma_{12}(w)} \quad (4.70)$$

Son eşitlik, bölüm 2 de (2.19) eşitliği ile verilen evre spektrumu ile aynı değildir. Burada verilen iki ayrı sinyalin ortak evre spektrumlarıdır.

İki ayrı sinyalin tutarlık/uyumluk ilişkisi (coherence),

$$|K_{12}(w)| = \frac{|S_{12}(w)|}{\sqrt{S_{11}(w)S_{22}(w)}} = \sqrt{\frac{\Gamma_{12}^2(w) + Q_{12}^2(w)}{\Gamma_{11}(w)\Gamma_{22}(w)}} \quad (4.71)$$

dır. Son bağıntıda aşağıdaki tanımlar geçerlidir (4.22 eşitliğinden)

$S_{11}$ :  $f_1(t)$  işlevinin enerji yoğunluk spektrumu

$S_{22}$ :  $f_2(t)$  işlevinin enerji yoğunluk spektrumu

$S_{12}$ :  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  işlevlerinin çapraz güç spektrumu

“ $K_{12}(w)$ ” birimsizdir. Kuramsal olarak 1 olmak zorundadır. Dolayısıyla frekanstan bağımsızdır. Ancak uygulamada verinin kesilmesi (pencereleme), gürültü ve başka nedenlerden ötürü “1” den farklı bir değer alır. OGS, OSS ve OES hesaplayan spektral tutarlık ilişki programı Ek4 Pr3 te verilmiştir.

---

**Not:**

\* (4.71) bağıntısında sinyallerin enerji yoğunluk spektrumları kullanılmıştır. (4.22) eşitliğinde enerji yoğunluk spektrumu, sinyalin karesidir.  $S(w)$  yerine  $F(w)$  (sinyalin spektumu) kullanılabilir. Bu koşulda (4.71) bağıntılarında  $S(w)$  yerine  $F(w)$  yazılabilir.

\* Tutarlık ilişkisi olan (4.71) bağıntısı iki işlev için

$$|K_{12}(w)| = \frac{|F_{12}(w)|}{\sqrt{F_{11}(w) \cdot F_{22}(w)}}$$

olarak yazılır. Burada,

$$F_{12}(w) = F_1^*(w) \cdot F_2(w) = |F_1(w)| \cdot |F_2(w)|, \quad |F_{12}(w)|^2 = |F_1(w)|^2 |F_2(w)|^2,$$

$$F_{11}(w) = |F_1(w)|^2, \quad F_{22}(w) = |F_2(w)|^2, \quad |F_{12}(w)|^2 = F_{11}(w) F_{22}(w)$$

dır. “\*” karmaşık eşleniktir. Söz konusu parametreler,  $K_{12}(w)$  bağıntısında yerine konulursa  $K_{12}(w)=1$  elde edilir.

---

**Genlik ve güç spektrumları**

FD. kullanılarak genlik spektrumu,

$$|F(w)| = \left\{ \{ \text{Ger}[F(w)] \}^2 + \{ \text{San}[F(w)] \}^2 \right\}^{1/2},$$

$$|C_n| = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$$

dır. Güç ve genlik spektrumu arasındaki ilişki ise; (4.20) denklemleri ile bilinmektedir.

$$S(w) = |F(w)|^2$$

Güç (güç yoğunluğu) spektrumu;

$$S(w) = \text{Ger}[F^2(w)] + \text{San}[F^2(w)] \quad (4.72)$$

olarak tanımlanabilir.

## 4.5 WIENER-KİNTCHINE KURAMI

Wiener-Kintchine denklemi,

$$\mathfrak{F}^{-1} \left[ |F(w)|^2 \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 e^{jw\tau} dw \quad (4.73)$$

olarak verilir.  $\tau=0$  kaymada ise,

$$R(\tau = 0) = \mathfrak{F}^{-1} \left[ |F(w)|^2 \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \quad (4.74)$$

elde edilir. Öte yandan özilişki işlevinin  $\tau=0$  kaymadaki değeri (4.33) den yararlanarak

$$R(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (4.75)$$

bulunur. (4.22) tanımının (4.62) de kullanılması durumunda

$$R(\tau = 0) = \mathfrak{F}^{-1} [S(w)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(w) dw \quad (4.76)$$

dır. Son bağıntıdan hareketle

$$R(\tau) = \mathfrak{F}^{-1} [S(w)] \rightarrow R(\tau = 0) = \mathfrak{F}^{-1} [S(w)] \quad (4.77)$$

$$S(w) = \mathfrak{F} [R(\tau)] \rightarrow S(w) = \mathfrak{F} [R(\tau = 0)] \quad (4.78)$$

en genel durum elde edilir. Bu eşitlikler Wiener-Kintchine bağıntısının bir sonucudur ve Wiener kuramı olarak bilinir. (4.77-4.78) denklemleri; güç yoğunluğu spektrumu  $S(w)$  ile, sıfır kaymadaki özilişkinin  $R(\tau)$  FD çifti oluşturduğunu gösterir. Öyleyse,

$$S(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-jw\tau} d\tau \rightarrow R(\tau = 0) = \mathfrak{F}^{-1} [S(w)] \quad (4.79)$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(w) e^{jw\tau} dw \rightarrow S(w) = \mathfrak{F} [R(\tau = 0)] \quad (4.80)$$

olarak tanımlanır. (4.79-4.80) bağıntıları Wiener-Kintchine bağıntıları olarak bilinir. “P” ortalama güç, “S(w)” cinsinden

$$P = \lim_{\tau \rightarrow 0} R(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} S(w) e^{jw\tau} dw \quad (4.81)$$



$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S(w)dw \quad (4.82)$$

elde edilir. Son bağıntı, güç spektrumunun, özilişki işlevinin FD'nün sıfır kaymadaki değerine eşit olduğunu gösterir.

---

**Not:**  $\tau=0$  kayma için (4.40) denklemi (4.35) e döner.

---

#### 4.6 GÜÇ SPEKTRUMUNUN ÖZELLİKLERİ

Güç spektrumu, sıfır kaymadaki özilişki işlevinin FD'ü olduğundan, özilişki işlevinin tüm özelliklerini içerir.

1. Özilişki işlevi bakışık olduğundan güç spektrumu da bakışiktir (4.39-4.40 denklemleri).

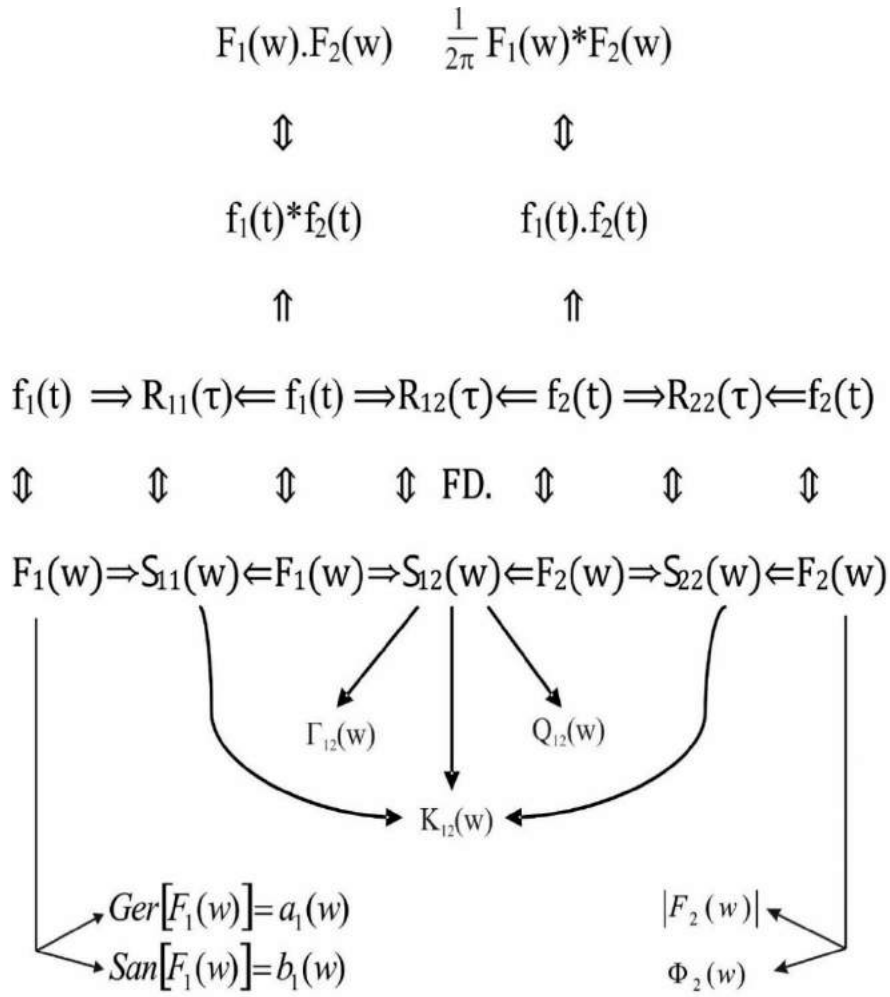
$$S_{11}(w) = 2 \int_0^{\infty} R_{11}(\tau) \cos(w\tau) d\tau \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} R_{11}(\tau = 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(w)]^2 dw \end{aligned} \quad (4.40)$$

2. Güç spektrumunun bakışık olması nedeni ile spektrum ortamında sanal terim ortadan kalkar dolayısı ile güç spektrumunun, evre spektrumu yoktur. Oysa bir sinyal spektrum ortamında ancak genlik ve evre spektrumu ikilisi ile tanınır. Yine bu ikiliden ters dönülerek zaman ortamındaki sinyal bulunabilir. Eğer bu ikiliden bir tanesi tanımlanamıyorsa, ters dönüşlerde asıl sinyal bulunamaz. Evre spektrumu olmadığından, ters dönerek zaman ortamındaki orijinal sinyal belirlenemez. Başka bir deyişle farklı birçok sinyalin güç spektrumu aynı olabilir.

3. Güç spektrumu (4.62) bağıntılarından da görüldüğü gibi sürekli bir işlevdir ve sonlu bir değere sahiptir. Dolayısı ile TFD bulunabilir (ancak orijinal sinyal elde edilemez). Benzer bir şekilde gelişigüzel tüm işlevlerin özilişkilerinin FD alınarak güç spektrumu elde edilebilir.

Özilişki, çapraz ilişki, güç spektrumu, tutarlılık spektrumunun zaman ve frekans ortamlarındaki ilişkileri, öz olarak şekil 4.29 da verilmiştir.

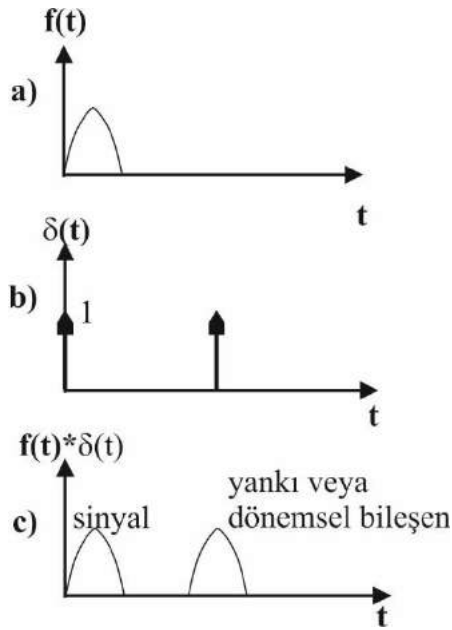


**Şekil 4.29** Zaman ve frekans ortamlarında, özilişki, çapraz ilişki, güç spektrumu, tutarlılık spektrumu arasındaki ilişkiler.

- $R_{11}(\tau)$  :  $f_1(t)$  işlevinin özilişkisi
- $R_{22}(\tau)$  :  $f_2(t)$  işlevinin özilişkisi
- $R_{12}(\tau)$  :  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  işlevlerinin çapraz ilişkisi
- $S_{11}(w)$  :  $f_1(t)$  işlevinin güç spektrumu
- $S_{22}(w)$  :  $f_2(t)$  işlevinin güç spektrumu
- $S_{12}(w)$  :  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  işlevlerinin güç spektrumu
- $K_{12}(w)$  :  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  işlevlerinin tutarlılığı
- $\Gamma_{12}(w)$  : Güç spektrumunun gerçel kısmı (4.66 bağıntısı)
- $Q_{12}(w)$  : Güç spektrumunun sanal kısmı (4.67 bağıntısı)

## 4.7 KARMAŞIK KEPSTRUM

Bogert ve diğ (1969), bir sinyalin spektrumunun logaritmasını kullanarak, sinyal içinde dönemli yinelenen bileşenlerin bulunarak giderilebileceğini göstermişlerdir. Yinelenen olay (bileşen), sinyalin herhangi bir yere çarparak, yankılanması sonucu elde edilen sinyal düşünülebilir. Şekil 4.28 de bir sinyal içinde dönemli olarak 2 kez yinelenen birim dürtü biçimli olay verilmiştir. İçinde dönemli bileşeni barındıran sinyal ise her ikisinin evrişimidir.



Şekil 4.28 a) sinyal b) birim dürtü biçiminde dönemli olarak yinelenen bileşen (yankı) c) içinde dönemli bileşen bulunan,  $f(t)*\delta(t)$  oluşmuş sinyal.

Yinelenen bileşenler, logaritmik spektrum kullanılarak bulunabilir. Logaritmik spektrumun elde edilmesi için güç spektrumu ve özilişki kullanılır. Güç spektrumu,

$$S(w)=|F(w)|^2 \quad (4.22)$$

ve bir işlevin özilişkisi

$$S_{11}(w)=|F_1(w)|^2 \quad (4.36)$$

eşitlikleri ile verilmiştir. Güç spektrumu ile özilişki Winner – Kintcine kuramından (4.77-4.48 bağıntıları) FD çifti oluşturur. (4.22-4.36) bağıntılarından aşağıdaki eşitliklere ulaşılır.

$$F(w) = \mathfrak{Z}[f(t)] \text{ veya } F_1(w) = \mathfrak{Z}[f_1(t)] \text{ dir.}$$

FD leri kutupsal biçimde (2.46) eşitliği ile verilmiştir.

$$F(w) = |F(w)|e^{j\Phi(w)}$$

(2.46)

Her iki tarafın doğal logaritması alındığında

$$\ln[F(w)] = \ln|F(w)| + j\Phi(w)$$

(4.41)

Kepstrum'a (cepstrum) ulaşılır. Kepstrum aynı zamanda kaymanın da bir işlevidir.

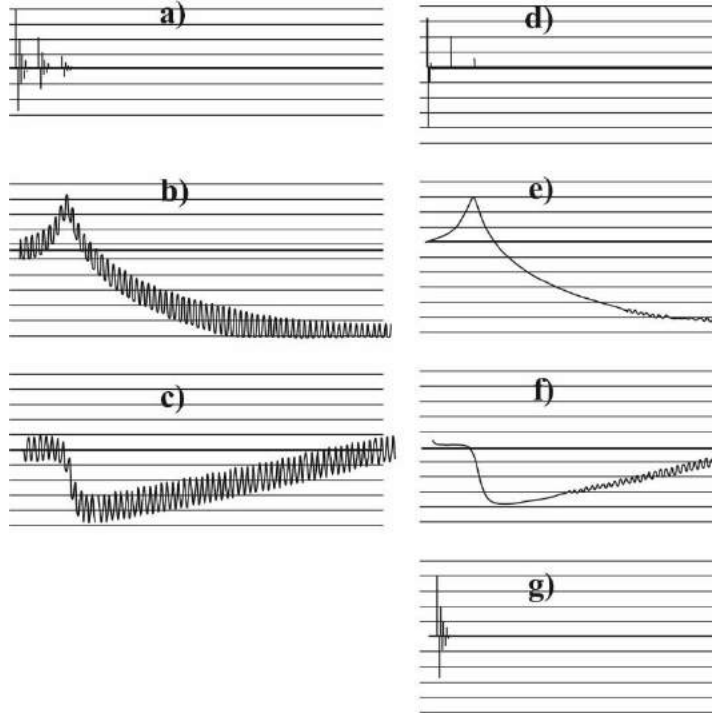
$\ln|F(w)|$  : logaritmik genlik spektrumu

$\Phi(w)$ : logaritmik evre spektrumudur.

Karmaşık kepstrum ise (complex cepstrum)

$$K(\tau) = \mathfrak{S}^{-1}[F(w)] = \mathfrak{S}^{-1}[\ln|F(w)| + j\Phi(w)] \quad (4.42)$$

olarak tanımlanır. Sinyalin, spektral ortamda, logaritmasının alındıktan sonra TFD uygulanması homomorfik dekonvolüsyon olarak isimlendirilir.



**Şekil 4.29** a) eşit aralıklı 2 kez yinelenen sönümlü zaman sinyali b) Logaritmik genlik spektrumu c) evre spektrumu d) Karmaşık kepstrum e) karmaşık kepstrumdan gecikmelerin giderildiği logaritmik genlik logaritmik genlik spektrumu f) elde edilen evre

spektrumu, “c” de bulunanın aynısıdır g) dönemsel bileşenlerin (yansımalar) giderildiği zaman sinyali, “a” da verilen sinyaldeki yansımalar giderilmiştir (Brüel ve Kjaer 1977’ den düzenlenmiştir. Şekil 4.29 da  $e^{-at}$  ile söndürülmüş, yinelenen bir sinüsoidal dalgaya karmaşık kepstrum uygulanması aşamalı olarak verilmiştir. Sinyal içinde 2 adet dönemli bileşen (yansıma) içermektedir.

#### **Örnek 4.23**

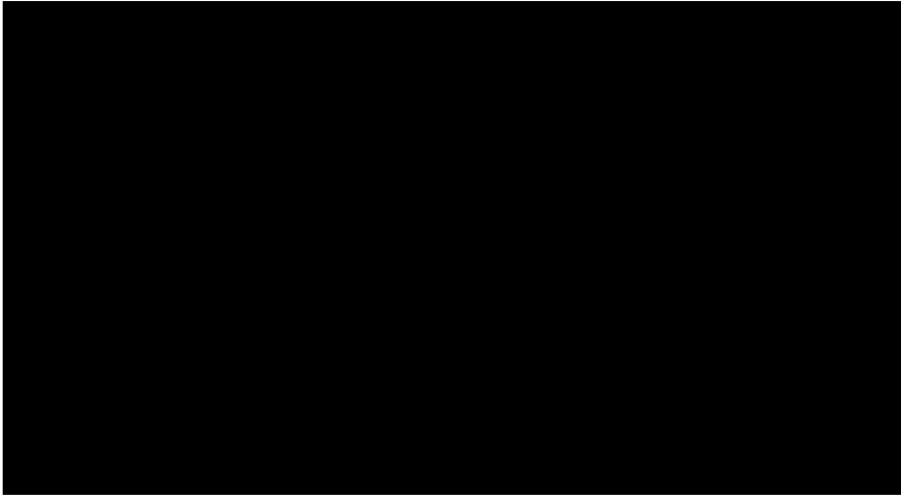
Bölüm 1, şekil 1.7 de  $T=2$  sn dönemli kosinüs izi kaydırılarak sinüs sinyaline dönüştürülürken spektral ortamdaki değişimleri verilmiştir. Kosinüs ve kaydırılarak oluşturulan sinüs imlerinin OES larını bulunuz.



#### **Örnek 4.24**

Yeraltında 0.75 m. genişliğinde, düşeyde sonsuza uzanan bir dayk vardır (şekil 4.30) Zaman içinde, herhangi bir nedenle dayk genişleyerek 1.5 m ye ulaşmıştır. Özdirenç Wenner kaydırma yöntemi kullanılarak dayktaki genişlemeyi gösteriniz (çözümde örnek 4.23 ten yararlanınız, ek4 PR3 bilgisayar programını kullanınız).

#### **Çözüm**





**Şekil 4.30** Düşeyde sonsuz dayk modeli ve ortak evre spektrumları **a)** genişlikleri 0.75 m (yeşil renk) ve 1.5 m (mavi renk) olan dayklar ve anomalileri **b)** her iki daykın OES ları.

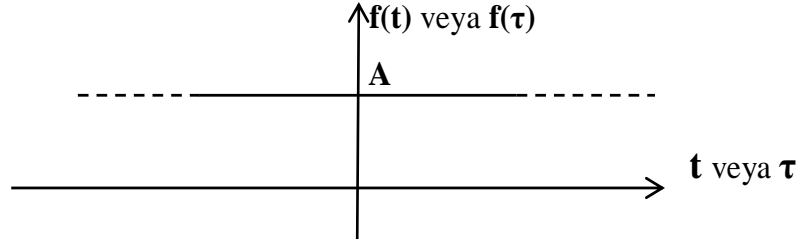
Şekil 4.30 dan, daykın genişlemesi durumunda anomali her iki yönde kaymıştır. Kayma nedeniyle ortak sanal bileşen ve OES oluşur. (4.70) bağıntısına göre ortak evre spektrumunun aldığı en büyük değer ( $\sim \pm 80^\circ$ ), dayka ait şekil değişikliği sınırlarını verir.

#### **Örnek 4.25**

$f(t)=A$  sinyalinin güç spektrumu/güç yoğunluğu spektrumunu bulunuz.

#### **Çözüm**

Verilen sinyal “t” den bağımsız olduğu için  $t=\tau$  yazılabilir. Bu koşulda,  $f(\tau)=A$  dır (şekil 4.31).



Şekil 4.31  $f(t)=A$  işlevi

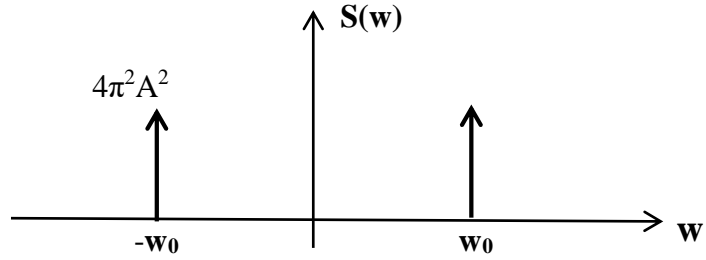
$$R(\tau = 0) = \mathfrak{F}^{-1}[S(w)] \Rightarrow S(w) = [F(W)]^2$$

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-jw\tau} d\tau = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jw\tau} d\tau$$

$$e^{-jw\tau} \xleftarrow{\text{FD}} \longrightarrow 2\pi\Delta(w-w_0) \quad (\text{bkz. bölüm 5, denklem 5.15})$$

$$F(w)=2\pi A\Delta(w-w_0), S(w)=|F(w)|^2=4\pi^2 A^2\Delta(w-w_0)$$

Elde edilen güç spektrumu şekil 4.32 da verilmiştir.



Şekil 4.32 “A” işlevinin güç spektrumu

Şekil 4.32 den görüldüğü gibi “ $f(t)=A$ ” işlevinin güç spektrumu “ $\pm w_0$ ” binlerindeki birim dürtülerdir. Her bir frekansa, eşit genlikli birim dürtüler biçiminde etki eden işleve veya güç spektrumu değişmeyen gelişigüzel sinyallere **beyaz gürültü** denilir.

#### Örnek 4.26

“ $S(w)$ ” güç yoğunluğu spektrumu ile “ $\sigma^2(t)$ ” değişiminin FD çifti oluşturacağını gösteriniz.

#### **Çözüm**

Özilişki

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t+\tau) dt \quad (4.32)$$

ve değişinti  $\sigma^2(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$  bağıntılılarıyla verilir.  
 $\tau=0$  kaydada özilişki

$$R(\tau=0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt$$

$\xleftrightarrow{\sigma^2(t)}$

$R(\tau=0) = \sigma^2(t) = P(t)$  (güç kavramı)

$S(w) = [F(w)]^2$  olarak gösterelim.

$$\mathfrak{F}^{-1}[F(w)^2] = \mathfrak{F}^{-1}[S(w)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F(w)]^2 e^{jw\tau} dw =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(w) e^{jw\tau} dw$$

$\tau=0$  da

$$R(\tau=0) = \sigma^2(t) = \mathfrak{F}^{-1}[F(w)^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F(w)]^2 dw \quad \text{elde edilir.}$$

$$R(\tau=0) = \mathfrak{F}^{-1}[S(w)] \Rightarrow S(w) = \mathfrak{F}[R(\tau=0)]$$

$$P = \sigma^2(t) = \mathfrak{F}^{-1}[S(w)] \Rightarrow S(w) = \mathfrak{F}[\sigma^2(t)]$$

Son bağıntılarda, P : güç,  $\sigma^2(t)$ : değişinti (varyans), S(w): güç yoğunluğu spektrumudur.

## Ödevler

1. Signum işlevinin (Şekil 3.16) FD nü bulunuz.

2. Gauss işlevi  $f(t) = e^{-\alpha t^2}$  olarak verilmektedir. Bu işlevin FD nü bulunuz.

3.

$$f(t) = \begin{cases} \cos(w_0 t) & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

işlevinin FD nü bularak spektrumunu çiziniz.



**Kaynakça:**

Akçığı, Z., Pınar, R.,1990,Gravite verilerine güç spektrumu yönteminin kayan pencereyi uygulaması.,Jeofizik 4,41-48.

Bogert., B. P., Healy., M.J.R.&Tukey., J.W., 1963, “The Quefreny Analysis of Time Series for Echoes: cepstrum, Pseudo-Autocovariance, Cross-cepstrum and Shape Cracking”, by M. Rosenblatt, (Ed.), Willey N. Y. , pp. 209-243.

Randall, R. B., Tech, B. A., (1977), Application of B&K equipment to Frequency Analysis, Brüel & Kjaer.

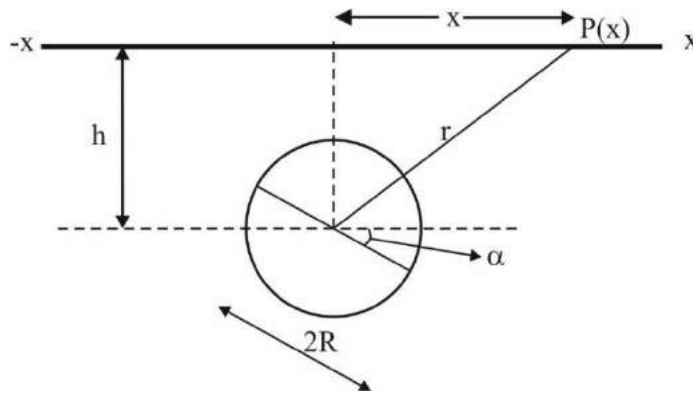
Telford, W. T., Geldart, L. P., Sheriff, R. E., (1990), Applied Geophysics Second Edition, Cambridge University Press.

**EK 1 SP’ de güç spektrumu**

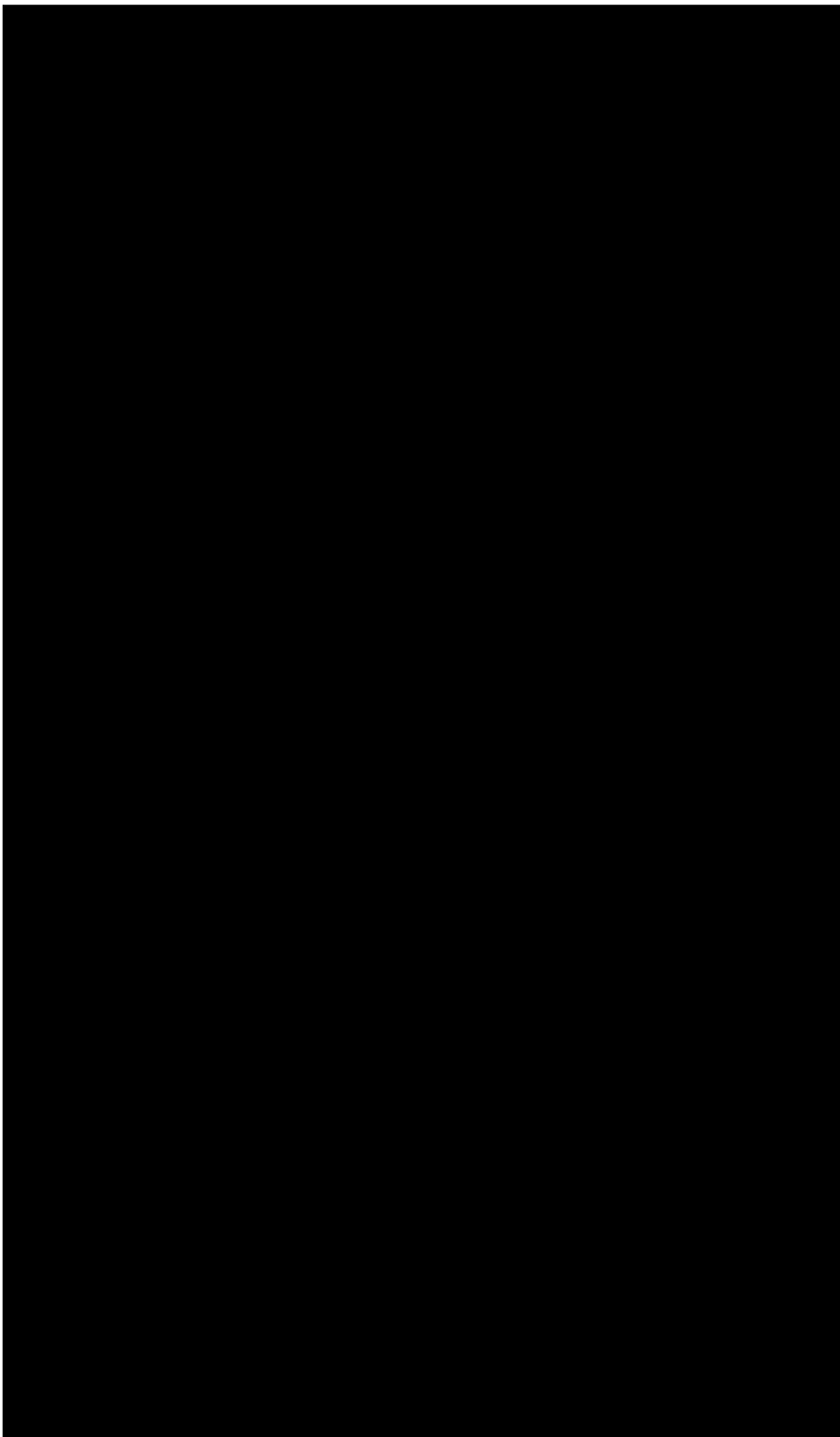
**SP yönteminde, küre biçimli yapılara güç spektrumu yöntemini uygulayarak derinlik parametresini saptayınız.**

Özek (merkez) derinliği  $h$ , yarıçapı  $R$  olan kürenin (şekil E.1) yeryüzündeki izdüşümünden  $x$  uzaklığında oluşturacağı gerilim;

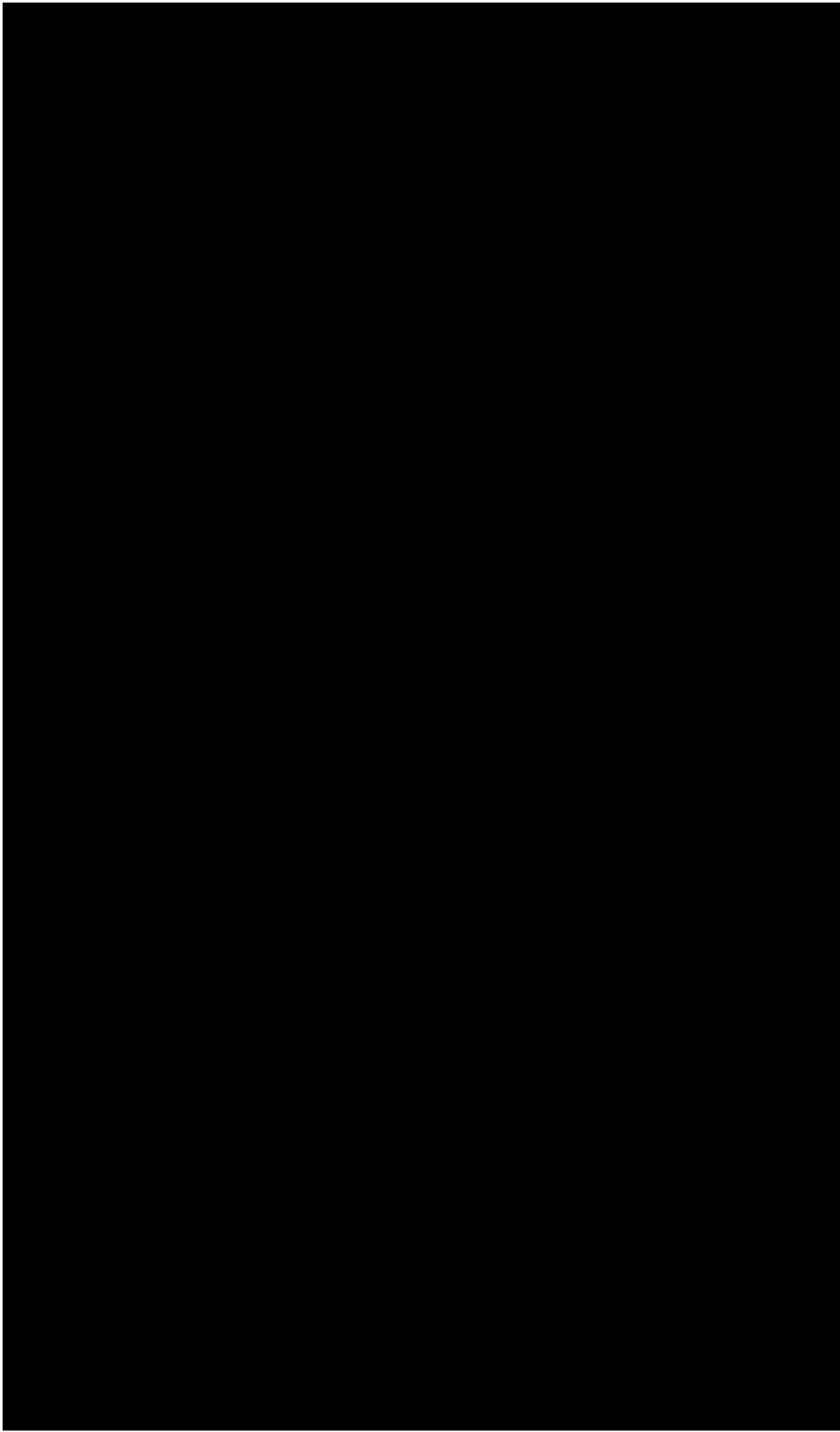
$$V(x) = \frac{\Delta V R^2}{2} \left[ \frac{h \cos(\alpha) + x \sin(\alpha)}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \right] \quad (E.1)$$

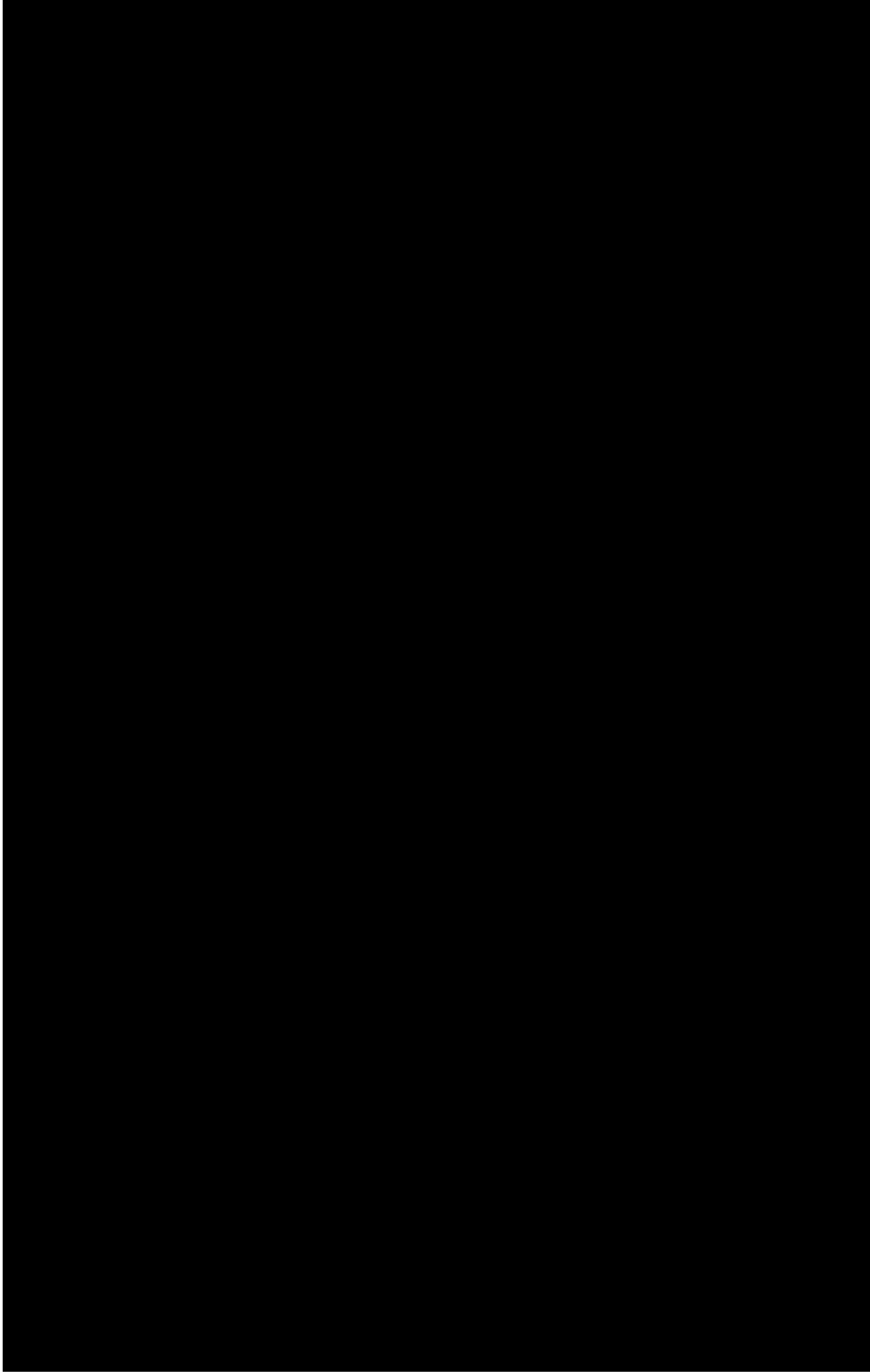


**Şekil E.1** SP yönteminde küre modeli ve parametreleri









bağıntısı ile verilir (Heiland 1968).  $V(x)$  gerilim bağıntısının FD (E.1)

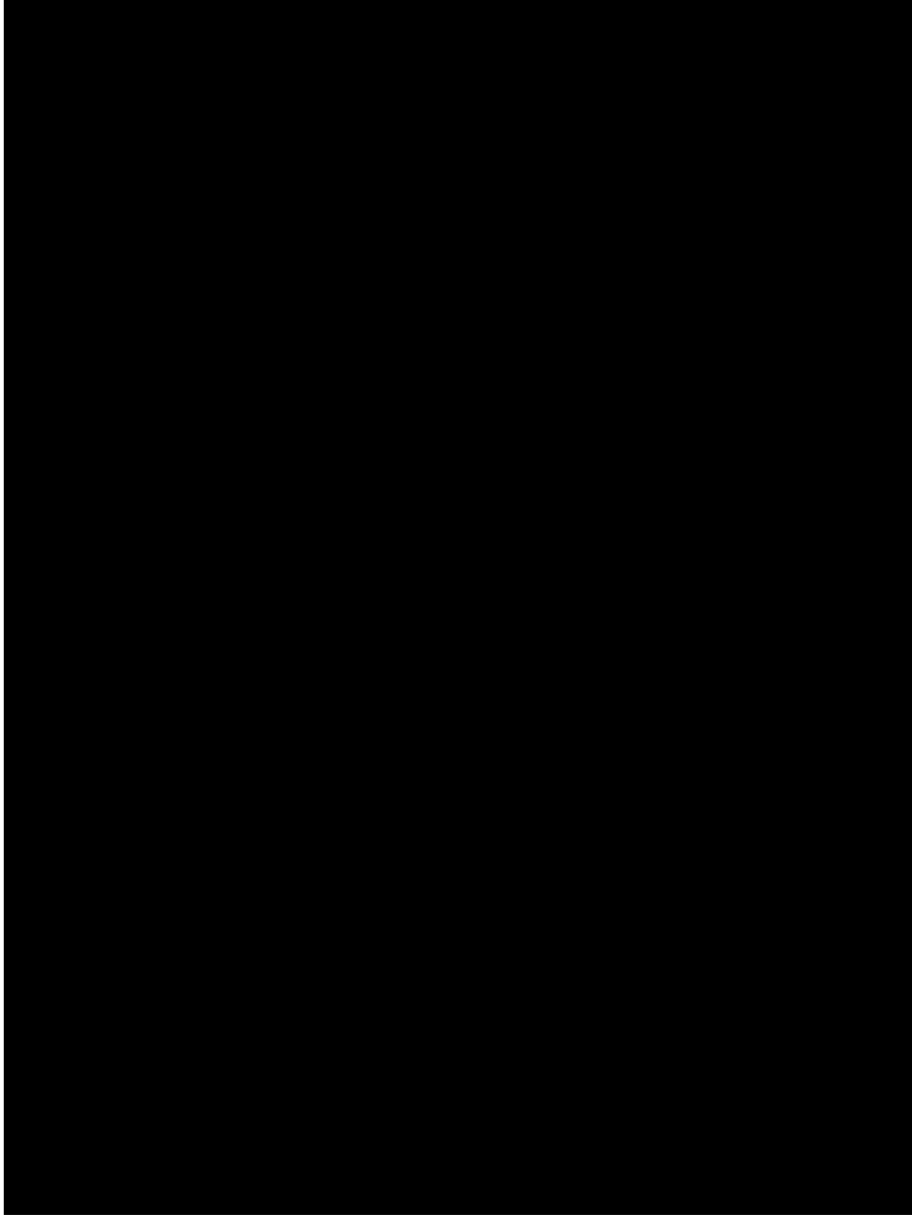
## Ek2 Pr1: Özilişki programı

```
DIMENSION X(1000),Y(1000),Z(1000)
```

```
OPEN(UNIT=1,FILE='OZO.DAT')
```

```
OPEN(UNIT=2,FILE='OZY.DAT')
```

```
C *****  
C DALGANIN OZILISKISINI ALIR. CIKAN VE GIREN NOKTA  
C SAYISI ESITTIR.  
C NX: OZILISKISI ALINACAK SERISININ NOKTA SAYISI  
C (TEK OLMALI)  
C PROGRAMA GIREN VE CIKAN NOKTA SAYILARI ESITTIR  
C (0 KAYMADAKI OZILISKI).
```



**Sınama verisi**

Giriş verisi : 1, 2, 4, 1

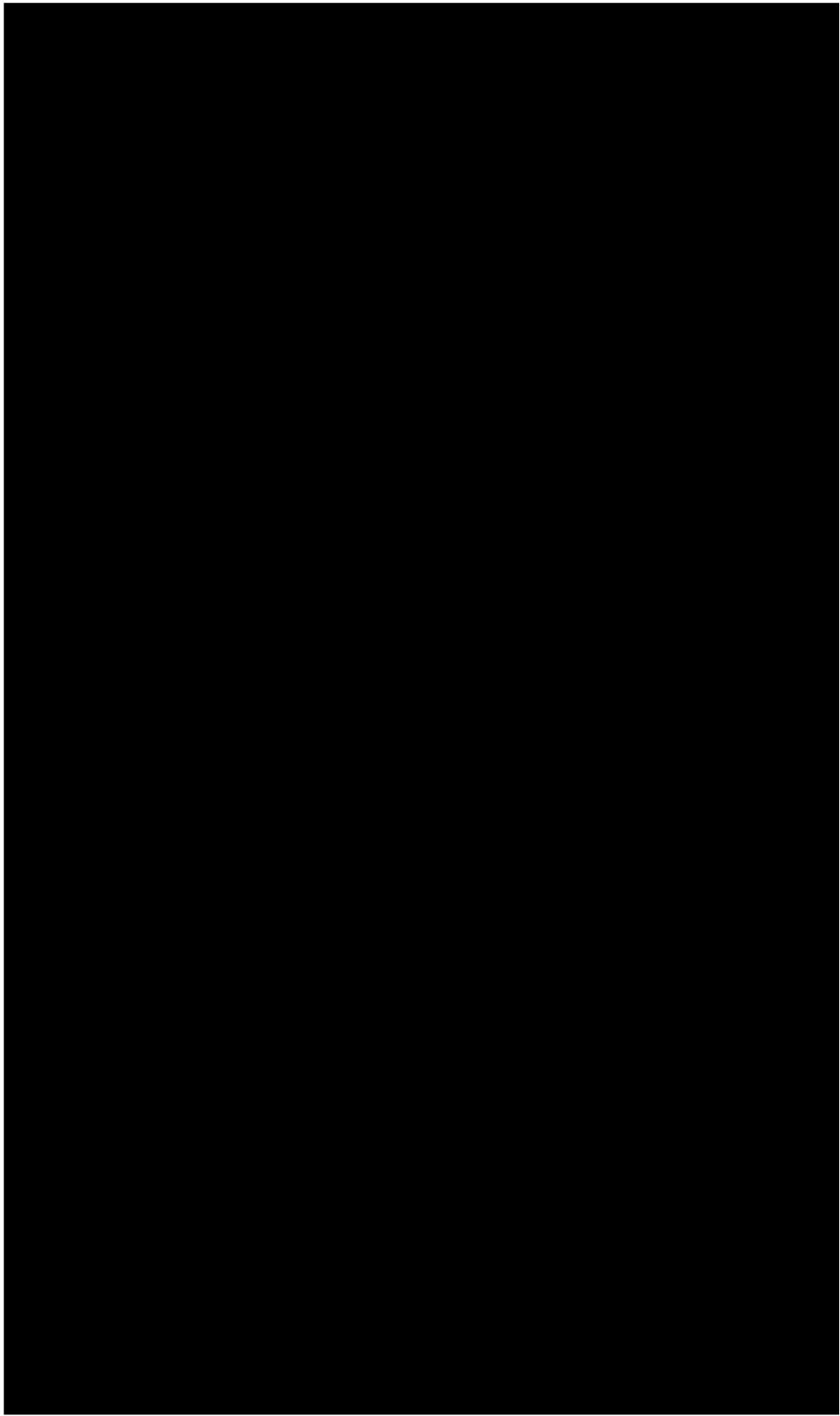
Çıkış verisi ("0" KAYMA): 6, 14, 22, 14

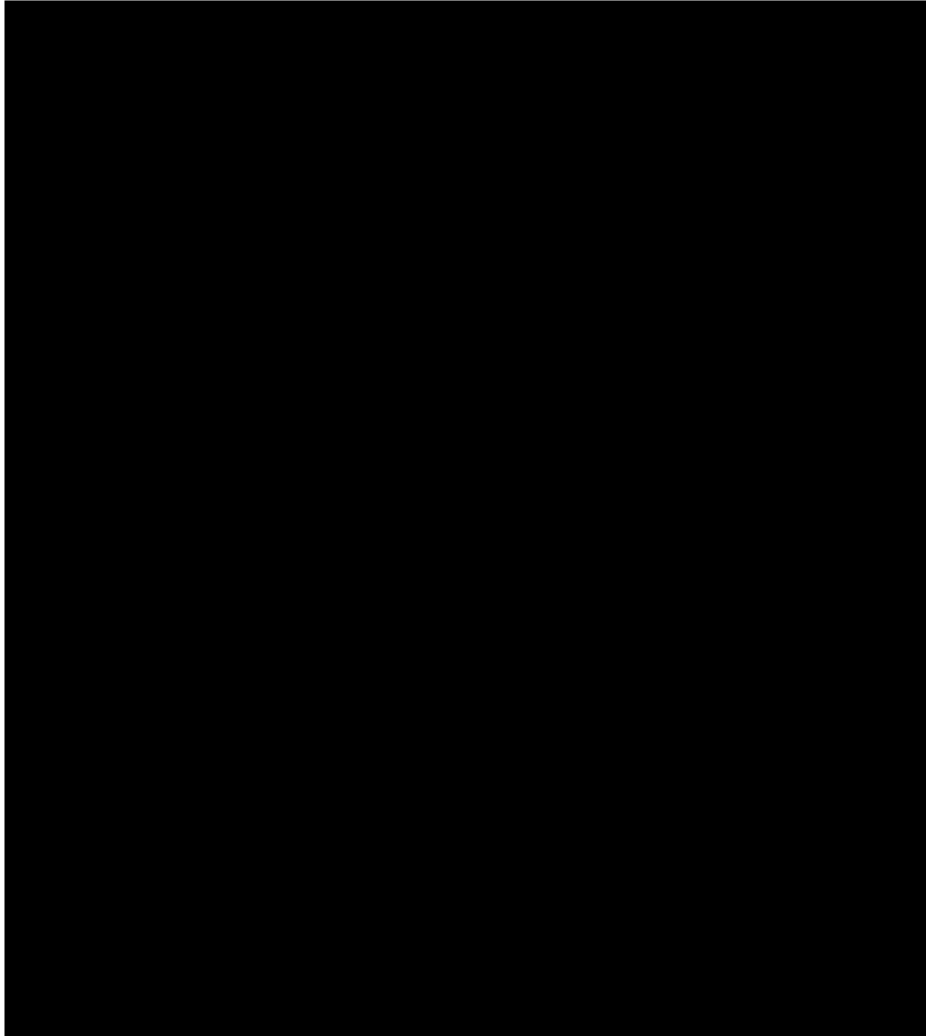
### Ek3 Pr2 Çapraz ilişki programı

DIMENSION X(200),Y(200),Z(200)

```
C *****  
C  NORMALLESTIRILMIS CAPRAZ ILISKI  
C  X UZUN BOYLU DIZI  
C  NX: UZUN DIZININ NOKTA SAYISI  
C  Y: KISA BOYLU DIZI  
C  NY: KISA DIZININ NOKTA SAYISI  
C  ONCE UZUN DIZI OKUTULUR  
C  OPEN(UNIT=1,FILE='CO.DAT')  
C  OPEN(UNIT=2,FILE='CY.DAT')  
C  READ(1,*)NX,NY
```







**Ek4 Pr3 Spektral tutarlık ilişkisi programı**

DIMENSION X(1000),Y(1000),A1(1000),A2(1000)

DIMENSION B1(1000),B2(1000), UST(1000), ALT(1000)

DIMENSION TK(1000),G11(1000),G22(1000), Q11(1000)

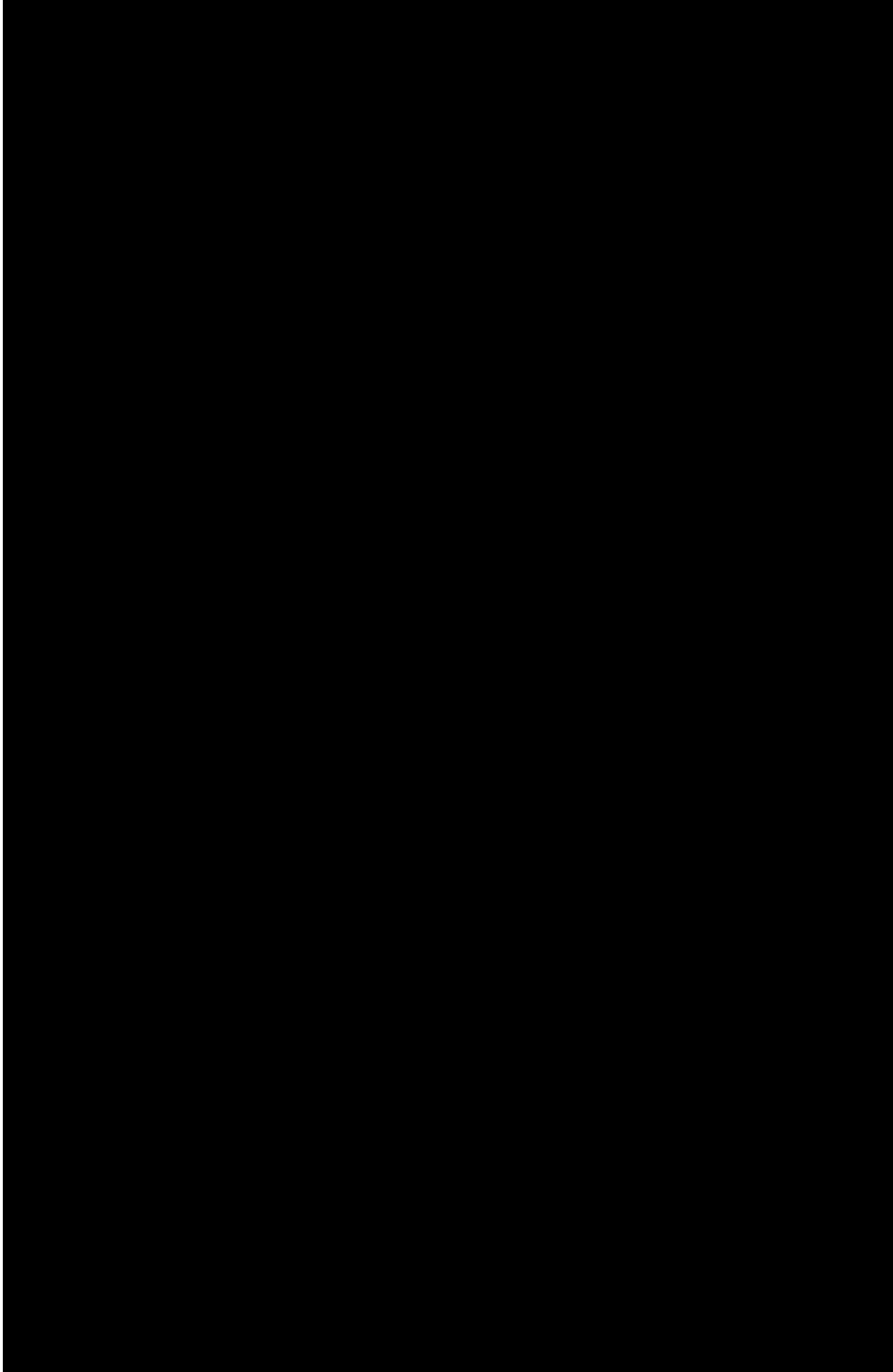
DIMENSION Q22(1000),G12(1000),Q12(1000),PHI(1000)

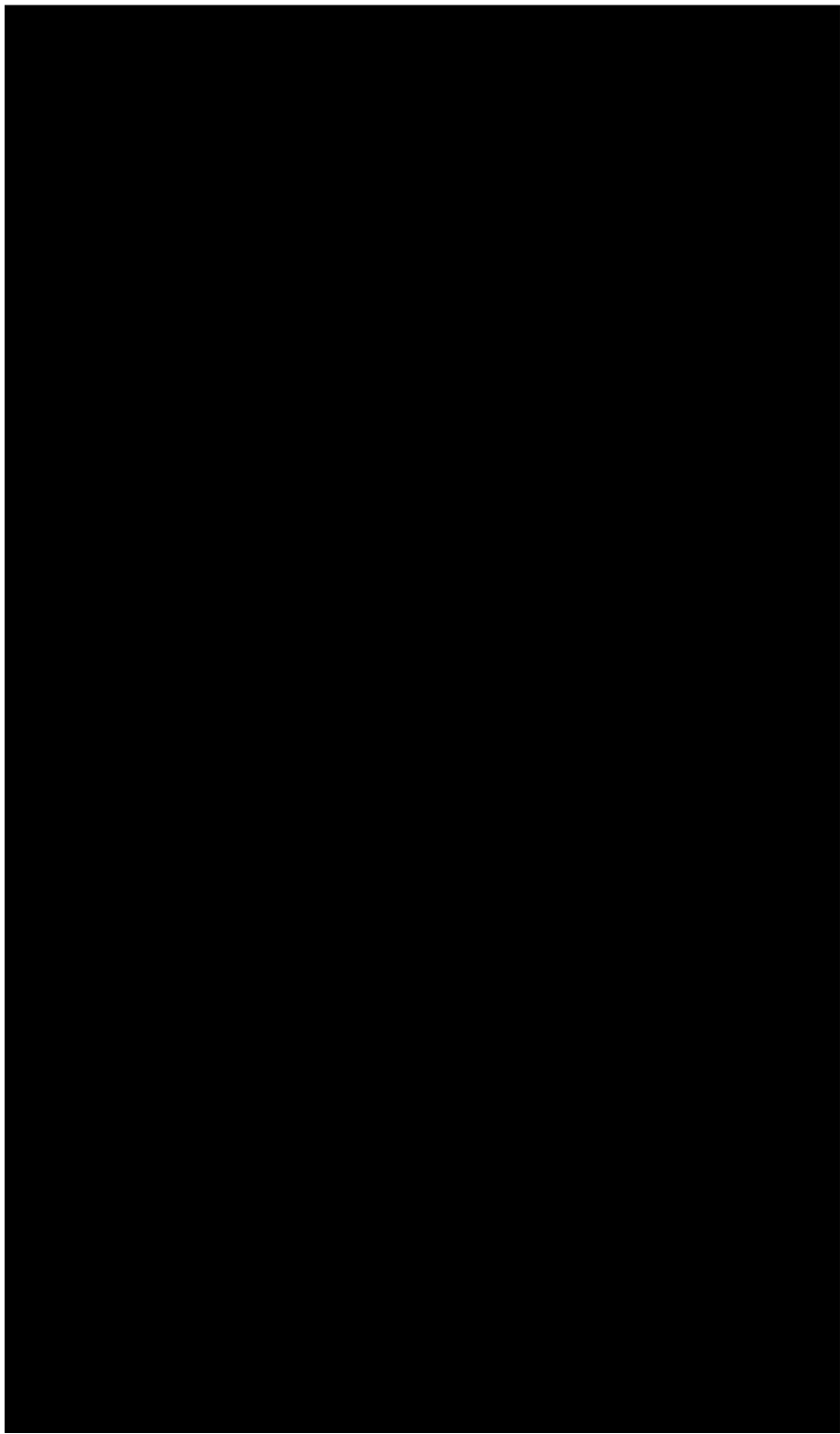
C TUTARLIK (COHERENCE) SPEKTRUMU

C X 1. DIZI

C N: NOKTA SAYISI (HER İKİ DİZİNİN ESİT)

```
C  Y: 2. DIZI  
OPEN(UNIT=1,FILE='TUO.DAT')  
OPEN(UNIT=2,FILE='TUY.DAT')
```





*Marc-Antoine Parseval (27 Nisan 1755 - 16 Ağustos 1836)*



Toprak sahibi, asilzade bir ailede dünyaya gelmiş ünlü bir Fransız matematikçisidir. 1795 yılında Ursule Guerillot evlendi, bu evlilik çok kısa sürdü. Kendisi, bir asilzade olduğu için kral tarafında yer aldı. 1789 Fransız devrimi ve dolayısıyla da Napolyon Bonapart karşıtıydı. Devrim karşıtlığı nedeniyle, 1792 yılında tutuklanma kararı alındı, yurt dışına kaçtı. Ancak tutuklanarak getirildi ve Bastile atıldı. 1793 sonunda, Napolyon Bonapart'ın ordularının büyük zafer kazanması sonucunda diğer siyasi tutuklularla birlikte özgür bırakıldı. Bu olay, kendisinde önemli bir korku bıraktı.

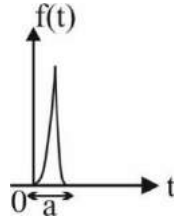
Kendi adıyla bilinen kuramı ortaya attı. Ancak, kuramın kanıtlanmasını çok açık gördüğü için kanıtlamadı. 1796 - 1828 yılları arasında Fransız Bilimler Akademisi'nde beş kez aday gösterildi fakat seçilmedi.

## BÖLÜM 5

### *DÜRTÜ (DIRAC IMPULSE) İŞLEVİ*

#### *5.1 GİRİŞ*

Dürtü (darbe) işlevi, çok kısa süreli büyük bir etki yaratan fiziksel olayları gösteren bir sinyaldir. Örnek olarak, yüksek enerjili dinamitin patlatılması, temel kayanın kırılması için balyoz ile indirilen darbe verilebilir. Bu nedenle, dürtü işlevi, darbe işlevi olarak ta adlandırılabilir (şekil 5.1).



Şekil 5.1 Darbenin grafiği.

Kısa süreli, yüksek enerjili bir olay,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_0^a f(t)dt \neq 0 \quad (5.1)$$

denklemlerle tanımlanır. Burada,  $a > 0$  ancak, çok küçük (sıfıra çok yakın), gerçel bir sayıdır. “ $f(t)$ ”,  $(0, a)$  aralığında tanımlı (çok büyük), aralığın dışında ise sıfır olan bir işlevdir. Bu koşulda, tümlev, belirtilen aralıkta büyük bir değere sahip olacaktır. İşlevin bu davranışı, ideal bir dürtmedir (impulse, darbe). Dürtü işlevi, süresi çok kısa olan ancak büyük bir etki oluşturan bir imi gösterir.

Darbe işlevleri, 1930 lu yıllarda, P.A.M. Dirac tarafından geliştirilmiştir. Dolayısıyla, dürtü işlevlerine “Dirac delta” işlevi

denilir. P.A.M Dirac, tanımına göre, “ $0, a$ ” aralığında  $\frac{f(t)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt}$

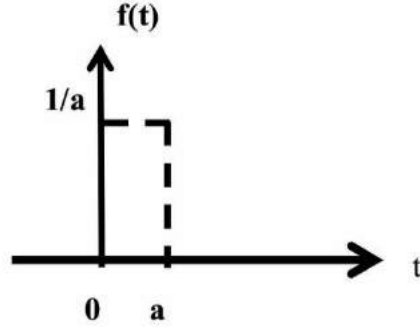
işlevi, için sıfır değerini alan ve yatay ekseninde, tam sıfırın üzerinde, tümlevi “1” olan bir işlevdir ve “ $\delta(t)$ ” ile gösterilir.

İşlev,  $a > 0$  olmak üzere,

$$f(t) = \begin{cases} 1/a & 0 < t < a \\ 0 & \text{diğer koşullarda} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_0^a f(t) dt = 1 \quad (5.3)$$

olduğu kolayca görülür (şekil 5.2).



Şekil 5.2.  $f(t)$  nin grafiği

Eğer “a” sıfıra yaklaşırsa,  $f(t) \rightarrow \delta(t)$  olarak yazılır. Bu durumda,

1.  $\delta(t) = 0 \quad t \neq 0$
2.  $\delta(t) = \infty \quad t = 0$
3.  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$  (5.4)

dır. Şekil 5.2 de alan “1” dir. Dürtü işlevinin kayması “ $t_0$ ” ise

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \infty & t=t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 0 & t \neq t_0 \end{cases} \quad (5.5)$$

elde edilir. Yalnızca tek boyutta (“t” boyutunda) tanımlanan birim dürtü, “N” boyut için,

$$\delta^N(t)=t-t_0 \quad (5.6)$$

olarak gösterilir. Son eşitlikte,

N: boyut sayısıdır. Örneğin, 3 boyut için (t, x, y boyutları),

$$\delta^3(t,x,y)=\delta(t-t_0)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) \quad (5.7)$$

yazılabilir.

## 5.2 DAĞILIM İŞLEVLERİ

Dürtü işlevi, “ $\delta(t)$ ” olarak gösterilir. Ancak “t” ye bağlı olarak değişmezler. Bu nedenle bilinen, klasik bir işlev değildir. 1940’ lı yıllarda Laurent Schwartz, kurduğu dağılım kuramında (distribution theory), bu tip işlevleri, matematiksel bir temele oturtmuştur.

Klasik bir işlevin, bağımsız değişkeni (burada “t”) her noktada tanımlıdır. Oysa birim dürtü dağılımı; bağımsız değişkeni olan “t” üzerinde değil, dağılım işlevi olarak bilinen, uygun bir “ $\phi$ ” fonksiyonlar sınıfı üzerindeki “ $\delta(\phi)$ ” değerlerinin verilmesiyle simgelenir. Dağılım işlevlerinin tek başlarına anlamı yoktur. Dağılım işlevleri, asla tek başına kullanılmaz, ancak diğer fonksiyonlarla birlikte kullanılır. Anlamı olabilmesi için, “ $\phi$ ” bir dağılım işlevi olması koşuluyla, birim dürtü işlevi,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t) dt = \phi(t = 0) \quad (5.8)$$

olarak tanımlanır. (5.8) denkleminin bir anlamı vardır.

Dağılım işlevi olan “ $\phi_n(t)$ ” nin sağlaması gereken koşullar aşağıda verilmektedir.

a. 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t) dt = 1$$

b. Her  $t \neq 0$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = 0$

c. “ $\phi_n(t)$ ” işlevlerinin her mertebeden türevleri tanımlı olmalıdır.

## 5.3 DÜRTÜ İŞLEVINİN MATEMATİKSEL TANIMI

1) 
$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) \quad (5.9)$$



Dürtü işlevi, dağılım işlevlerinin limitidir.

$$2) \quad \delta(t) = \frac{d}{dt} u(t) \quad (5.10)$$

$u(t)$ : birim basamak işlevidir.

### **Örnek 5.1**

$$\phi_n(t) = n \pi(nt) \quad (5.11)$$

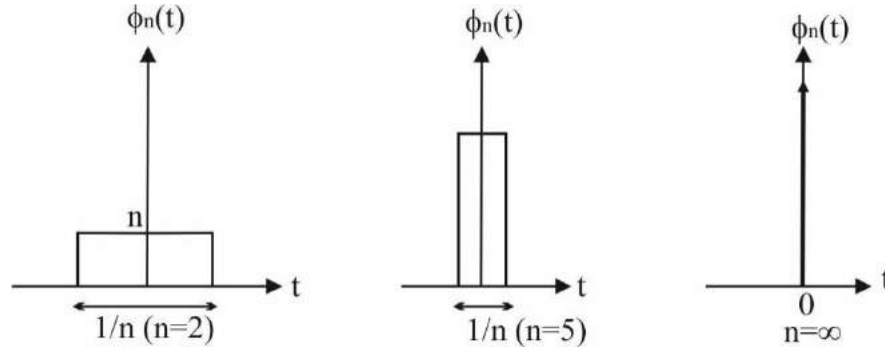
$\Phi_n(t)$ 'nin bir dağılım işlevi olduğunu gösteriniz.

### **Çözüm**

(5.11) bağıntısı ile tanımlanan dikdörtgen dalga işlevi aynı zamanda bir dağılım işlevidir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \delta(t) \quad (5.12)$$

olacaktır. Bu limit işlemi Şekil 5.3 de adım adım gösterilmiştir.



**Şekil 5.3** Dikdörtgen dalga, bir dağılım işlevidir.

Şekil 5.3 de görüldüğü gibi dikdörtgen dalga limite “ $\delta(t)$ ” ye yaklaşır. Bu nedenle bir dağılım işlevidir. Aşağıda verilen işlevler de limite dürtü işlevine yaklaşırlar. Dolayısıyla dağılım işlevleridir. İlgili işlevlerin, dürtü olarak gösterilişleri aşağıda verilmiştir.

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot e^{(-nt)^2}$$

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \text{sinc}(nu)$$

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \text{sinc}^2(nu)$$

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}$$

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

#### 5.4 DÜRTÜ İŞLEVINİN ÖZELLİKLERİ

“ $\phi_n(t)$ ” dağılım işlevini göstermek üzere, aşağıdaki özellikler vardır.

##### ➤ Kayma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t - t_0) dt = \phi(t = t_0) \quad (5.13)$$

Kayma yoksa ( $t_0=0$ )

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t) dt = \phi(t = 0) \quad (5.14)$$

ölür. (5.14) eşitliğinin anlamı, *bir sinyalin dürtü ile evrişimi*, “ $t=0$ ” noktasında, yine izin kendisidir.

$$f(t) = f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

##### ➤ Ölçekleme

$$\delta(at) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta[a(t - t_0)] dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t - t_0) dt = \frac{1}{|a|} \phi(t_0) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad a \neq 0 \quad (5.15)$$

##### ➤ Basamaklama

$$\delta[u(t)] = \sum_i \frac{\delta(t - t_i)}{|u'(t_i)|}$$

$t_i$ : birim basamak işlevinin kökleridir.

$u(t)$ : birim basamak işlevi

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{t^2 + \varepsilon^2}$$

➤ **Türev**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n \delta(t-t_0)}{dt^n} \phi(t) dt = (-1)^n \left[ \frac{d^n \phi(t_0)}{dt^n} \right]_{t=t_0} \quad (5.16)$$

➤ **Diğer özellikler**

$$\bullet \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \quad (5.17)$$

$$\bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \quad (5.18)$$

**Örnek 5.2**

$$\delta(t+1) * \delta(t-1) = \delta(t) \quad \text{dır.}$$

## 5.5 DÜRTÜ İŞLEVINİN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

Dürtü işlevinin FD, işlevin tanımından ve dikdörtgen dalgadan bulunabilir.

### 5.5.1 Tanımdan yararlanarak dürtü işlevinin FD

$$\text{FD bağıntısında } F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

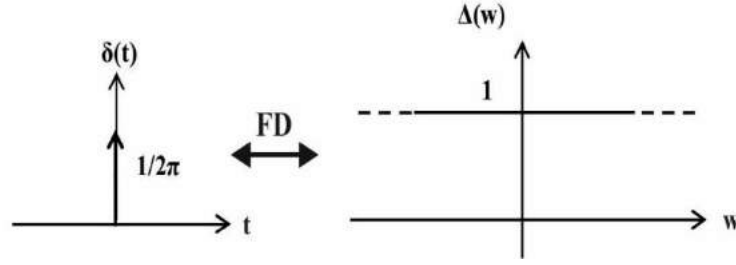
“f(t)” yerine “δ(t)” yazıldığında

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.19)$$

elde edilir. (5.19) ve (5.14) denklemleri karşılaştırıldığında, “φ(t)” dağılım işlevinin “e<sup>-jωt</sup>” ye özdeş olduğu görülür. Bu koşulda,

$\Phi(t) = e^{-j\omega t}$  ve t=0 da, F(ω)=φ(t=0)=1 bulunur. Dürtü işlevinin FD.’ü “1” dir (Şekil 5.4).

$$\Delta(\omega) = \mathfrak{F}[\delta(t)] = 1 \quad (5.20)$$



Şekil 5.4 Birim dürtü işlevi ve Fourier dönüşümü

**Not:**

FD ve dürtü işlevi bağıntıları:  $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ ,

$$f(t) = \mathfrak{T}^{-1}[f(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt$$

f(t) yerine dürtü işlevi kullanıldığında,

$$\Delta(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt \quad , \quad \delta(t) = \mathfrak{T}^{-1}[\delta(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{j\omega t} dt$$

**5.5.2 Dikdörtgen dalgadan yararlanarak dürtü işlevinin FD**

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\pi \left( \frac{t}{1/n} \right) \Rightarrow \mathfrak{T}[\delta(t)] = \mathfrak{T} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} n\pi \left( \frac{t}{1/n} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin c(nf) = 1$$

$$\mathfrak{T}[\delta(t)] = 1 \tag{5.21}$$

**Not:** Dikdörtgen dalgaının FD sinc işlevidir (Bkz Bölüm 3).

(5.20) denkleminin şekilsel gösterimi Şekil 5.5 te verilmiştir.

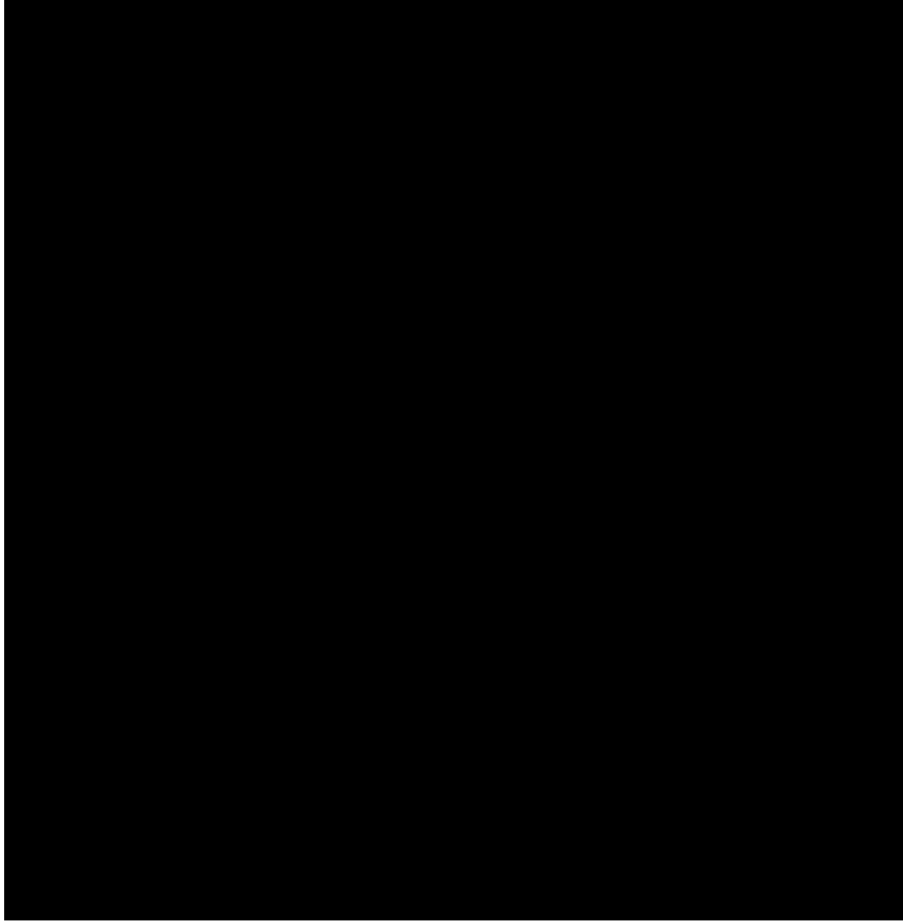
**5.5.3 "t<sub>0</sub>" kadar ötelenmiş dürtü  $[\delta(t-t_0)]$  işlevinin FD**

(5.13) bağıntısı kullanılarak "t<sub>0</sub>" kadar ötelenmiş dürtü işlevinin  $\delta(t-t_0)$  FD bulunabilir.

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \tag{5.22}$$

$$\mathfrak{T}[\delta(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0} \tag{5.23}$$

aynı işleme, (5.13) ve (5.20) denklemleri kullanılarak ta ulaşılır.



**Şekil 5.5** Dürtü işlevi ve FD. nün birlikte açıklanması

### 5.6 TOPARLAMA

Özet olarak aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t - t_0) dt = \phi(t = t_0) \quad (5.13)$$

$$\delta(at) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta[a(t - t_0)] dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t - t_0) dt = \frac{1}{|a|} \phi(t_0) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad a \neq 0 \quad (5.15)$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

“ $t_0$ ” kadar ötelenmiş dürtü işlevinin tümlevi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (5.18)$$

dır.

“ $t_0$ ” kadar ötelenmiş dürtü işlevinin FD. ise

$$F(w) = \mathfrak{F}[\delta(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \quad (5.22)$$

$$\mathfrak{F}[\delta(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0} \quad (5.23a)$$

$$\delta(t-t_0) \leftarrow \mathfrak{F} \rightarrow e^{-j\omega t_0} \quad (5.23b)$$

Kaymanın olmaması durumunda, dürtü işlevinin FD. ise

$$\Delta(w) = \mathfrak{F}[\delta(t)] = 1 \quad (5.20)$$

FD. den gelen  $2\pi$  katsayısı da kullanılarak,

$$\begin{aligned} 1 &\leftarrow \mathfrak{F} \rightarrow 2\pi \Delta(w) \\ e^{-j\omega t_0} &\leftarrow \mathfrak{F} \rightarrow 2\pi \Delta(w-w_0) \\ e^{j\omega t_0} &\leftarrow \mathfrak{F} \rightarrow 2\pi \Delta(w+w_0) \end{aligned} \quad (5.24)$$

elde edilir. Ötelenmiş dürtü işlevinin genlik ve evre spektrumları ise; (5.23) denklemlerinden yararlanılarak bulunur.

$$\Delta(w) = \mathfrak{F}[\delta(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0}$$

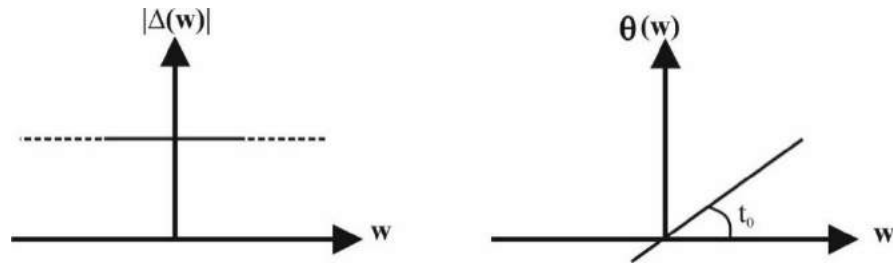
$$\Delta(w) = \cos(\omega t_0) - j \sin(\omega t_0)$$

$$|\Delta(w)| = [\cos^2(\omega t_0) - j \sin^2(\omega t_0)]^{1/2} = 1 \quad (5.25)$$

$$\theta(w) = \tan^{-1} \left[ \frac{\sin(\omega t_0)}{\cos(\omega t_0)} \right] = \tan^{-1} [\tan(\omega t_0)]$$

$$\theta(w) = t_0 w \quad (5.26)$$

olarak verilir (Şekil 5.6). Dürtü işlevleri ve FD yöntemleri kullanılarak bazı özel işlevlerin FD leri Çizelge 5.1 de verilmiştir.



**Şekil 5.6** “ $t_0$ ” kadar ötelenmiş dürtü işlevinin genlik ve evre spektrumları

### Örnek 5.3

$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \delta\left(\frac{t}{2} - 1\right) dt$  işlevini çözünüz.

#### **Çözüm**

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \delta\left[\frac{1}{2}(t-2)\right] dt = \frac{1}{1/2} 2^2 = 8$$

Ölçekleme özelliği, (5.15) denklemi kullanılır.

### Örnek 5.4

$\int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\cos(t)} [1 + \sin(2t)] \delta\left[\frac{t}{10} + 0.05\pi\right] dt$  işlevini çözünüz.

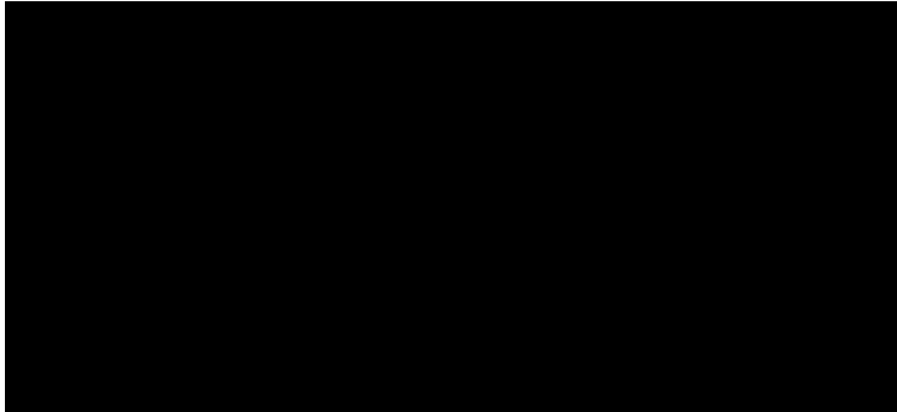
#### **Çözüm**



### Örnek 5.5

$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{\sin(t)} \cos(2t) \delta[2(t-\pi)] dt$  işlevini çözünüz.

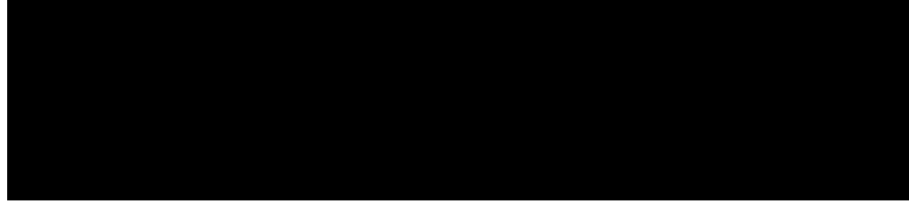
#### **Çözüm**



### Örnek 5.6

$\int_{-\infty}^{\infty} (t^3 + t^2 + t + 1) \delta(t - 3) dt$  işlevini çözünüz.

**Çözüm**



(5.13), (5.15) ve (5.18) denklemleri kullanılır.

### Örnek 5.7

$f(t)=1-0.5\delta(t)$  işlevinin FD. nü bulunuz.

**Çözüm**



### Örnek 5.8

$\int_{-\infty}^{\infty} (5t^3 + 8) \delta\left(\frac{t}{4} - 0.2\right) dt$  işlevini çözünüz.

**Çözüm**



### Örnek 5.9

$\mathfrak{F}[f(t)] = F(w)$  ise

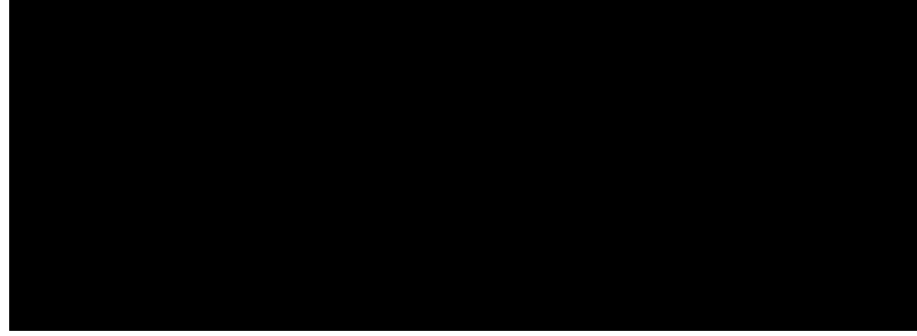
a)  $dF(w)/dw$

b) “a” maddesinden yararlanarak, “t” nin FD.nü bulunuz.

**Çözüm**





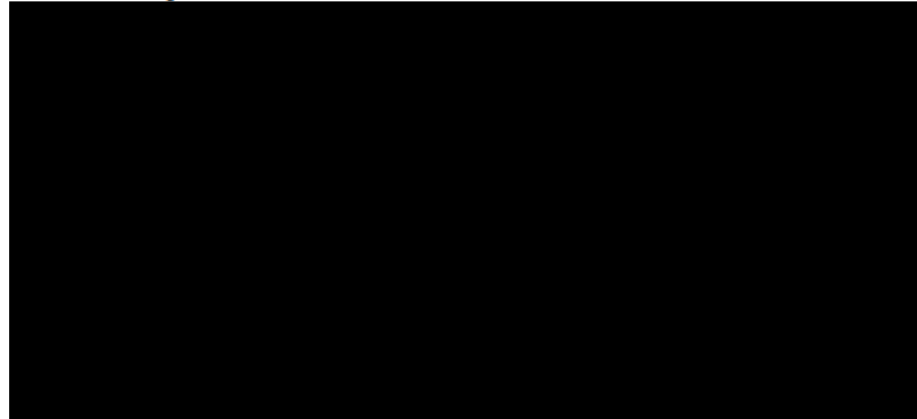


b) Son bağıntıda  $f(t)=1$  olarak alınırsa  $\frac{dF(w)}{dw} = -j\mathfrak{F}[t]$  elde edilir.



**Örnek 5.10**

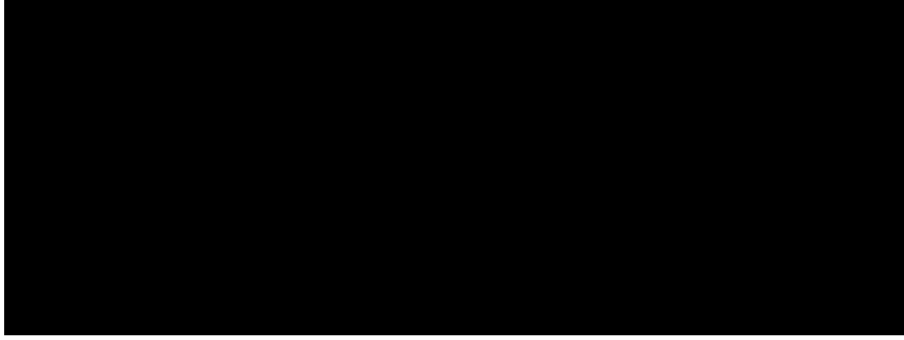
$$\mathfrak{F}[1 - \sin w_0 t] = ?$$



**Çözüm**

(5.25) bağıntılarından yararlanılır.

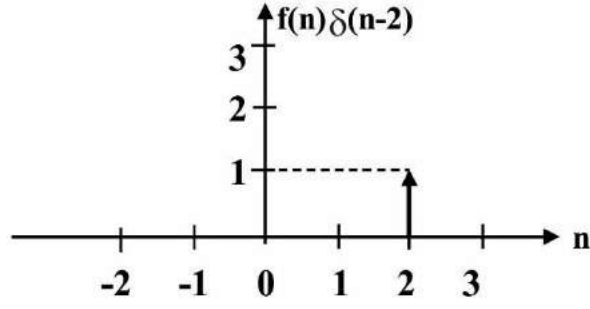




**Örnek 5.11**

“n” ayrık değer olmak üzere,  $f(n)\delta(n-2)$  çizerek gösteriniz.

*Çözüm*



Şekil 5.7  $f(n)\delta(n-2)$  işlevi

$$f(n)\delta(n-2)=f(n=2)\delta(n-2)=\begin{cases} 1 & n=2 \\ 0 & n\neq 2 \end{cases}$$

<b>f(t)</b>	<b>F(w)</b>
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + jw}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + jw)^2}$
$ t $	$\frac{2}{w^2}$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi \delta(w)$
$u(t)$	$\frac{1}{jw} \pi \delta(w)$
$\cos(w_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2} [\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)] + \frac{jw}{w_0^2 - w^2}$
$\sin(w_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2j} [\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)] + \frac{w_0}{w_0^2 - w^2}$
	$\pi [\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)]$
$\sin(w_0 t)$	$j\pi [\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)]$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + w^2}$
$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2 w^2/2}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(w - \frac{2\pi}{T}k\right)$
$\text{sgn}(t)$	$2 / jw$

**Çizelge 5.1** Bazı işlevlerin FD leri

## Paul A.M. Dirac (1902-1984)



Paul Dirac, 8 Ağustos 1902 tarihinde Bristol - İngilterede doğmuştur. 1918 yılında başladığı Bristol Üniversitesi'nde elektrik mühendisliği bölümünden 1921 yılında mezun oldu. Aynı Üniversitede matematik dalında yüksek eğitimini 1923 yılında tamamladı.

Bristol Üniversitesi'nde yüksek ihtisasını bitirdikten sonra St John's College, Cambridge'de araştırma yapması için bir davet aldı. Uzun bir süre burada çalıştı. Bu süre içinde genel görelilik kuramı ve yeni gelişmekte olan kuantum fiziği ile ilgilendi.

Paul Dirac'ın "Kuantum Mekaniğinin İlkeleri" (The Principles of Quantum Mechanics, Oxford Science Publications, Oxford University Press) isimli kitabı 1930 yılında basıldı. Kitap temel kaynak olarak kullanıldı ve günümüze de kullanılmaktadır.

Elektron'un dalga fonksiyonu için görelilik bir hareket denklemi olan Dirac denklemi'ni oluşturdu. Bu çalışma, Dirac'ın, elektron'un antiparçacığı olan pozitron'un varlığını tahmin etmesine yol açtı. Kuram, elektronla aynı kütleli, fakat pozitif yüklü bir parçacığın varlığını ortaya koyuyordu. Teori, daha sonra deneysel olarak da doğrulandı. Bu parçacığa pozitron denildi.

Paul Dirac'ın çalışmalarının önemi, onun Erwin Schrödinger'in özel görecelik denklemleriyle tanıttığı ünlü dalga fonksiyonlarında yatar. Aslında Dirac'ın çalışmalarının önemi, birbirine ters düşen quantum ve görecelik teorilerinin birbirleriyle ilişkilendirmesindedir.

Paul Dirac'ın denklemi aynı zamanda spin kavramının görelilik çerçevesine oturtulmasına da yardım etmiştir. Bu çalışması sayesinde Dirac, kuantum elektrodinamiği terimini ilk kez kullanan ve bu dalı kuran kişi olarak tarihe geçti.

II. Dünya Savaşı sırasında gaz santrifujü kullanarak uranyum zenginleştirme üzerine teorik ve deneysel çalışmalar yürüttü. Paul Dirac, 1937 yılında Margit ile evlendi ve iki kızı oldu.

1972 yılına kadar İngiltere'de yaşadı. Büyük kızı Mary'ye yakın olmak için ABD. Florida'ya taşındı. Dirac, hayatının son oniki yılını Tallahassee, Floridadaki Florida Eyalet Üniversitesi'nde geçirdi. Paul Dirac, 20 Ekim 1984 tarihinde ABD, Florida, Tallahassee'de 82 yaşında ölmüştür.

1997 yılında Florida Eyalet Üniversitesi, Dirac'ın adına Dirac-Hellman ödülü'nü başlattı. Aynı zamanda Uluslararası Teorik Fizik Merkezi de Dirac ödülü adında bir başka ödül vermeye başladı. Babasının memleketi olan İsviçre Saint-Maurice'te tren istasyonunun karşısına, Dirac onuruna bir hatıra parkı yapıldı.

Paul Dirac öldükten sonra İngilterede profesyonel fizikçilerinden oluşan Fizik enstitüsü adına Paul Dirac Madalyası'nı düzenledi. Abdus Salam Uluslararası Teorik Fizik Merkezi de her sene Paul Dirac'ın doğum gününde verilen Dirac Madalyasını düzenledi.

Amerika'da Tallahassee, Florida'daki Ulusal Yüksek Manyetik Alan Laboratuvarı'nın bulunduğu caddeye Paul Dirac Drive ismi verildi.

Kitapları :  
1930 – Kuantum Mekaniğinin İlkeleri (The Principles of Quantum Mechanics), Oxford Science Publications.

1975 – General Theory of Relativity

Dirac' ın unutulmaz deyişleri

- Tanrı varsa kesinlikle büyük bir matematikçidir.
- Tanrı dünyayı yaratırken, harika bir matematik kullandı.
- Matematiksel güzelliği olan bir teorinin, bazı deneysel verilere uyan çirkin bir teoriden doğru olma olasılığı daha yüksektir.

## Laurent Schwartz (1915-2002)



Fransız matematikçisi (Paris 1915-2002) olan Schwartz, yüksek öğretmen okulunu bitirerek matematik öğretmeni oldu. Nancy Fen fakültesinde doktorasını yaptı. 1953'te Paris Fen fakültesinde diferansiyel denklemler kürsüsüne getirildi. Profesör olarak Politeknikte analiz dersini verdi. 1950'de, "Alanlar" konusunda, Milletlerarası matematikçiler kongresinde, madalya kazandı. Fonksiyonlar analizi ile özel olarak ilgilendi. Dağılımlar kuramı ile ilgili çalışmalar yaptı. Fonksiyon kavramını genelleştirerek, dağılım kavramını yerine oturttu. Böylece P.A.M Dirac tarafından geliştirilen Dirac işlevini, dağılım kuramında kullanarak, kullanılışının yerinde olduğunu gösterdi. Kuramsal matematikte kullanılan bir çok konuların uygulamalı matematikte de kullanılabileceğini gösterdi.

Kendisini "Sol adamı" olarak adlandıran Schwartz, Fransa'nın Cezayir'e girdiği savaşın önemli karşıtlarından birisiydi.

87 yaşındayken (4 temmuz 2002) yaşamını yitiren Schwartz'ın çok sayıda eseri bulunmaktadır.

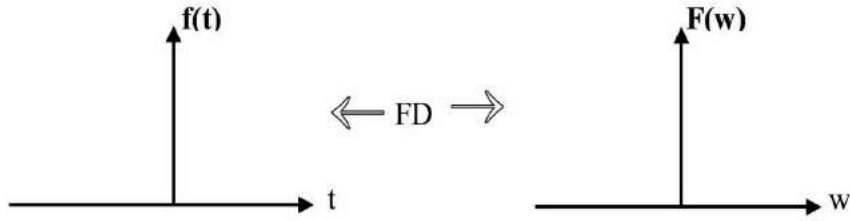
## **BÖLÜM 6**

### ***JEOFİZİKTE ÇOK KULLANILAN BAZI DÖNÜŞÜMLER***

#### ***6.1 İKİ VE ÜÇ BOYUTLU FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ***

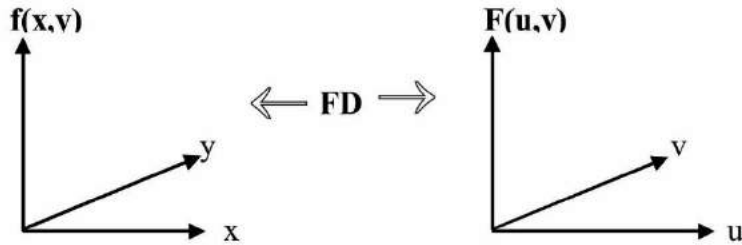
##### ***6.1.1 Tanımlar***

Daha önceki bölümlerde tek boyutlu FD' leri verilmiştir. Şekil 6.1 de tek boyut/tek değişken (zaman, t) ve frekans ortamı değişkenleri (w) görülmektedir.



**Şekil 6.1** Tek boyutlu zaman ve frekans ortamı bağımsız değişkenleri

Ancak harita düzleminde 2 boyutlu (2B) FD' lerine gereksinim duyulur. Bir haritanın "x" ve "y" olmak üzere 2 bağımsız değişkeni (boyutu) vardır. "x" ve "y" eksenlerine karşılık gelen frekans değişkenleri ise "u", "v" olarak gösterilmektedir (şekil 6.2).



**Şekil 6.2** İki boyutlu zaman ve frekans ortamı bağımsız değişkenleri



Zaman serileri için kullanılan tüm kurallar, uzay serileri için de geçerlidir. Ancak zaman ve uzay ortamı değişkenlerinin özellikleri farklıdır. En temel farklılık, dönemdir. Zaman verileri “dönemsel” dir. Uzay verilerinde böyle bir koşul yoktur. Bu nedenle, sinyal kuramında, uzay verilerinden söz edilirken “dalga” terimi kullanılır. Şekil 6.3 te iki ortama ait kavramlar karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

### 6.1.2. İki, üç ve çok boyutlu FD. leri

Tek boyutlu FD bağıntıları, (3.8, 3(9) denklemleriyle verilir. Bu denklemlerde “t” yerine “x” ve “w” yerine “u” bağımsız değişkenleri kullanılarak, uzay ortamı, tek boyutlu FD eşitlikleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$F(w) = \mathfrak{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.8)$$

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}[F(w)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{j\omega t} dw \quad (3.9)$$

$$F(u) = \mathfrak{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jux} dx \quad (6.1)$$

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}[F(u)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{jux} du \quad (6.2)$$

2B FD’ leri, alansal verilerde uygulanır. Özellikle potansiyel alanlarda yapılan veri işlem uygulamalarında yaygın kullanılır. Örnek olarak aşağıda verilen işlem teknikleri sayılabilir.

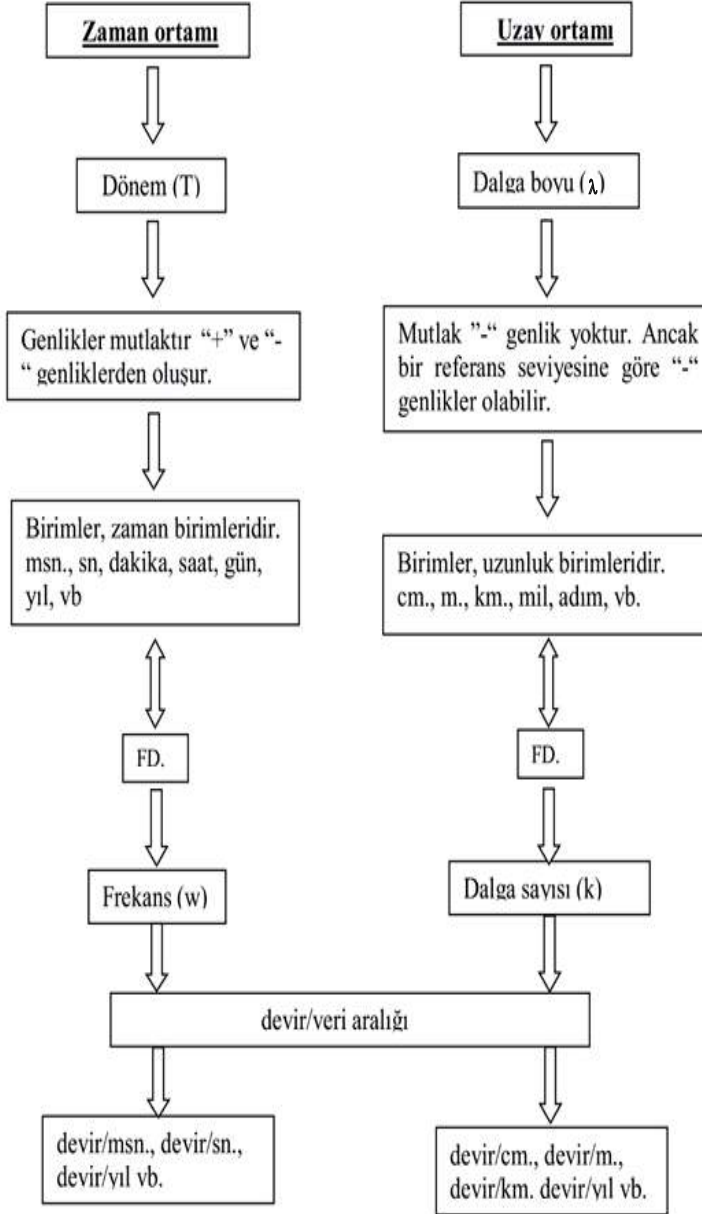
- 2B dizge (süzgeç) düzenleme (süzgeçler, analitik uzanımlar, türev yöntemleri, güç spektrumu vd.),
- Sismikte, 2 boyutlu olayların frekans ortamına aktarılması örneğin migrasyon denklemi 3 bağımsız değişkenlidir (x,z,t). Bu nedenle 3B.FD kullanılır,
- 2 boyutlu pencereleri frekans ortamına aktarmakta,
- tüm iki boyutlu frekans tepki işlevlerinin elde edilmesinde, vb.,

2 boyut için (x,y) 2B FD bağıntıları (vb),

$$F(u, v) = \mathfrak{F}[f(x, y)] = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (6.3)$$

$$f(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}[F(u, v)] = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (6.4)$$

olarak yazılır (tümlevlerin önüne gelecek olan katsayılar göz önüne alınmamıştır). Eğer bağımsız değişken olarak üçüncü eksen (düşey eksen, “z”) kullanılacaksa, 3B. FD. denklemlerinden yararlanılır.



Şekil 6.3 Zaman ve uzay ortamı tanımları

$$F(u, v, w) = \mathfrak{F}[f(x, y, z)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy+wz)} dx dy dz$$

$$f(x, y, z) = \mathfrak{F}^{-1}[F(u, v, w)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v, w) e^{j2\pi(ux+vy+wz)} du dv dw \quad (6.5)$$

$$(6.6)$$

Boyut sayısı arttırılabilir. Örneğin yeraltındaki bir petrol depo alanı, üretimden kaynaklanan şekil değişikliklerine uğrar. Bu değişimlerin izlenebilmesi için zaman boyutunda Jeofizik gözlemler (örneğin her yıl) yapılır. Böylece 4. boyut olan zaman da eklenmiştir. Örnekler arttırılırsa, “n” boyutlu FD çifti

$$F(w_1, w_2, \dots, w_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-j2\pi(x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (6.7)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(w_1, w_2, \dots, w_n) e^{j2\pi(x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n)} dw_1 dw_2 \dots dw_n \quad (6.8)$$

dır. 2B FD’ lerinin ayrık biçimde gösterimi,

$$\hat{F}(k_1, k_2) = \mathfrak{F} \left[ \hat{f}(n_1, n_2) \right] = \sum_{n_1=0}^{M-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) e^{-j2\pi(k_1 n_1 / M + k_2 n_2 / N)} \quad (6.9)$$

$$\hat{f}(n_1, n_2) = \mathfrak{F}^{-1} \left[ \hat{F}(k_1, k_2) \right] = \frac{1}{MN} \sum_{k_1=0}^{M-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} F(k_1, k_2) e^{j2\pi(k_1 n_1 / M + k_2 n_2 / N)} \quad (6.10)$$

olarak verilir. (6.9-6.10) bağıntılarında:

$k_1, k_2$  : Frekans ortamı sayıcısı

$n_1, n_2$  : Zaman ortamı sayıcısı

$k_1, n_1$  : 0, 1, 2, ....., M-1

$k_2, n_2$  : 0, 1, 2, ....., N-1

M : x eksenini boyunca ayrık veri sayısı

N : y eksenini boyunca ayrık veri sayısıdır.

2B dizgelerin dönüşüm işlevleri, dairesel bakışıktır yani “u” ve “v” eksenlerine göre çifttirler (bkz bölüm 6.2). Bu nedenle 2B düzenek hesaplamalarında 2B FD yerine, 2B kosinüs dönüşümü kullanılır. 2B ayrık düz, ters kosinüs dönüşümleri izleyen eşitliklerle verilmiştir.

$$\hat{F}(k_1, k_2) = \mathfrak{F} \left[ \hat{f}(n_1, n_2) \right] = 4 \sum_{n_1=0}^{M-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \hat{f}(n_1, n_2) \cos(2\pi n_1 k_2) \cos(2\pi n_2 k_1) \quad (6.11)$$

$$\hat{f}(n_1, n_2) = \mathfrak{F}^{-1} \left[ \hat{F}(k_1, k_2) \right] = \frac{4}{MN} \sum_{k_1=0}^{M-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} \hat{F}(k_1, k_2) \cos(2\pi n_1 k_2)$$

$$\cos(2\pi_2 k_1)$$

$$(6.12)$$

2B bazı işlevlerin bağıntıları ve onların uzay ve dalga sayısı ortamlarındaki görüntüleri Şekil 6.4 te verilmektedir. Şekil 6.4' e ait açıklamalar aşağıdadır.

- a) “x , y” eksenlerinde “ $\tau_x$ ”, “ $\tau_y$ ” kadar kaydırılmış birim dürtü işlevinin FD.
- b) “x” ekseninden “ $\tau_x$ ” kadar kaydırılmış 1 boyutlu birim dürtü işlevi katarının FD. İşlev, “x” eksenini boyunca değişmektedir.
- c) Tek boyutlu, “cos” işlevinin spektral ortam genlikleri “+” dır.
- d) İki boyutlu sinüsoidal işlevinin (atermit benzeri) FD 'ü, dalga sayısı ortamında iki adet dürtü işlevinden oluşur.
- e) 2 boyutlu, üstel işlevin, uzay ve dalga sayısı ortamlarındaki görüntüleridir. Bunların bağıntıları,  $f(x, y) = [e^{-\pi(x^2+y^2)}]$ ,

$F(u, v) = [e^{-\pi(u^2+v^2)}]$  dır. İşlev, her iki ortamda çift ve bakışıktır. Sanal kısım yoktur.

f) Uzay ortamında, “y” yönünde uzatılmış Gauss çanı işlevi. A: genlik, a: x eksenini ölçekleme katsayısı olmak üzere her iki ortamdaki denklemleri,

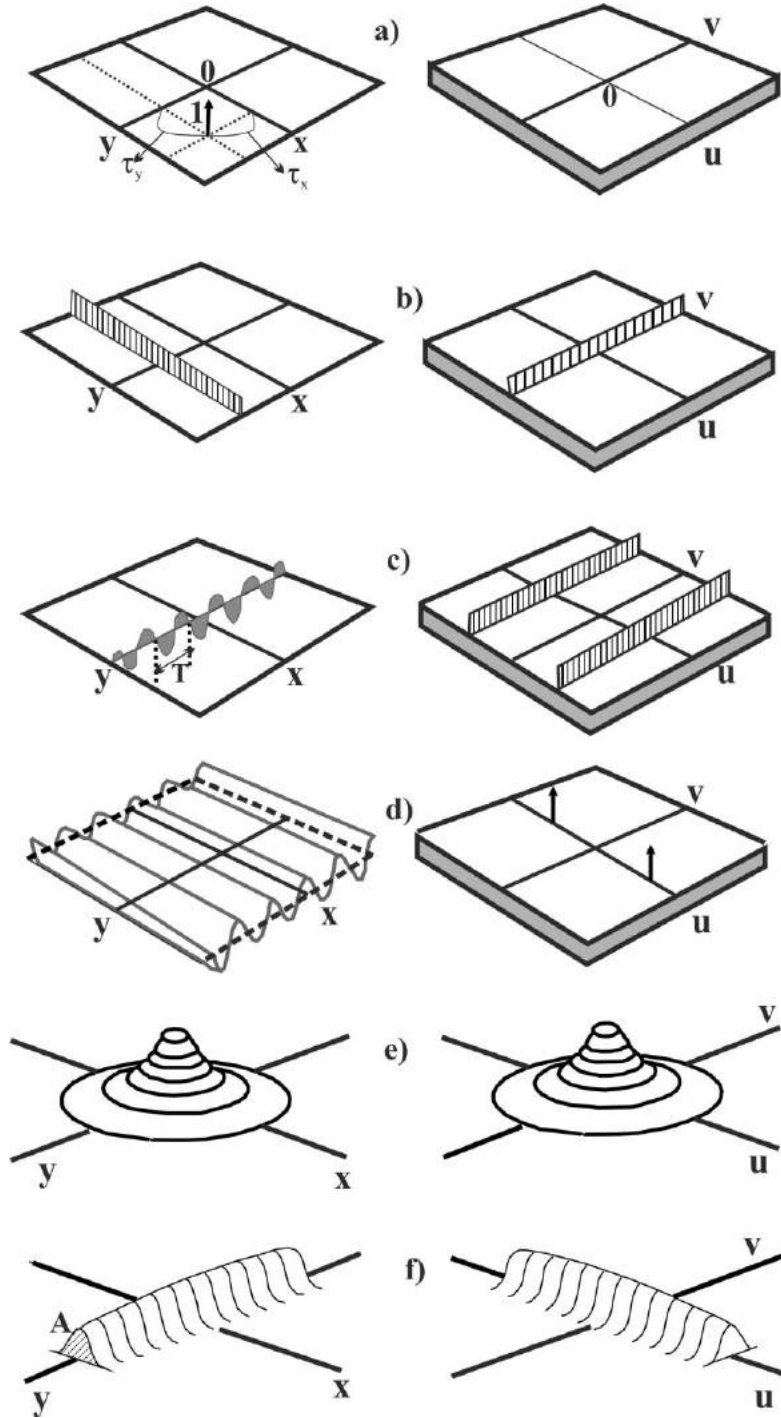
$$f(ax, y) = \left[ e^{-\pi\left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{a^2}\right)} \right], \quad F(u, v) = Aa \left[ e^{-\pi(A^2 u^2 + a^2 v^2)} \right] \text{ dır.}$$

## 6.2 HANKEL DÖNÜŞÜMLERİ

Potansiyel alanlar dairesel bakışıktırlar. Potansiyel alanlarda, bir nokta kütleden, iki boyutlu ortama yayılan dalgalar dairesel bakışıktırlar (şekil 6.5). Dairesel bakışık olan sistemlerde FD yerine Hankel dönüşümlerinin kullanılması daha doğrudur.

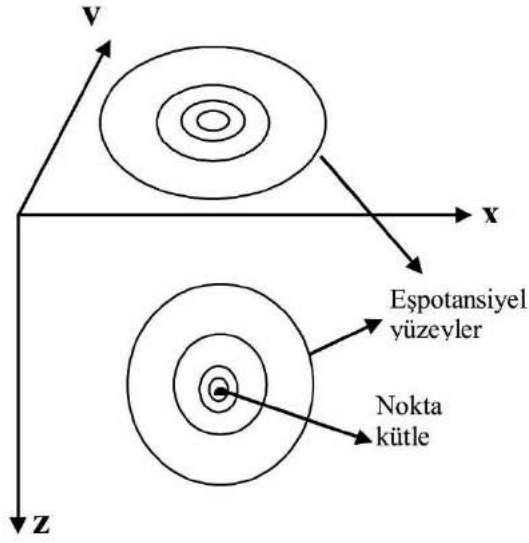
Dean(1958), potansiyel alanlarda, 2B' lu olarak kullanılan çeşitli süzgeçlerin frekans tepki işlevlerini hesaplamıştır. Potansiyel alanlarda, bir devrim niteliğinde olan, bu çalışmadan sonra dizgeler dalga sayısı ortamında düzenlenebilmiştir. Bilgisayarların gelişmesi, hesaplama işlemlerini en aza indirmiştir. Böylece frekans/dalga sayısı ortamlarında, süzgeç tasarlama çok kolaylaşmıştır. Bu tip süzgeçlere

örnek olarak alçak-yüksek-bant geçişliler, analitik uzanımlar, türev düzenekleri vb. sayılabilir.



**Şekil 6.4** Bazı tek ve 2 boyutlu işlevler ve onların FD (Linseth 1970 ve Bracewell 1986 dan yararlanılmıştır).

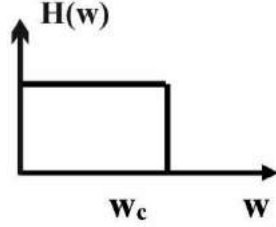
2B lu dairesel bakışık düzeneklerin bilgisayar ortamında tasarlanmasında FD yetersiz kalmaktadır. Tek boyutlu dizgelerde ise böyle bir sorun yoktur. Ancak 2 boyuta geçerken, bilgisayar kullanılmasından kaynaklanan bazı sorunlar oluşur.



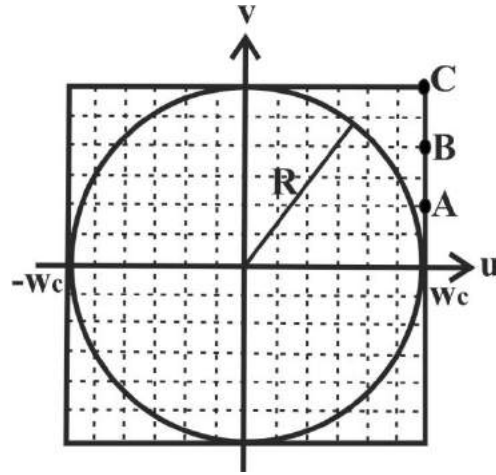
**Şekil 6.5** Potansiyel alanlarda, nokta kütleden, çevreye yayılan dalgalar

Şekil 6.6 da frekans ortamında tasarlanmış 1B. lu alçak geçişli bir düzenek görülmektedir (bkz bölüm11). Şekil 6.6 da görülen kesme frekansının ( $w_c$ ) yönden bağımsız, her doğrultuda aynı olması istenir. 2B lu süzgeç düzenlenirken kesme frekansı " $w_c$ " yöne bağlıdır. Şekil 6.7 de kesme frekansı 0.6 devir/veri aralığı, frekans ortamı örnekleme aralığı  $\Delta w=0.1$  olan 2 boyutlu bir alçak geçişli süzgecin dalga sayısı ortamındaki görüntüsü verilmektedir. Kesme frekansı her yönde aynı 0.6 devir/veri aralığı olması istenirken, seçilen 3 noktada da farklı frekans değerlerine sahiptir (çizelge 6.1). Çizelge 6.1 den görüldüğü gibi en büyük hata köşegen doğrultusundadır. Köşegene gidildikçe, kesme frekansı, yüksek frekanslara doğru kaymaktadır. Yüksek

frekanslara kayma, süzgeç çıktılarında, bu yönlerde, daha kısa dalga boylu yapılar varmış gibi gerçeğe aykırı bir sonuç doğurur.



Şekil 6.6 Frekans ortamında, 1 boyutlu alçak geçişli süzgeç



Şekil 6.7 Dairesel bakışımın kalkması (Pınar 1984).

NOKTALAR	KESME FREKANSI (devir/veri aralığı)	FARK YANILGI (devir/veri aralığı)
A	0.63	0.03
B	0.72	0.12
C	0.84	0.24

Çizelge 6.1 İki boyutlu düzeneklerin kesme frekanslarının yöne bağlı olarak değişimleri

Dairesel bakışık olan bir süzgecin tüm doğrultulardaki süzgeçleme etkisi aynıdır. 2B. lu bir işlev dairesel bakışım gösteriyorsa, matematiksel olarak,

$$f(x, y) = f[\sqrt{x^2 + y^2}] = f(r) \quad (6.13)$$

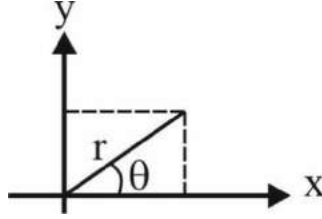
yazılabilir. Bu durumda, frekans ortamı işlevi dairesel olacaktır. Frekans ortamında dairesel bakışık bir işlev

$$F(u, v) = F[\sqrt{u^2 + v^2}] = F(k) \quad (6.14)$$

dır. Bu koşulda dairesel bakışık FD bağıntısı,

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x^2 + y^2)^{1/2} e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (6.15)$$

dır. Bağıntı yazılırken, dik koordinat sisteminin, kutupsal koordinatlara dönüştürülmesi gerekir. Şekil 6.8 den yararlanılarak,



Şekil 6.8 Kutupsal koordinatlar

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \quad , \quad y = r \sin(\theta) \quad , \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ u &= k \cos(\varphi) \quad , \quad v = k \sin(\varphi) \quad , \quad k = (u^2 + v^2)^{1/2} \quad , \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{v}{u} \end{aligned} \quad (6.16)$$

yazılabilir. Burada “θ” ve ”φ” sırasıyla uzay ve dalga sayısı ortamlarına ait evrelerdir. (6.15) denkleminde, (6.16) tanımlarından,

$$F(k, \varphi) = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r) e^{-j2\pi r [\cos(\theta)\cos(\varphi) + \sin(\theta)\sin(\varphi)]} r dr d\theta \quad (6.17)$$

durumuna gelir. Trigonometrik bağıntılardan

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) + \sin(\theta)\sin(\varphi) \quad \text{dır.}$$



$$F(k, \varphi) = \int_{r=0}^{\infty} r f(r) dr \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-j2\pi kr [\cos(\theta-\varphi)]} d\theta \quad (6.18)$$

(6.18) eşitliği, Bessel işlevleri kullanılarak kısaltılır. Bessel işlevi,

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} e^{-jz \cos(\alpha)} d\alpha \quad (6.19)$$

dır. Burada, “ $J_0(z)$ ” 0. dereceden Bessel işlevidir.  $\alpha = \theta - \varphi$  yazılarak,

$$2\pi J_0(z) = \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-jz \cos(\theta-\varphi)} d\theta \quad (6.20)$$

elde edilir. Son bağıntıda,  $z = 2k\pi r$  konarak

$$2\pi J_0(2k\pi r) = \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-j2k\pi r \cos(\theta-\varphi)} d\theta \quad (6.21)$$

bulunur. (6.21), (6.18) denklemindeki ikinci tümlevidir.

$$F(k, \varphi) = 2\pi \int_{r=0}^{\infty} r f(r) J_0(2\pi kr) dr \quad (6.22)$$

(6.22) de eşitliğin sol tarafında “ $\varphi$ ” açısı bulunmamaktadır. Ancak tümlevde, “ $\varphi$ ” açısı bir değişken değildir. Bu nedenle, işlev “ $\varphi$ ” açısına bağlı değildir. Yani dürtü tepki işlevinin yanıtı, açıdan bağımsız, her yönde aynıdır (açıdan bağımsızlık, dairesel bakışım). Böylece (6.15) bağıntısıyla verilen 2B FD denklemi, Bessel işlevlerinden yararlanılarak, dairesel bakışıma sahip bir dönüşüm ifadesine durumuna getirilmiştir. Bu ifade HANKEL dönüşümüdür (veya Fourier-Bessel dönüşümü). Benzer gidiş yolu, 2B lu TFD denklemi için de kullanılabilir. Bu koşulda da ters Hankel dönüşüm bağıntısına ulaşılır (6.23 a-b denklemleri). (6.23) eşitlikleri iki boyutlu, dairesel bakışıma sahip FD çiftidir.

$$F(k) = 2\pi \int_0^{\infty} r f(r) J_0(2\pi kr) dr \quad (6.23.a)$$

$$f(r) = 2\pi \int_0^{\infty} k F(k) J_0(2\pi kr) dk \quad (6.23.b)$$

(6.23.a) sıfırcı dereceden Hankel dönüşümü, (6.23.b) sıfırcı dereceden ters Hankel dönüşümüdür. 2B dairesel bakışık dizgelerin oluşturulmasında Hankel dönüşümlerinden yararlanır. 2B dairesel bakışık dizgeler, potansiyel alan verilerinin süzülmesinde yaygın

olarak kullanılır (2B alçak-yüksek-bant geçişli dizgeler, analitik uzanım dönüşüm işlevleri, vb. tasarlanması).

(6.23) bağıntılarındaki;

$F(k)$ : süzgecin dalga sayısı ("k" ortamı) tepki işlevi

$f(r)$ : süzgecin uzay ortamı ("r" ortamı) işlevidir. Eğer bunlardan herhangi biri bilinirse diğeri de bulunur.

Hankel dönüşümü kullanılarak süzgeç düzenlenebilir. "k" süzgecin kesme dalga sayısı olmak üzere süzgecin dalga sayısı tepki işlevi,

$$F(k) = \begin{cases} 1 & , |k| \leq k_1 \\ 0 & , |k| > k_1 \end{cases} \quad (6.24)$$

olarak tanımlanabilir. Buna göre,

$$f(r) = 2\pi \int_0^{k_1} J_0(2\pi kr) k dk$$

$$f(r) = k_1 J_1(2\pi k_1 r) / r \quad (6.25)$$

dır. (6.25) yardımıyla süzgeç katsayıları hesaplanabilir (Lavin ve Devanne 1970). Bu tür süzgeçleme, Ege Bölgesi havadan manyetik verilerine Sanver(1974) tarafından uygulanmıştır.

Hankel dönüşümleri, dairesel bakışıma sahip 2B FD olduklarından ötürü FD nün tüm özellikleri geçerlidir. Dairesel bakışım olması nedeniyle kayma ortadan kalkmıştır. Sanal kısım olmayacağından ötürü evre terimi de yoktur. Çizelge 6.2 de 2B FD nün özellikleri, 6.3 te ise Hankel dönüşümlerinin özellikleri verilmektedir.

Özellik	$f(x,y)$	$F(u,v)$
Ölçekleme	$f(ax, by)$	$\frac{1}{ ab } F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$
Doğrusallık	$f(x, y) + g(x, y)$	$F(u, v) + G(u, v)$
Kayma	$f(x - a, y - b)$	$e^{-j2\pi(au+bv)} F(u, v)$
Parseval kuramı	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty}  f(x, y) ^2 dx dy = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty}  F(u, v) ^2 du dv$	

Evirişim	$f(x, y) * g(x, y) = F(u, v) \cdot G(u, v)$
Özilişki	$R(\tau_1, \tau_2) =  F(u, v) ^2$

**Çizelge 6.2** İki boyutlu Fourier dönüşümünün özellikleri

Özellik	$f(r)$	$F(k)$
Ölçekleme	$f(ar)$	$a^{-2} F(k/a)$
Doğrusallık	$f(r) + g(r)$	$F(k) + G(k)$
Kayma	Orijinin kayması dairesel bakışımı yok eder	
Parseval	$\int_0^{\infty} r  f(r) ^2 dr = \int_0^{\infty} k  F(k) ^2 dk$	
Evirişim	$f(r) * g(r) = F(w) \cdot G(w)$	

**Çizelge 6.3** Hankel dönüşümü özellikleri

### 6.3 HİLBERT DÖNÜŞÜMLERİ (HD)

Hilbert dönüşümleri Jeofizikte, geniş kullanım alanları bulmuştur. HD' ünün, zaman veya uzay ortamında uygulanması, bir diğer kolaylıktır. HD' ü doğrusal bir işleçtir. Bu nedenle her türlü işlev ( $-1/\pi t$ ) ile evriştirilerek (Bracewell, R.,N., 1986) HD alınır. HD işleci olan " $\mathcal{H}_i$ ", önüne geldiği işlevlerin HD. nün alınacağını gösterir (bkz 6.3.3.b).

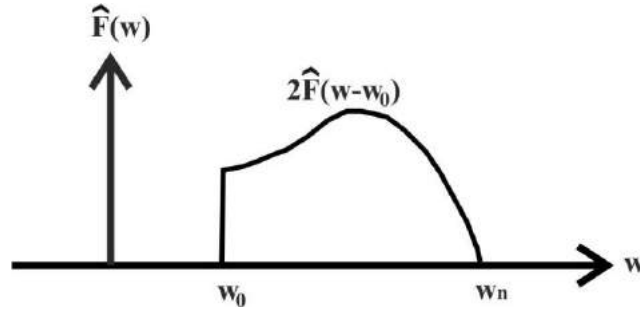
$$\hat{f}(t) = f(t) * \left[ \frac{-1}{\pi t} \right] \quad (6.26)$$

$$\mathcal{H}_i(t) = \left[ \frac{-1}{\pi t} \right] \quad (6.27)$$

HD için ayrıntılı bilgi bölüm 6.3.3 de verilecektir. (6.26) denklemindeki terimlerin anlamları için analitik sinyal ve tek yanlı (causal-önbilmez) işlevler anlaşılmalıdır.

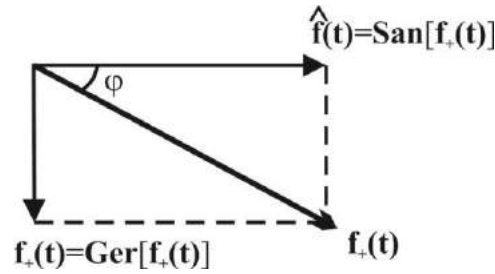
#### 6.3.1 Analitik Sinyal

Analitik sinyal, zaman veya uzay ortamında gerçel ve sanal bileşenleri olan bir sinyaldir. Gerçel ve sanal kısımlar gelişigüzel değildir. Aralarındaki ilişki, Hilbert Dönüşümleri ile kurulur. Analitik bir sinyal, frekans ekseninin yalnızca, pozitif tarafında tanımlıdır (şekil 6.9). Bu nedenle tek yan bantlıdır ve “ $f_+(t)$ , ve  $F_+(w)$ ” simgeleriyle gösterir.



Şekil 6.9 Analitik sinyalin tek yan bant özelliği

“ $f_+(t)$ ” analitik sinyali (bileşeni), gerçel ve sanal kısımlardan oluşur (şekil 6.10). Böylece analitik sinyal,



Şekil 6.10 Analitik sinyal ve bileşenleri

$$f_+(t) = f(t) - j\hat{f}(t) = f(t) - j\mathcal{H}_i[\hat{f}(t)] = a(t)e^{j\phi(t)} \quad (6.28)$$

olarak tanımlanır. Burada

$$f(t) = \text{Ger}[f_+(t)], \quad (6.29)$$

$$\hat{f}(t) = \text{San}[f_+(t)] \quad (6.30)$$

$$f(t) \Leftarrow \mathcal{H}_i \Rightarrow -\hat{f}(t) \quad (6.31)$$

$$\hat{f}(t) = \mathcal{H}_i[f(t)] \quad (6.32)$$

$$a(t) = \sqrt{[f(t)]^2 + [\hat{f}(t)]^2} = \sqrt{\{\text{Ger}[f_+(t)]\}^2 + \{\text{San}[f_+(t)]\}^2}$$

(6.33)

$$\varphi = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{\hat{f}(t)}{f(t)} \right] = \text{tg}^{-1} \frac{\text{San}[f_+(t)]}{\text{Ger}[f_+(t)]} \quad (6.34)$$

$a(t)$ : genlik değişimi (zarf veya yansıma enerjisi)

$\phi(t)$ : evre değişimidir.

Bazı yayınlarda “ $a(t)$ ” anlık genlik ve “ $\phi(t)$ ” anlık evre (anlık frekans) olarak gösterilmiştir. Sinyal tek bir bileşen içeriyorsa

$$f_+(t) = a(t) \cdot e^{j2\pi\phi(t)} \quad (6.35)$$

yapısındadır. Bu koşulda, “ $a(t)$ ” ve “ $\phi(t)$ ” anlık olarak isimlendirilir. Ancak genelde sinyalde tek bir bileşen olmaz. Dolayısıyla yalnızca genlik ve evre değişimleri olarak adlandırılacaktır. Anlık tanımı ise zamana göre türevleri içerir (Bkz ikincil bileşenler bölüm 6.3.5). Analitik sinyalin FD (6.39) eşitliği ile verilmiştir.

$$\hat{f}(t) = \mathcal{H}_i[f(t)] = \mathcal{H}_i(t) * f(t) = j \left[ \frac{-1}{\pi t} \right] * f(t)$$

dir. (6.30), (6.27) ile birlikte kullanılırsa,

$$f_+(t) = f(t) + j\mathcal{H}_i[f(t)] = f(t) + j \left[ \frac{-1}{\pi t} \right] * f(t) \quad (6.36)$$

yazılır. HD'nün frekans ortamı bağıntısını bulmak için (6.36) bağıntısının FD alınır.

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}[f_+(t)] &= \mathfrak{S}[f(t)] + j\mathfrak{S}[\hat{f}(t)] = \mathfrak{S}[f(t)] + j\mathfrak{S}[\mathcal{H}_i] \cdot \mathfrak{S}[f(t)] \\ \mathfrak{S}[f_+(t)] &= \mathfrak{S}[f(t)] + j\mathfrak{S} \left[ \frac{-1}{\pi t} \right] \cdot \mathfrak{S}[f(t)] \\ \mathcal{H}_i(w) &= \mathfrak{S}[\mathcal{H}_i(t)] \quad \text{dir.} \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\mathfrak{S} \left[ \frac{-1}{\pi t} \right] \Leftarrow FD \Rightarrow jsgnw \quad (6.38)$$

(bkz örnek 3.9).

$$\mathcal{H}_i(jw) = jsgnw = \begin{cases} -j, & w > 0 \\ j, & w < 0 \end{cases} \quad (6.39)$$

dır (Bracewell, R.,N., 1986). Son bağıntı frekans ortamında tanımlanmış signum işlevidir. Signum işlevi, birim basamak işlevi kullanılarak (3.9 örneğine bakınız).

$$\mathcal{H}_i(w) = -jsgn(w) = 2U(w) - 1 \quad (6.40)$$

(6.38–6.39-6.40) HD'nün spektrum ortamı bağıntılarıdır (HD lerinin Fourier dönüşümleri).

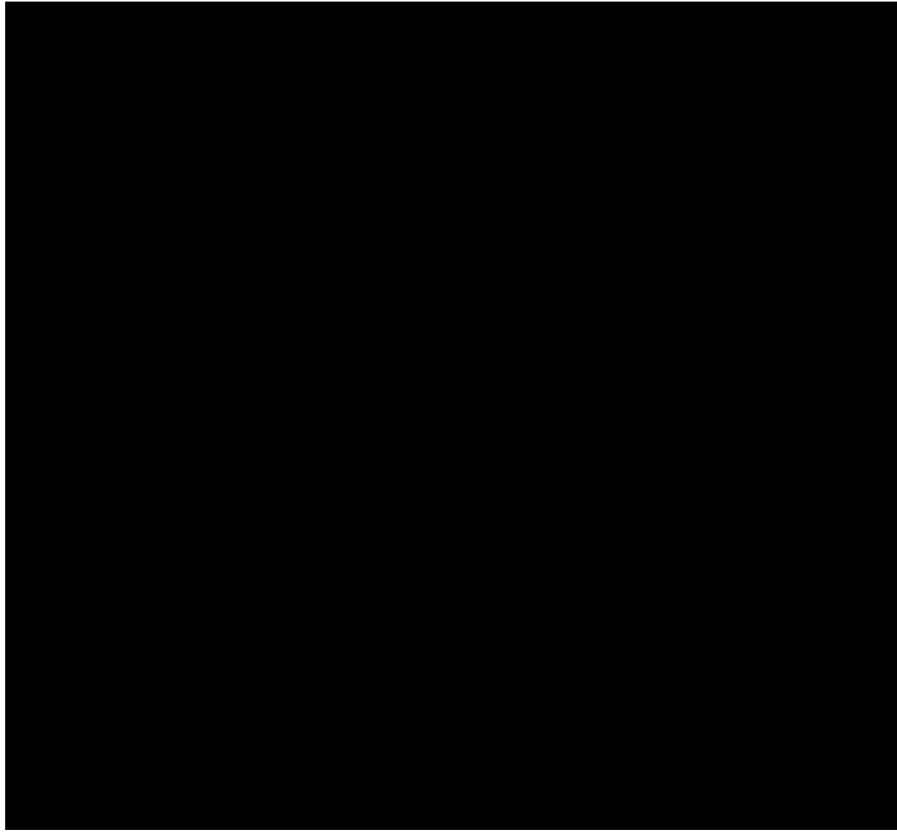
$$\begin{aligned}
F_+(w) &= F(w) + j\mathcal{H}_i(w).F(w) = F(w) + j[-j\text{sgn}(w)].F(w) \\
F_+(w) &= F(w) + j[-j\text{sgn}(w)].F(w) = F(w) + \text{sgn}(w).F(w) \\
F_+(w) &= F(w) + [2U(w) - 1]F(w) = F(w) + 2F(w)U(w) - F(w) \\
F_+(w) &= 2F(w)U(w) \tag{6.41}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik,

$$F_+(w) = \begin{cases} 2F(w) & w > 0 \\ F(0) & w = 0 \\ 0 & w < 0 \end{cases} \tag{6.42}$$

olarak gösterilir. (6.42) eşitliği, bir izin analitik olması için gerekli koşuldur (**Analitik Sinyal**). Denklemden de anlaşılacağı gibi tek yan bantlıdır (şekil 6.9).

Kosinüs ve sinüs izlerinden oluşmuş bir analitik sinyalin gerçel ve sanal bileşenleri şekil 6.11 de verilmektedir. Analitik izin (yeşil renkli) sanal bileşeni yatay düzlemde (mavi renkli), gerçel bileşeni (kırmızı renkli) düşey düzlemde görülmektedir. sin sinyali).



\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

### Şekil 6.11 Analitik sinyal ve bileşenleri

- Gerçek iz (kosinüs), analitik sinyalin gerçek bileşenidir (GB). (bkz bölüm 4.4).

$$f(t) = Ger[f_+(t)]$$

- Sanal iz (sinüs), analitik sinyalin sanal bileşenidir. Sanal bileşen, gerçelin  $90^0$  kaymasından oluştuğu için “out of phase component” veya “quadrature component” olarak isimlendirilir. “SB” olarak anılacaktır (bkz bölüm 4.4).

$$\hat{f}(t) = San[f_+(t)]$$

- Her iki bileşen arasındaki ilişki, HD. ile kurulur.

$$\hat{f}(t) \Leftarrow HD \Rightarrow f(t) \quad , \quad \hat{f}(t) = [A_i(t)]$$

Trigonometrik bağıntılardan, “cos” işlevinin  $\pi/2$  rad (veya  $90^0$ ) kaydırılmasıyla “sin” işlevi elde edilir. Türevinin alınması da aynı sonuca ulaştırır. Bu nedenle, Jeofizikte, geniş uygulama alanları bulmuştur (daha ilerdeki bölümlerde, örneklerle bu konuya değinilecektir). Bu uygulamalar “gradiyent” yöntemleri olarak bilinir.

#### 6.3.2 Önbilmez, önbilmezlik (nedensel, causal)

Bir sistemin çıkışı, “ $t_0$ ” ve  $t_{-1}, t_{-2}, t_{-3} \dots$  zamanlarına bağımlı (geçmişe bağlı) ve  $t_{+1}, t_{+2}, t_{+3} \dots$  anlarından bağımsız (gelecekte bağımsız) ise sistem veya sinyal önbilmezdir (nedensel). Tanımdan, geleceğin bilinmemesi anlamı çıkar.

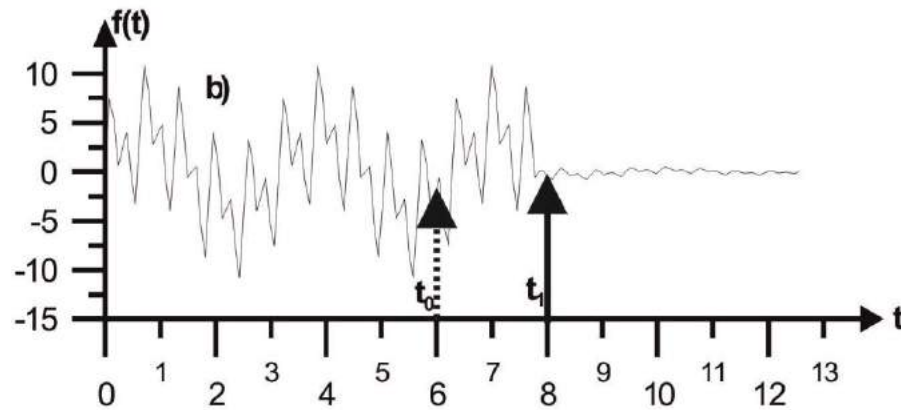
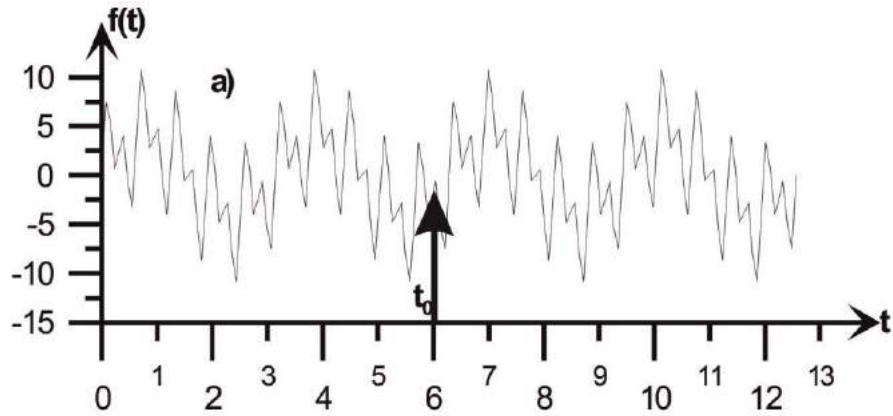
Gelecek hakkında, öngörüde bulunabiliriz. Biraz daha kesinlik kazandırmak istersek önkestirim yapılabiliriz. Ancak önceden bilemeyiz.

İz, tüm geçmiş ve o ana ait olan bilgileri taşır. Örneğin,  $T=1$  sn,  $T=0.2$  sn,  $T=0.1$  sn dönemli üç sinüzoidallerin toplamından oluşan işlev şekil 6.12.a da verilmiştir. Bulduğumuz zaman  $t_0=6$  sn olsun.

Yaşadığımız “ $t_0$ ” anında, sinyalin geleceği için öngörde bulunabiliriz. En azından, gelecekte sinyal, en büyük dönemi olan  $T=1$  sn ile dönemli olabileceği söylenebilir. Ancak şekil 6.12.b de  $t_1=8$ . saniyede,  $9.e^{-0.3t}$  izi karışarak (şekil 6.12.b) tüm öngörüler geçerliliğini yitirmiş, izin tüm özellikleri değişmiştir. Şekil 6.12.a da verilen  $t_0=6$  saniye zamanında, böyle olacağı bilinemez. Gelecek hakkında bilgi verilemez. Bilinen, geçmiş ve o andır. Nedensellik tanımı, olayı tam açıklayamamaktadır. Oysa tam olarak önceden bilmezliktir. Kelime, öngörü, önkestirim’e benzetilerek önbilmezlik/önbilmez olarak anılacaktır.

Önbilmezliği bir başka örnekle açıklayalım. Yürürken bir aracın freninin patladığını ve üzerimize doğru geldiğini düşünelim. Çok kısa bir sürede aracın doğrultu, konumunu ve kendi konumumuzu belirler, aracın bize çarparak kaza yapacağı önkestiriminde bulunur ve kaçarız. Oysa sürücü direksiyon kırabilir veya araç herhangi bir şeye çarparak doğrultu değiştirebilir. En kötüsü, direksiyonu kaçırdığımız yere doğru kırabilir. Verilen olgu tümüyle bir önbilgisizliktir, gelecekte ne olacağını bilememektir.

Nedensel işlevlerde, FD. nin gerçel ve sanal kısımları arasındaki ilişki HD çifti ile verilir (bkz 6.42 ve 6.44 bağıntıları).





## Şekil 6.12 Sinyallerde önbilmezlik

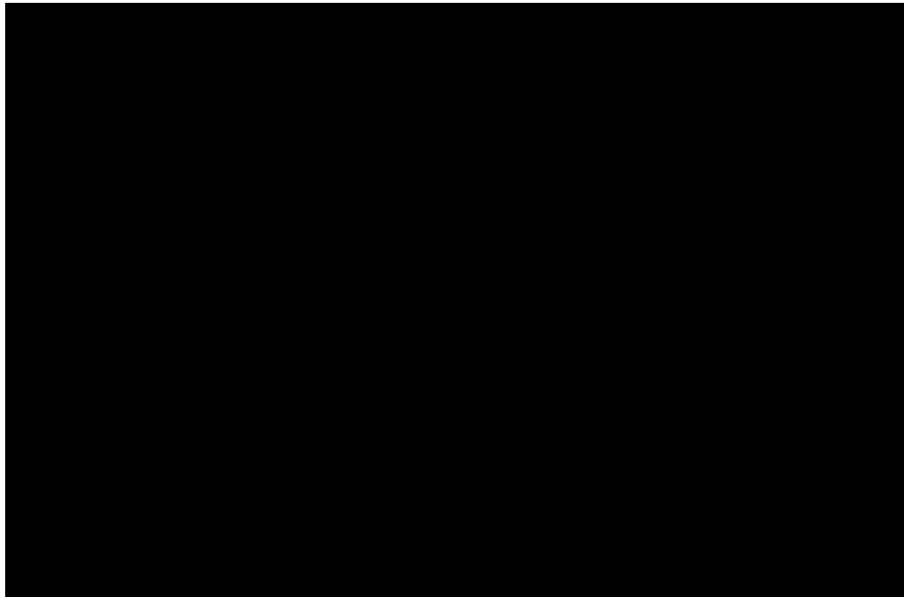
### 6.3.3 Hilbert Dönüşümleri

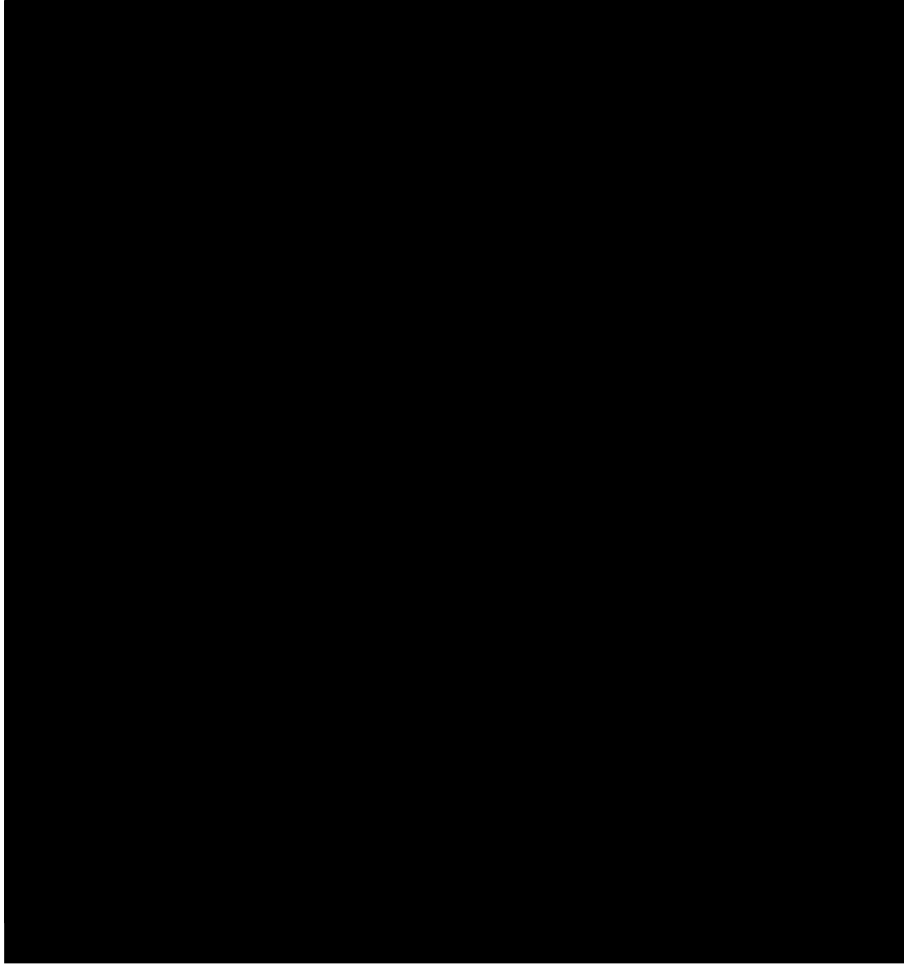
Potansiyel alanlarda, yatay ve düşey türevler kullanılarak analitik sinyal oluşturulabilir (bkz 6.3.4.a-b). Örneğin gravitede, potansiyelin yönlü türevleri, o yöndeki bileşenleri ( $g_x$ ,  $g_y$ ,  $g_z$ ) oluşturduğu için gravite izi analitik bir sinyaldir (bkz 6.3.4.a). Bu bileşenler ilerideki bölümlerde, *birincil bileşenler* olarak adlandırılacaktır. Benzer biçimde, bileşenlerin türevleri kullanılarak, yine, analitik sinyal oluşturulabilir. Bu biçimde oluşturulan bileşenlerde *ikincil bileşenler* olarak isimlendirilecektir (bkz 6.3.5). Böylece anomaliyi oluşturan yapının parametreleri, birincil ve ikincil bileşenlere ait matematiksel çözümler kullanılarak elde edilir (bkz. 6.3.5). Jeofizikte, oluşturulan analitik bir sinyalin çözümlenmesinde (dolayısıyla kaynak yapının parametrelerinin belirlenmesinde) HD' lerinin katkısı çoktur. HD' ne ulaşma yollarından 3 tanesi aşağıda verilmiştir.

#### 6.3.3.a. Hilbert Dönüşümlerinin, FD kullanılarak elde edilmesi

Aşağıdaki bağıntılar bölüm 3 te verilmişti.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{jw t} dw$$





\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

bulunur. Son eşitlik, Fourier tümlevine benzer. Bu nedenle “andıran Fouirer Tümlevi” olarak adlandırılır. “f(t)” nin SB (quadrature) işlevidir ve f(t) işlevinin Hilbert dönüşümü olarak bilinir.

$$f_1(t) = \mathcal{H}_i[f(t)]$$

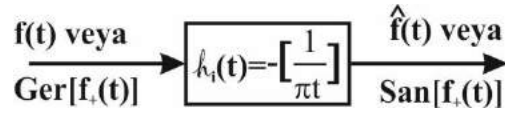
(6.45) ve (6.47) eşitlikleri Hilbert dönüşüm çiftidir.

**6.3.3.b. Hilbert Dönüşümlerinin dizge işlevi olarak elde edilmesi**

HD dönüşümü doğrusal bir işleçtir. Herhangi bir  $f(t)$  işlevinin HD (Bracewell 1986 dan değiştirilerek),

$$h_i(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t'-t} dt' \quad (6.48)$$

yazılır. Bu bağıntı  $t=t'$  de ıraksaktır. Tümlevin çözümü için Cauchy ve rezidü kuramları kullanılır. (6.48) bağıntısından " $h_i(t)$ " nin, " $f(t)$ " nin bir doğrusal işlevi olduğu görülmektedir. Bu durumda, HD. leri bir doğrusal dizge olarak tanımlanabilir (şekil 6.13).



**Şekil 6.13** HD lerinin doğrusal dizge olarak gösterilmesi

(6.48) bağıntısında " $t$ " kayma olarak düşünülürse, denklemin, bir evrişim olduğu anlaşılır. Bu koşulda (6.26) eşitliği; GB ve SB arasındaki geçişi gösterir. Geçiş, HD' nün alınmasıdır.

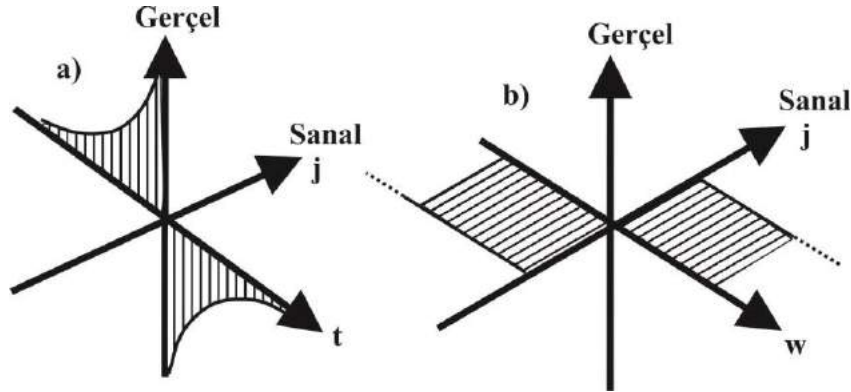
$$\hat{f}(t) = f(t) * \left[\frac{-1}{\pi t}\right] \quad (6.26)$$

Benzer düşünceyle, SB'nin bir kez daha HD alınır, bu kez gerçel ize, ters işareti ile birlikte ulaşılır.

$$f(t) = -\left\{\hat{f}(t) * \left[\frac{-1}{\pi t}\right]\right\} \quad (6.49)$$

(6.49) denkleminde,  $[-1/\pi t]$  HD katsayılarıdır (6.27 bağıntısı).

Bu işlevin zaman ve frekans ortamları görüntüleri şekil 6.14 tedir (şekil 6.14 için 3.9. örneğe bakınız). Örnek ile, buradaki signum işlevinin farkı, signum örnekte zaman ortamında, burada frekans ortamındadır. TFD alınarak aman ortamına geçilmiş ve  $-1/\pi t$  işlevi elde edilmiştir.



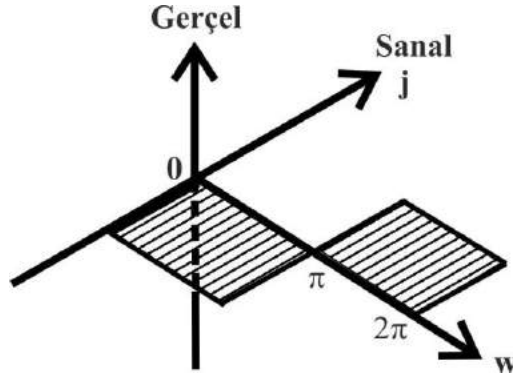
**Şekil 6.14 a)**  $f(t) = (-1/\pi t)$  işlevi (“t” ortamında, gerçel) **b)**  $f(w) = j \operatorname{sgn} w$  (“w” ortamında signum işlevi, sanal)

Şekil 14 a’ da verilen “-1/πt” işlevi aşağıda verildiği gibi sayısallaştırılır.

HD bağıntıları (6.38), (6.39) ile verilmiştir. Frekans ortamı denklemini, şekil 6.15 kullanılarak sınırlanır.

$$\mathcal{H}_i(jw) = j \operatorname{sgn} w = \begin{cases} -j, & 0 \leq w < \pi \\ j, & \pi \leq w < 2\pi \end{cases}$$

Son eşitlik, HD dizgesinin frekans tepkisidir. Frekans tepkisi verilen, sınırlandırılmış dizgenin zaman ortamı bağıntısı, TFD alınarak bulunur.



**Şekil 6.15** HD dizge işlevinin frekans tepkisi

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} -j e^{jwnt} dw + \int_{\pi}^{2\pi} j e^{jwnt} dw \quad (6.50)$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1 - e^{j\pi}}{\pi t} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

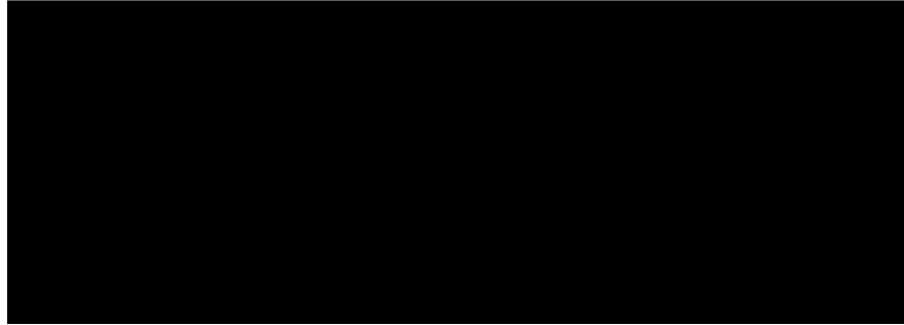
Son denklem ayrık olarak yazılırsa, izleyen bağıntı elde edilir. Bu eşitlik, zaman ortamında, HD süzgecinin ayrık denklemidir.

$$h(L) = \begin{cases} \frac{1 - e^{j\pi L}}{\pi L} & L \neq 0 \\ 0 & L = 0 \end{cases} \quad (6.51)$$

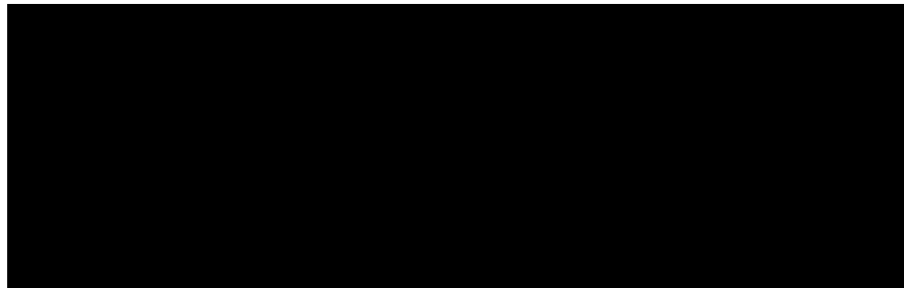
(6.51), Euler kuramından yararlanılarak  $e^{j\pi L} = \cos(\pi L) + j\sin(\pi L)$  yazılırsa,

$$h(L) = \frac{1 - e^{j\pi L}}{\pi L} = \frac{1 - [\cos(\pi L) + j\sin(\pi L)]}{\pi L} \quad (6.52)$$

bulunur. Son eşitlik kullanılarak ve normalleştirme yapılarak, hesaplanan, HD dizge katsayılarını hesaplayan program, EK-PR1 de verilmiştir (şekil 6.16). Program kullanılarak bulunan 15 boylu HD katsayılarını çizelge (6.4) de verilmiştir.



**Çizelge 6.4** 15 boylu, normalleştirilmiş, HD. işleç katsayıları



### Şekil 6.16 19 boyunda HD dizge katsayıları

HD katsayıları kullanılarak, HD alan program Ek Pr-2 de verilmiştir. HD leri uygulandıkları sinyalin genliğini ters çevirir, başka herhangi bir değişiklik yapmaz. Evresini ise  $90^0$  (veya  $\pi/2$  radyan) kaydırır.

#### **6.3.3.c. Cotg işlevi kullanılarak HD nün sayısal elde edilmesi**

Evrişim yöntemi, verinin baş ve sonunda kayıplara yol açar. Veri sayısının az olması durumunda HD lerininin bu yolla kullanılması sakıncalıdır. Bu nedenle sayısal HD hesaplamasında kullanılan farklı bir dönüşüm bağıntısı Cizek,V., (1970) tarafından verilmiştir. Ayrıntılara girmeksizin söz konusu denklemler aşağıdadır. “u(t)” zaman ortamında HD alınacak dizi  $h_i(t)=\mathcal{H}[u(t)]$  ve ayrık olarak  $h_i(n)=\mathcal{H}[u(k)]$  gösterilmiştir. Bağıntılarda verinin tek ve çift değerleri için toplamlar ayrı ayrı hesaplanır.



(6.53)

(6.53) eşitliğinde,

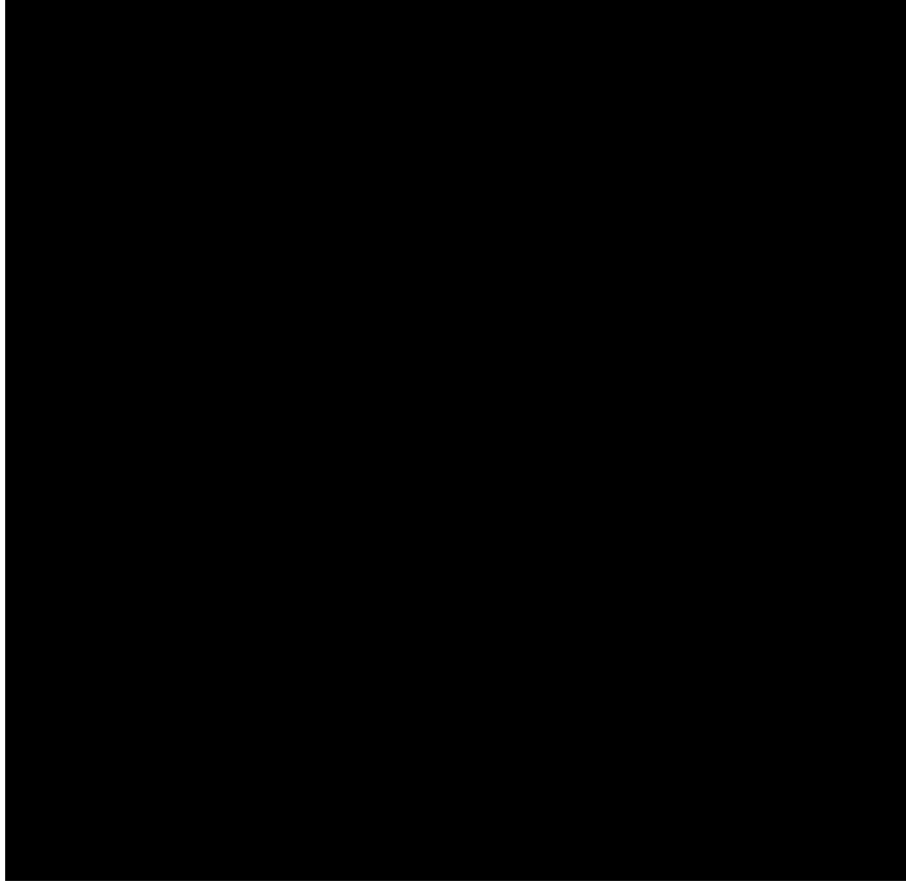
N: gözlem sayısı

n ve k: zaman ve frekans ortamı sayıcılarıdır.

#### **6.3.4 Dikdörtgen ve Kosinüs işlevlerin HD leri ve frekans ortamı görüntüleri**

Şekil 6.17 de bir dikdörtgen işlevin zaman ve frekans ortamlarındaki HD leri görülmektedir. İlgili açıklamalar aşağıdadır.

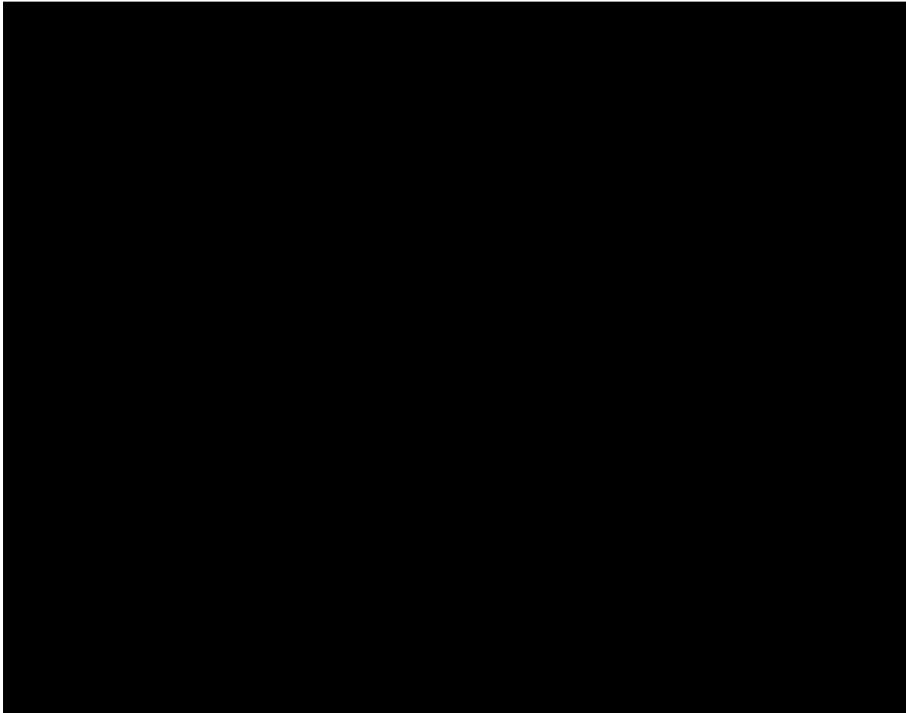
- a) Zaman ortamındaki dikdörtgen işlevin, “ $-1/\pi t$ ” ile evrişimi alınarak HD bulunmuştur (şekil 6.17.b). İşlev, zaman ortamında ve gerçeldir.
- b) Yeniden HD alınırsa, ters dikdörtgen işlev bulunur (şekil 6.17.c).
- c) Frekans ortamında dikdörtgen işlev “sinc”e dönüşür (şekil 6.17.d).
- d) Frekans ortamında HD nün alınması, “sinc” işlevinin sanal ortam signum (jsgnw) işlevi ile çarpılmasıdır. (6.36-37 bağıntıları). Signum işlevinin özelliğinden ötürü, “sinc” in HD’ü şekil (6.17.e) deki gibi eksen boyunca, ikiye bölünmüş ve ters dönmüş sanal işlevdir (kesikli çizgi).
- e) Söz konusu işlevin, bir kez daha HD alınırsa (jsgnw ile çarpılması), “sinc”, gerçel eksende ters çevrilmiş olarak elde edilir (f şekli).



**Şekil 6.17** Dikdörtgen işlevin zaman, frekans ortamlarındaki HD leri

Şekil 6.18 de ise “T” dönemli, “∞” boylu “cos” işlevinin, zaman ve frekans ortamları HD dönüşümleri verilmiştir. Açıklamalar aşağıdadır.

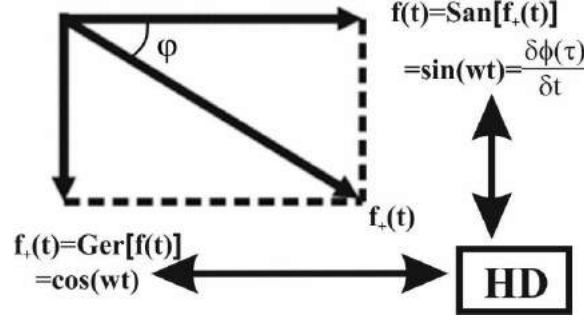
- a)** Zaman ortamında “cos” işlevi (şekil 6.19.a).
- b)** “cos” işlevinin, evrişim yolu ile HD alınmıştır. Kosinüs işlevi “ $\pi/2$ ” radyan kayarak “sin” işlevine dönmüştür. Elde edilen “sin” işlevinin genliği değişmemiştir (şekil 6.19.b).
- c)** Yeniden HD alındığında, ters, “cos” işlevi elde edilir (şekil 6.19.c).
- d)** Sonsuz boylu, “cos” işlevinin frekans ortamındaki görüntüsü, aynı yönlü, birim dürtülerdir (şekil 6.19.d).
- e)** Zaman ortamında evrişim olan HD’ ü, frekans ortamında, HD’nün frekans ortamı denklemiyle,  $[jsgn(w)]$  “cos” işlevinin frekans ortamı bağıntısıyla çarpılarak elde edilir. Bulunan, “sin” işlevinin frekans ortamı görüntüsüdür (sanal ortamda ters yönde dürtüler, şekil 6.19.e).
- f)** Yeniden HD alınır, “-“ yönlü birim dürtüler elde edilir. Aynı zamanda, dürtüler, “ $-\cos(wt)$ ” işlevinin spektrumudur (şekil 6.19.f).





**Şekil 6.18** “T” dönemli “cos” işlevinin zaman ve frekans ortamlarındaki HD leri

Şekil (6.18), şekil (6.10)’ a benzetilerek, bileşenleri, şekil (6.19) daki gibi gösterilebilir.



**Şekil 6.19** Sinüs ve kosinüs işlevlerinin oluşturduğu analitik sinyal (bkz. şekil 6.11) ve aralarındaki ilişki

Bileşenler arasındaki genlik (aynı zamanda zarf veya yansıma enerjisi olarak isimlendirilir) evre değişimleri (6.33) ve (6.34) eşitliklerinden bulunur.

### 6.3.5 İki boyutlu HD işleçleri

Alansal çalışmalarda, 2 boyutlu HD işleçlerinin kullanılması gerekir. Bu nedenle dönüşüm işleci 2 değişkenli olarak yazılmalıdır. Bölüm 6.1.1 de verilen uzay ve dalga sayısına ait gösterimler kullanılarak, dalga sayısı ortamındaki HD işlevi olan, signum aşağıdaki gibi hesaplanır (Nabighian 1984).

$$(u^2 + v^2)^{1/2} = ju \frac{-ju}{(u^2 + v^2)^{1/2}} - jv \frac{-jv}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \quad (6.55)$$

(6.55) denkleminin her iki tarafı  $\mathfrak{I}[M]$  ile çarpılırsa

$$(u^2 + v^2)^{1/2} \mathfrak{I}[M] = ju \frac{-ju}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \mathfrak{I}[M] - jv \frac{-jv}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \mathfrak{I}[M] \quad (6.56)$$

son eşitlikte (6.58), (6.59) ve (6.60) gösterimleri (6.62 ve 6.63) ile birlikte kullanılarak, gravite birincil bileşenlerin dalga sayısı ortamındaki HD ilişkileri,

$$\mathfrak{I}[g_3(z)] = \sqrt{u^2 + v^2} \mathfrak{I}[M]$$

$$= ju \frac{-ju}{\sqrt{u^2 + v^2}} \mathfrak{I}[g_x(x)] - \frac{-jv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \mathfrak{I}[g_y(y)] \quad (6.57)$$

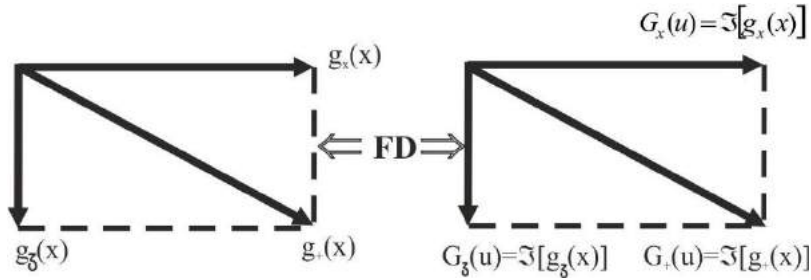
elde edilir. Özel koşul olarak  $v=0$  alınır ve dalga sayısı ortamında, tek boyutlu olarak çekim kuvvetinin HD'nün dönüşümü işlevi (frekans ortamı bağıntısı) elde edilir.

$$\mathfrak{I}[g_3(z)] = j \frac{w}{|w|} \mathfrak{I}[g_x(x)] = -j \operatorname{sgn}(u) \mathfrak{I}[g_x(x)] \quad (6.58)$$

Son bağıntıda, dalga sayısı ortamı işlevleri büyük harfle gösterilirse

$G_3(u) = \mathfrak{I}[g_3(z)]$  ve  $G_x(u) = \mathfrak{I}[g_x(z)]$  yazılır. Frekans ve uzay

ortamı bileşenleri şekil 6.20 de verilmektedir.



**Şekil 6.20** Gravitede düşey bileşenin uzay ve dalga sayısı

ortamlarındaki görüntüleri ve HD. leri ile ilişkisi

Bu bileşenlerin (gravitede birincil bileşenler), her iki ortamda, aralarındaki HD ilişkisi aşağıdadır.

$$G_3(u) \leftarrow \mathcal{H}_i(u) \Rightarrow -G_x(u) \quad (6.59)$$

$$g_3(x) \leftarrow \mathcal{H}_i(x) \Rightarrow -g_x(x) \quad (6.60)$$

(6.57) denklemindeki

$-j \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$  ve  $-j \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$  kısımları, signum işlevinin frekans ortamı bağıntılarıdır. Bu nedenle dalga sayısı ortamı, 2 boyutlu HD bağıntısı,

$$\operatorname{sgn}(u, v) = \frac{ju}{\sqrt{u^2 + v^2}} e_x + \frac{jv}{\sqrt{u^2 + v^2}} e_y \quad (6.61)$$

olarak yazılabilir.

“ $e_x$ ” ve “ $e_y$ ”, “ $x$ ” ve “ $y$ ” yönlerdeki birim vektörlerdir. Son eşitlikte,

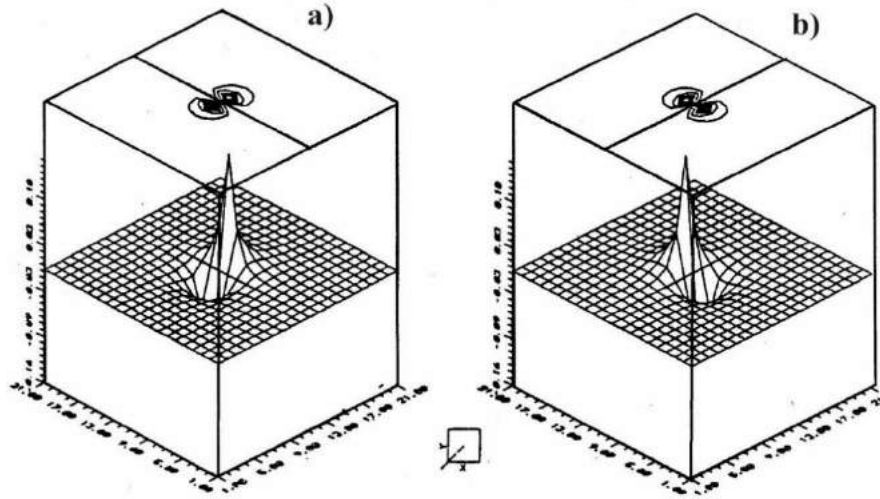
$$\mathcal{H}_1 = \frac{ju}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (6.62)$$

$$\mathcal{H}_2 = \frac{jv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (6.63)$$

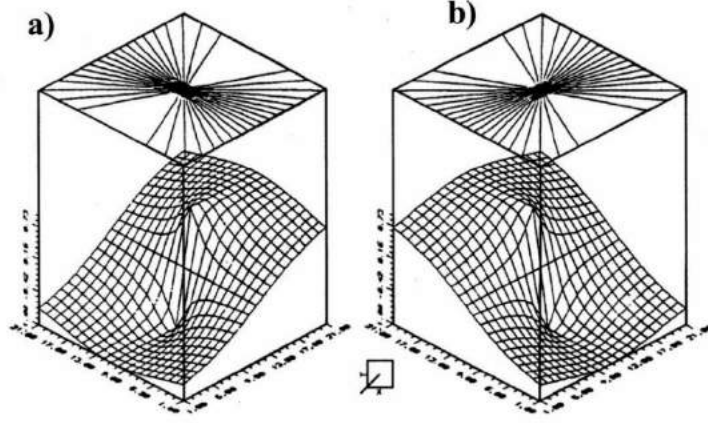
ile gösterilirse iki boyutlu HD işleci,

$$\mathcal{H} = j \operatorname{sgn}(u, v) = \mathcal{H}_1 e_x + \mathcal{H}_2 e_y \quad (6.64)$$

durumuna gelir (şekil 6.21-6.22).



Şekil 6.21 a)  $\mathcal{H}_1$  işlecinin uzay ortamı görüntüsü, b)  $\mathcal{H}_2$  işlecinin uzay ortamı görüntüsü



**Şekil 6.22** a)  $\mathcal{H}_1$  işlecinin dalga sayısı ortamı görüntüsü, b)  $\mathcal{H}_2$  işlecinin dalga sayısı ortamı görüntüsü

(6.62) ve (6.63) bağıntılarının TFD alınarak uzay ortamına geçilirse, uzay ortamındaki 2B lu HD işleçleri

$$\mathcal{H}_1(x, y) = \mathfrak{I}^{-1}[\mathcal{H}_1(u, v)] = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (6.65)$$

$$\mathcal{H}_2(x, y) = \mathfrak{I}^{-1}[\mathcal{H}_2(u, v)] = \frac{1}{2\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (6.66)$$

olarak elde edilir. (6.62) ve (6.63) denklemleri, aynı zamanda, HD nin nasıl kullanılacağını da gösterir.

$$\mathfrak{I}[g_z] = H_1 \mathfrak{I}[g_x] + H_2 \mathfrak{I}[g_y] \quad (6.67)$$

$$\mathfrak{I}\left[\frac{\partial M}{\partial z}\right] = H_1 \mathfrak{I}\left[\frac{\partial M}{\partial x}\right] + H_2 \mathfrak{I}\left[\frac{\partial M}{\partial y}\right] \quad (6.68)$$

Son iki eşitlik, (6.60) ve (6.61) bağıntılarına götürür.

İkincil bileşenler arasındaki ilişki Nelson (1988) tarafından verilmiştir.

Nelson'a göre ikincil bileşenler ve aralarındaki bağlantılar,

$$g_{xx} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \alpha}{r^3} g_{\alpha z} d\alpha d\beta \quad (6.69)$$

$$g_{xy} = \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \alpha}{r^3} g_{\beta z} d\alpha d\beta \quad (6.70)$$

$$g_{xz} = \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z} = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\alpha}{r^3} g_{zz} d\alpha d\beta \quad (6.71)$$

$$g_{yx} = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y-\beta}{r^3} g_{\alpha z} d\alpha d\beta \quad (6.72)$$

$$g_{yy} = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y-\beta}{r^3} g_{\beta z} d\alpha d\beta \quad (6.73)$$

$$g_{yz} = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y-\beta}{r^3} g_{zz} d\alpha d\beta \quad (6.74)$$

$$g_{zx} = \frac{\partial^2 M}{\partial z \partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)g_{\alpha\alpha} + (y-\beta)g_{\alpha\beta}}{r^3} d\alpha d\beta \quad (6.75)$$

$$g_{zy} = \frac{\partial^2 M}{\partial z \partial y} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)g_{\alpha\beta} + (y-\beta)g_{\beta\beta}}{r^3} d\alpha d\beta \quad (6.76)$$

$$g_{zz} = \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)g_{\alpha z} + (y-\beta)g_{\beta z}}{r^3} d\alpha d\beta \quad (6.77)$$

ve dalga sayısı ortamındaki ilişkileri de aşağıda verilmiştir.

$$\mathfrak{I}[g_{xx}] = j \frac{u}{|u|} \mathfrak{I}[g_{xz}] \quad (6.78)$$

$$\mathfrak{I}[g_{xy}] = j \frac{u}{|u|} \mathfrak{I}[g_{yz}] \quad (6.79)$$

$$\mathfrak{I}[g_{xz}] = j \frac{u}{|u|} \mathfrak{I}[g_{zz}] \quad (6.80)$$

$$\mathfrak{I}[g_{yx}] = j \frac{u}{|u|} \mathfrak{I}[g_{xz}] \quad (6.81)$$

$$\mathfrak{I}[g_{yy}] = j \frac{v}{|u|} \mathfrak{I}[g_{yz}] \quad (6.82)$$

$$\mathfrak{I}[g_{yz}] = j \frac{v}{|u|} \mathfrak{I}[g_{zz}] \quad (6.83)$$

$$\mathfrak{I}[g_{zx}] = -j \frac{u}{|u|} \mathfrak{I}[g_{xx}] - j \frac{v}{|u|} \mathfrak{I}[g_{xy}] \quad (6.84)$$

$$\mathfrak{I}[g_{zy}] = -j \frac{u}{|u|} \mathfrak{I}[g_{xy}] - j \frac{v}{|u|} \mathfrak{I}[g_{yy}] \quad (6.85)$$

$$\mathfrak{I}[g_{zz}] = -j \frac{u}{|u|} \mathfrak{I}[g_{xz}] - j \frac{v}{|u|} \mathfrak{I}[g_{yz}] \quad (6.86)$$

### 6.3.5 Jeofizikte Hilbert Dönüşümleri

#### 6.3.5.a Potansiyel alanlarda HD. nin kurulması

Skaler bir “M” potansiyeli ve alan vektörü,  
 $B = \nabla M$

denklemlerle verilir. Bilindiği gibi potansiyel, kaynaktan sonsuz uzakta,  $\nabla^2 M = 0$  olması nedeniyle sifıra yaklaşır. “M” potansiyelinin üç yönlü türevleri, o yönlerdeki bileşenlerini verir.

$$g_x = -\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha) \partial M / \partial z}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]^{3/2}} d\alpha d\beta \quad (6.87)$$

$$g_y = -\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y-\beta) \partial M / \partial z}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]^{3/2}} d\alpha d\beta \quad (6.88)$$

$$g_z = \frac{\partial M}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha) \partial M / \partial \alpha + (y-\beta) \partial M / \partial \beta}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]^{3/2}} d\alpha d\beta \quad (6.89)$$

Bu kitapta, son üç eşitlik, gravitenin birincil bileşenleri olarak adlandırılmıştır. Bu türevlerden düşey yönde olanı (6.89), gravitenin düşey bileşenini veya kısaca çekim kuvvetini verir. (6.89) bağıntısında, iki değişik “z” harfi vardır. Bunlar:

z: gravite bileşenlerinden düşey yönde olanını (çekim kuvveti),

z: yön olarak, düşey yönü gösterir.

(6.55-6.56-6.57) denklemleri Nelson (1988) tarafından verilmiştir. Potansiyelin yönlü türevlerinin birincil bileşenler, olduğu ve bu bileşenlerin dalga sayısı ortamlarla ilişkisi Nabighian (1984) tarafından kurulmuştur.

Gravitenin “x” yönündeki yatay bileşeni,

$$g_x(x) = \mathfrak{I} \left[ \frac{\partial M}{\partial x} \right] = \mathfrak{I}[g_x] = j u \mathfrak{I}[M] \quad (6.90)$$

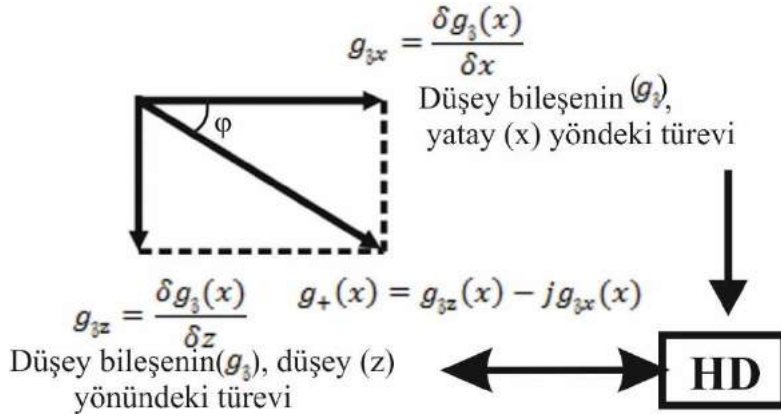
“y” yönündeki yatay bileşeni,

$$g_y(y) = \mathfrak{F}\left[\frac{\partial M}{\partial y}\right] = \mathfrak{F}[g_y] = jv \mathfrak{F}[M] \quad (6.91)$$

“z” yönündeki düşey bileşeni ( $g_3$ ),

$$g_3 = \mathfrak{F}\left[\frac{\partial M}{\partial z}\right] = \mathfrak{F}[g_3] = \sqrt{u^2 + v^2} \mathfrak{F}[M] \quad (6.92)$$

dır (gravitenin birincil bileşenlerinin potansiyel ile ilişkisi). Şekil 6.23 de ise gravite, birincil bileşenlerinin türevleri arasındaki ilişki verilmiştir. Birincil bileşenlerin türevlerinin oluşturduğu yeni değişkenler, ikincil bileşenler olarak adlandırılmıştır.



**Şekil 6.23** Gravitede düşey bileşenin türevleri arasındaki ilişki (ikincil bileşenler).

Analitik sinyalin bileşenleri arasındaki ilişki (6.31) bağıntısıyla verilmiştir. Benzer biçimde gravitede, ikincil bileşenler arasındaki ilişki

$$g_{3z}(x) \Leftarrow \mathcal{H}_i(t) \Rightarrow -g_{3x}(x) \quad (6.93.a)$$

$$G_{3z}(w) \Leftarrow \mathcal{H}_i(w) \Rightarrow -G_{3x}(w) \quad (6.93.b)$$

denklemleriyle kurulur. (6.93) bağıntıları önemlidir. Gravitede, bir profil boyunca (yatay eksen) düşey çekim kuvveti " $g_3(x)$ " ölçülür. Tüm Jeofizik yöntemlerde genelde, yatay yönde yapılan gözlemlerden yararlanarak, düşey yöndeki değişim/yapı aranır. Düşey bileşenin,

$[g_3(x)]$  yatay "x" yöndeki türevi olan yatay türev/gradiyent

$[g_{3x}(x) = \frac{\delta g_3(x)}{\delta x}]$  kolaylıkla alınabilir (sayısal türev matematiksel

olarak). Elde edilen türevin, (6.93) denklemleri kullanılarak, Hilbert dönüşümü alındığında, düşey yöndeki değişim/gradiyent

$$[g_{3z}(x) = \frac{\delta g_3(x)}{\delta z}]$$

elde edilir.

### 6.3.5.b Potansiyel alan uygulamaları

Anomaliyi oluşturan kaynak yapının parametreleri, analitik sinyal oluşturularak ve HD çözümleri kullanılarak elde edilir. Genelde parametre sayısı çoktur. Parametreler çeşitli yöntemlerden yararlanarak bulunmaya çalışılır. Ters çözüm dışındaki yöntemler, doğrudan çözüm yöntemleridir. Böylece, tek bir arazi eğrisinden yararlanılarak, birden fazla parametre belirlenmeye çalışılır. Örneğin basit bir problem olan, gravitede silindire ait derinlik, kütle ve konum parametresinin bulunması istenir (Şekil 6.24). Bu kadar kolay bir modelin çözümünde 3 parametre bulunması gerekliliği vardır. HD leri kullanılması koşulunda birçok eğriler elde edilir. Bunlar birincil ve ikincil bileşenler ve ilişkili diğer işlevlerdir. Birincil ikincil bileşenler ve üretilen diğer işlevler, yapı parametrelerinin çözülmesinde kullanılan işlevlerdir. Dolayısıyla bu kitapta, bunlara toplu olarak *bilgi eğrileri* ismi verilmiştir. Bilgi eğrileri; birincil ve ikincil bileşenleri, bunların türevleri, genlik (enerjisi veya sismikte yansıma enerjisi) ve evre, anlık genlik, anlık evre bilgilerini içerir.

Bilgi eğrileri, aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

I.  $g_x = \frac{\partial M}{\partial x}$ : potansiyelin "x" yönündeki türevi



$g_y = \frac{\partial M}{\partial y}$ : potansiyelin “y” yönündeki türevi

$g_z = \frac{\partial M}{\partial z}$  : potansiyelin “z” yönündeki türevi (düşey bileşen, çekim kuvveti)

Birincil bileşenler (6.90), (6.91) ve (6.92) ve aralarındaki ilişki ise (6.93c-d), denklemleriyle verilmiştir.

**II.** İkincil bileşenler (6.69...6.86), ve (6.93.a, 6.93.b) bağıntılarından yararlanılarak bulunur.

1.  $a(x) = \sqrt{g_z^2(x) + g_x^2}$  genlik eğrisi (zarf, yansıma enerjisi) (6.94)

2.  $\phi(x) = \tan^{-1} \left[ \frac{g_x(x)}{g_z(x)} \right]$  evre eğrisi (6.95)

3.  $a_x(x) = \frac{\partial a(x)}{\partial x}$  anlık genlik eğrisi (6.96)

4.  $\phi_x(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}$  anlık evre (veya anlık frekans) (6.97)

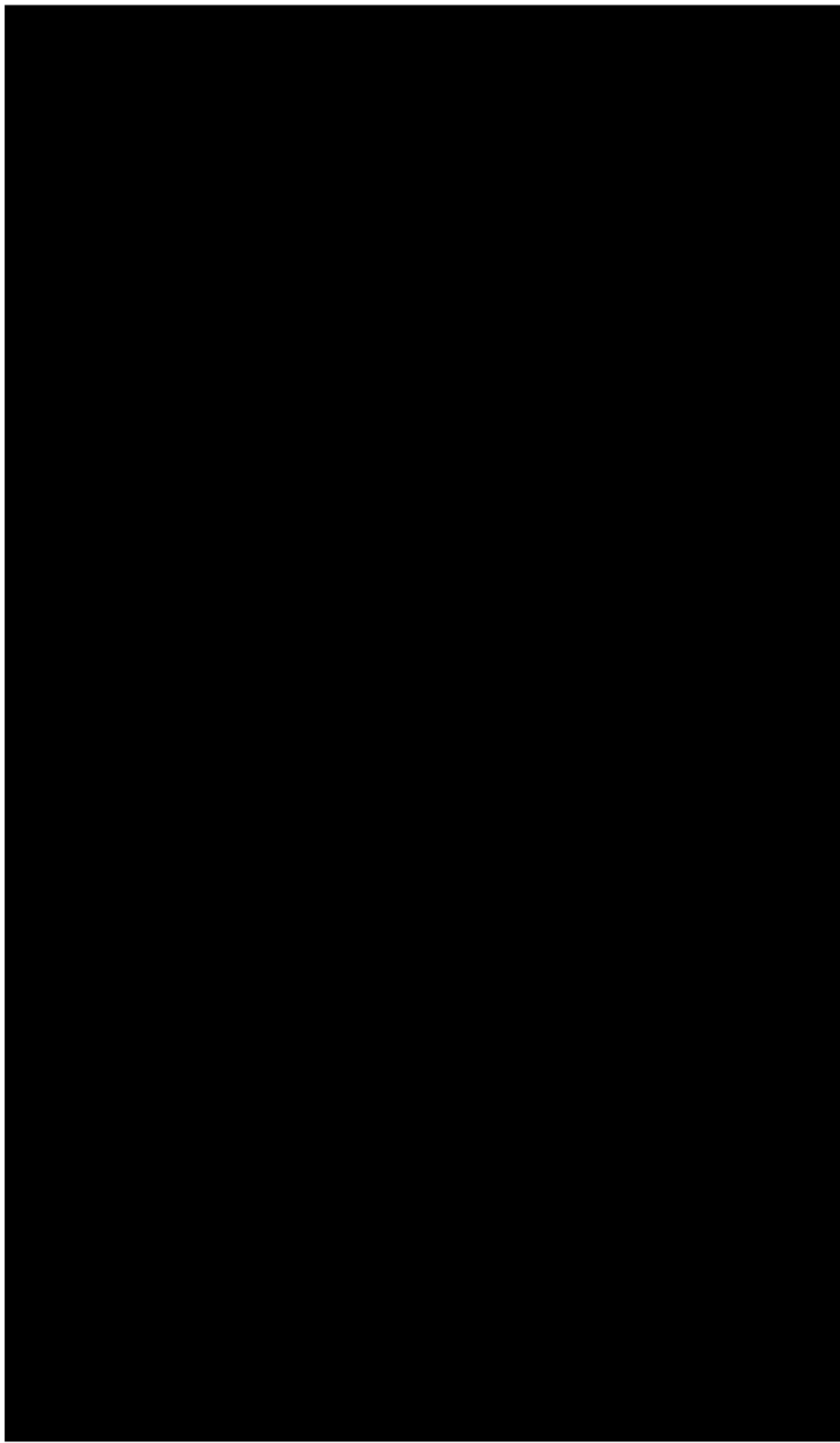
Yukarıda belirtildiği gibi tek bir adet arazi eğrisinden birçok bilgi eğrisi üretilmektedir. Bu bilgi eğrilerinin ister birbirleri ile olan ilişkisinden (kesiştikleri yerler) isterse köklerinden yararlanılarak, parametreler doğrudan doğruya saptanabilir. Bu konuda örnekler aşağıda verilmektedir.

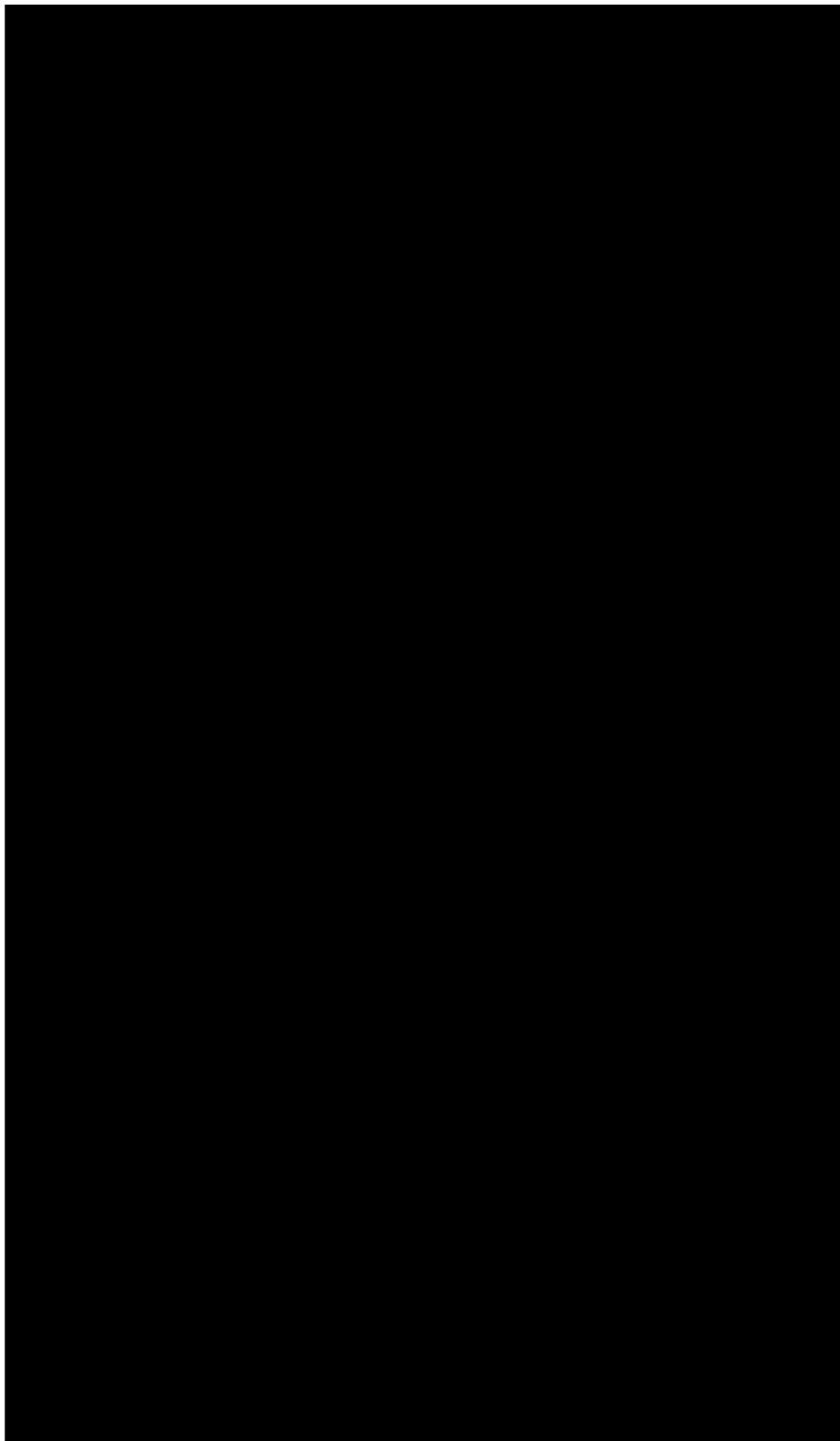
### **Örnek 6.1**

Gravitede düşey süreksizlik (yatay yarı sonsuz tabaka) karmaşık bileşenlerinin oluşturulması



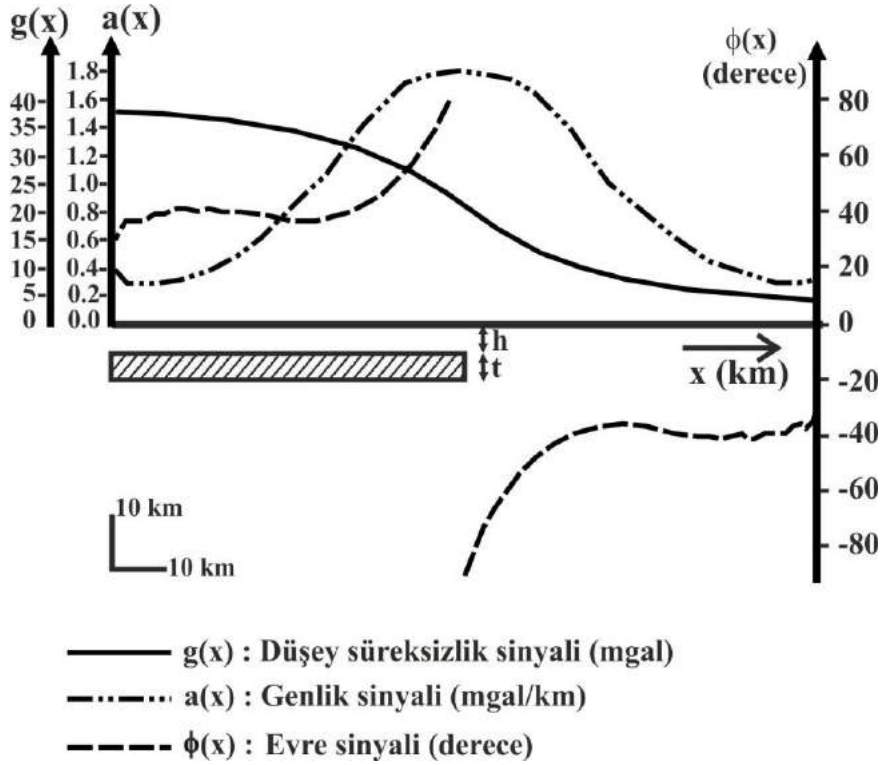






$\Delta\rho=0.2 \text{ gr/cm}^3$		d (km)	h (km)	t (km)
	Kuramsal	25.00	5.00	5.00
	Hesaplanan	25.00	5.00	4.99
	Kuramsal	25.00	10.00	5.00
	Hesaplanan	25.00	9.99	4.99
	Kuramsal	25.00	20.00	5.00
	Hesaplanan	25.00	19.99	4.99

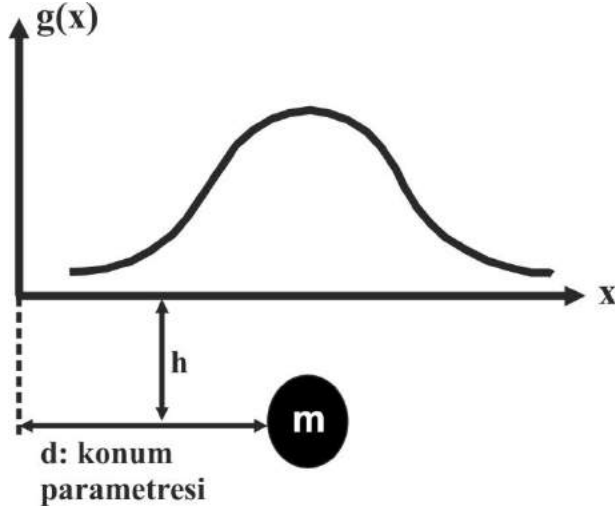
**Çizelge 6.5** Üç farklı modelde, kuramsal ve HD. leri uygulanarak elde edilen parametrelerin karşılaştırılması (Pınar 1985).



**Şekil 6.26** Düşey süreksizlik modeline ait bilgi sinyalleri (Pınar 1985)

### **Örnek 6.2**

Gravitede silindir'e (şekil 6.27) ait karmaşık bileşenlerin oluşturulması

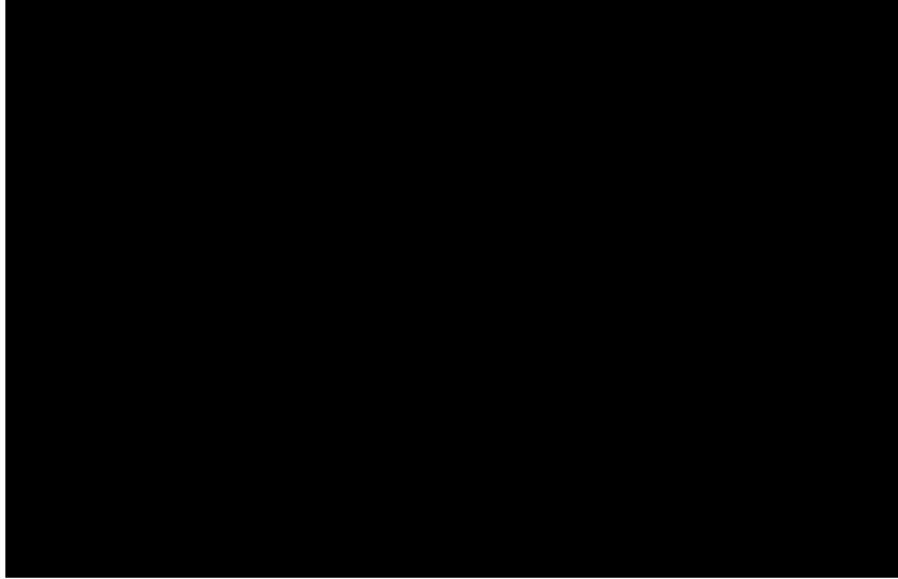


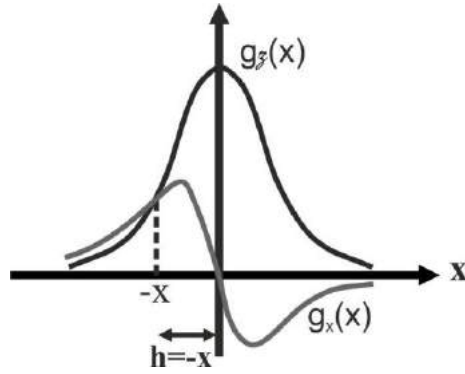
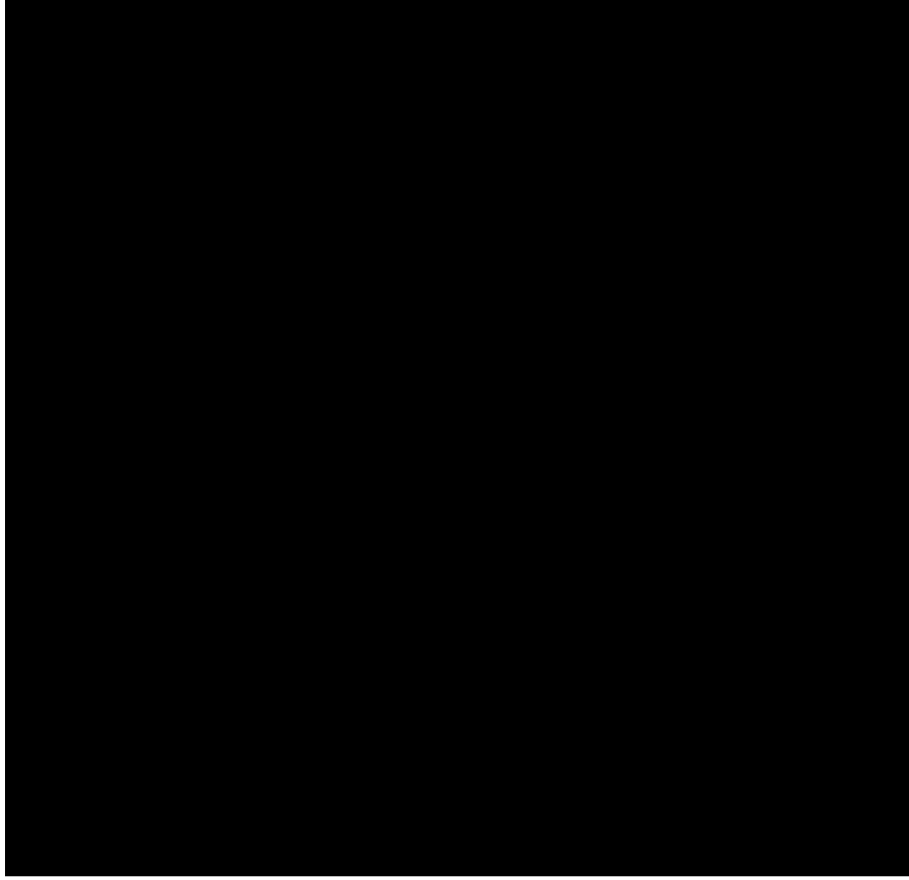
Şekil 6.27 Gravitede silindire ait parametreler

### ***Çözüm***

Gravitede, silindirin düşey bileşen denklemi,

$$g_3(x) = \frac{\gamma m h}{x^2 + h^2} \quad (6.109)$$





Şekil 6.28 Silindire ait,  $g_y(x)$ ,  $g_x(x)$  (birincil) bileşenler

**Örnek 6.3**

Manyetikte, sonsuza uzanan plakanın karmaşık bileşenlerinin oluşturulması

### **Çözüm**

Düşey eksen boyunca, sonsuza uzanan bir plakanın düşey bileşeni (Grant and West 1965),

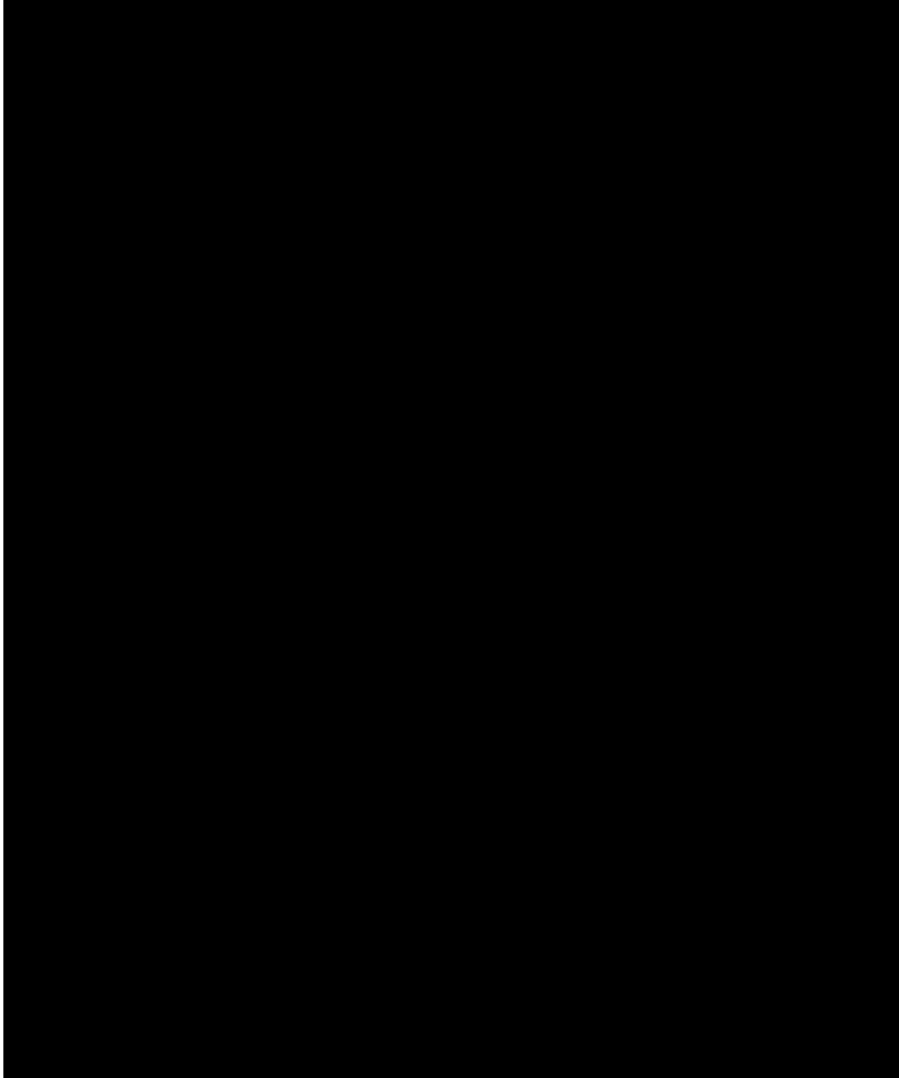
$$v(x) = A \frac{z \cos(Q) - x \sin(Q)}{z^2 + x^2} \quad (6.116)$$

ile verilir. Bu bağıntıda:

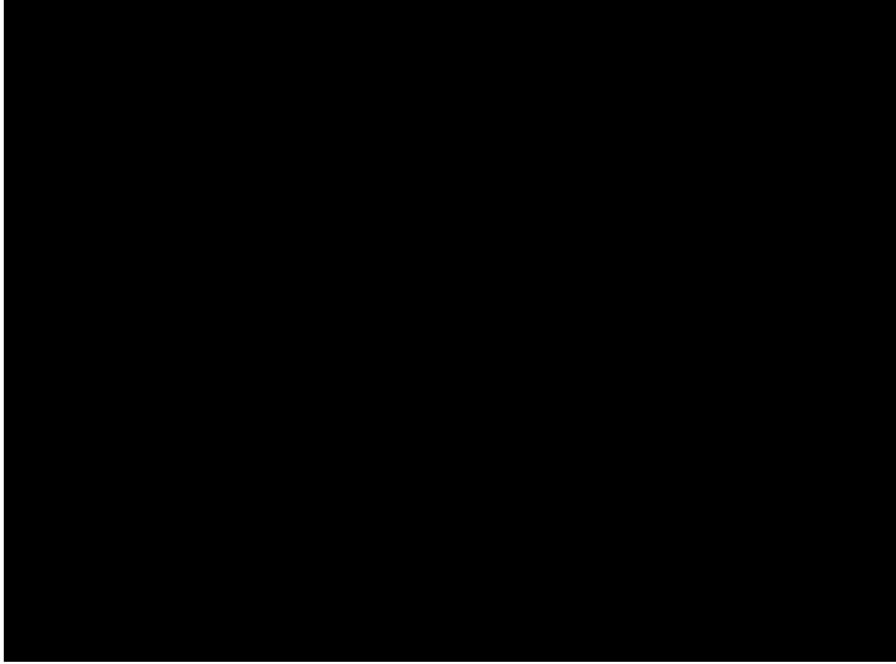
A: plakanın manyetik sabitlerini içeren terim,

Q: mıknatıslanma açısı,

z: plakanın üst yüzünün derinliğidir.







“v(x)” ve “h(x)” ortak çözümlerinden,  $v(x)=h(x)\Rightarrow h=-x$  elde edilir. Düşey ve yatay bileşenlerin  $x=0$  noktasında aldığı değerler kullanılarak,

$$A = z [v^2(x=0) + h^2(x=0)]^{1/2} \quad (6.127)$$

bulunur (Mohan ve diğ. 1982).

#### **Örnek 6.4**

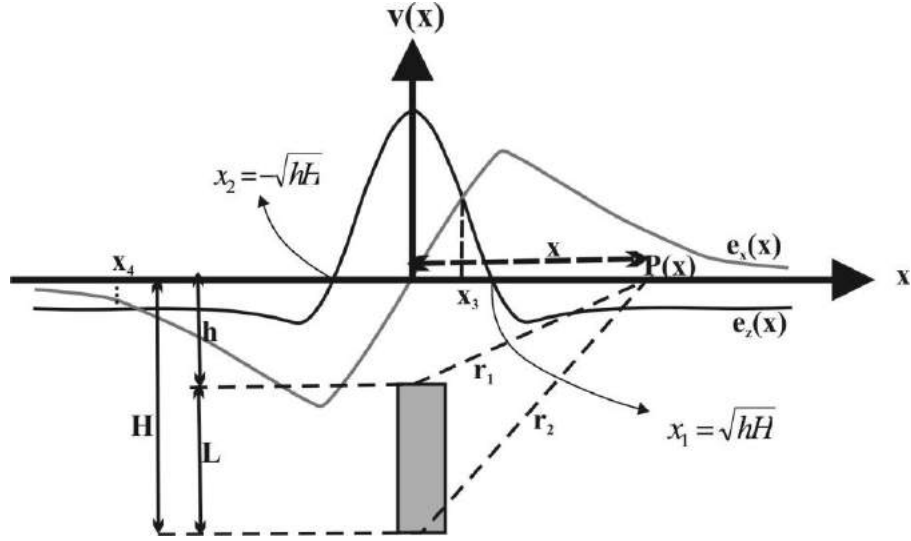
DP yönteminde düşey çubuğun karmaşık bileşenlerinin oluşturulması

#### **Çözüm**

Bir çubuğun P(x) noktasında oluşturacağı potansiyel (Rao 1983) aşağıdaki bağıntı ile verilir (şekil 6.29).

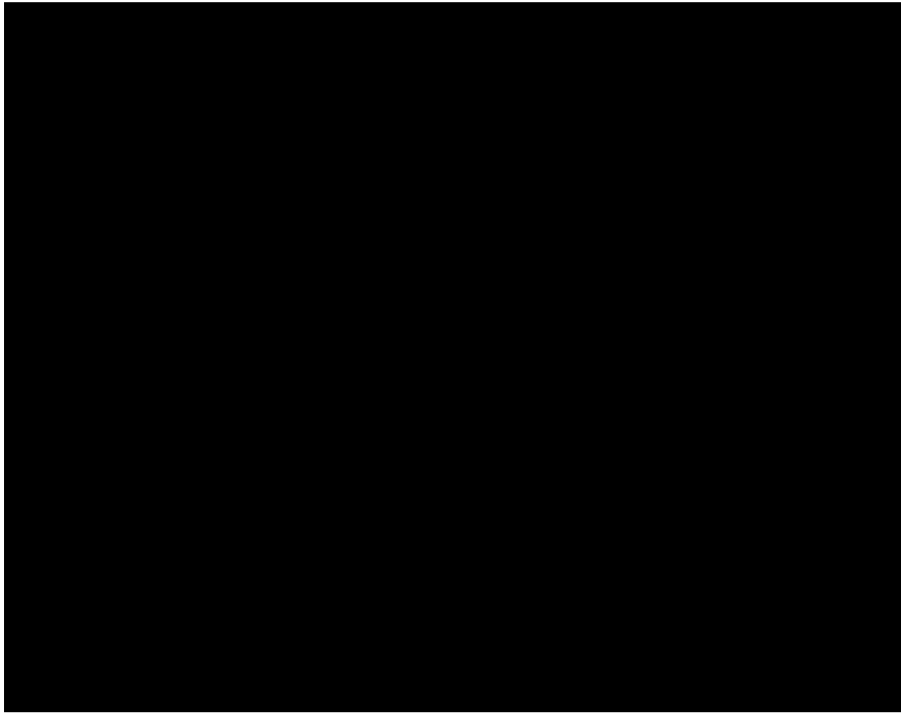
$$v(x) = M \log \frac{x^2 + h^2}{x^2 + H^2}, \quad M = \frac{\rho I}{2\pi} \quad (6.128)$$

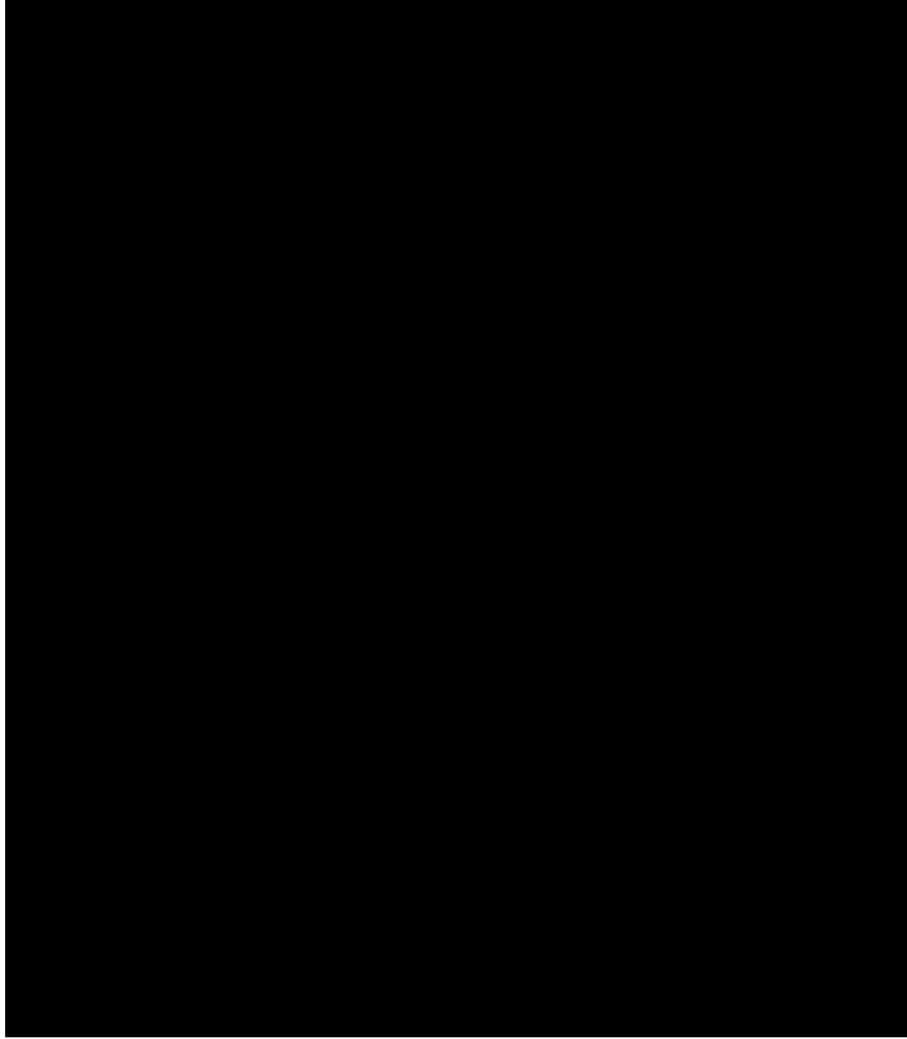
Potansiyel denkleminin "x" ve "z" yönünde türevleri alınarak yatay “e<sub>x</sub>” ve düşey “e<sub>z</sub>” yönlerdeki elektrik alan bileşenleri bulunur. Bu bileşenler kullanılarak analitik sinyal oluşturulur. Analitik sinyalin bileşenleri (elektrik alanın düşey ve yatay yöndeki bileşenleri) arasında ilişki HD. ile kurulur. Bu sırada, matematiksel çözümler kullanılarak (kök, ortak çözümler, vb) yapı parametreleri elde edilir.



Şekil 6.29 DP de düşey çubuk modeli bileşenleri ve çözümlerinden elde edilen kökler.

$$e_x(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} = 2M \left[ \frac{x}{x^2 + h^2} - \frac{x}{x^2 + H^2} \right]$$





Sayısal bir örnek olarak, kuramsal parametre değerleri çizelge 6.6 da verilen çubuğun yatay bileşeni “ $e_x(x)$ ” kullanılarak türev yolu ile hesaplanmıştır. Bu denklemin HD alınarak düşey gradyan “ $e_z(x)$ ” elde edilmiştir (şekil 6.29). Elde edilen eğrilerin  $x_1, x_2, x_3, x_4$  kökleri bulunarak ve ilişkili bağıntılar kullanılarak L, M, h ve H parametlerine ulaşılmıştır (Çizelge 6.6). Kuramsal parametreler ile uygulama sonucu elde edilen parametrelerin birbirlerine çok yakınlığı, kullanılan yöntemin sağlığını göstermektedir.

Parametreler	Kuramsal	Yöntem sonucu
h (m)	5	4.99
H (m)	15	14.99
L (m)	10	9.97
M (m)	100	99.97

Çizelge 6.6 Kuramsal ve HD kullanılarak elde edilen sayısal değerlerin karşılaştırılması

### 6.3.5.c Sismik uygulamalar

#### Örnek 6.5

Sismik yöntemde analitik sinyal üretilerek karmaşık bileşenlerin elde edilmesi, aşağıda, üç aşamada verilmiştir.

**Çözüm** (Yılmaz. Ö., 1978).

**I. 1 Hz lik giriş izi sin dalgasından, analitik sinyal üretilerek elde edilen HD çözümleri.**

**I .1** Açısal frekansı 1 Hz, 0.1 birim genlikli bir sinüs dalgacığı (şekil 6.30) oluşturulur (gerçel bileşen). Sinüsodialin dönemi,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 6.28 \text{ sn.}, \text{ çizgisel frekansı } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{6.28} \cong 0.16 \text{ Hz. dir.}$$

**I .2** Türevi alınarak sanal bileşeni (cos sinyali) bulunur (şekil 6.30.a). Sanal bileşen, gerçel bileşenin  $90^\circ$  kaymış biçimidir (şekil 6.30.b).

**I .3** 1. ve 2. adımda bulunan izler birleştirilerek, analitik sinyal oluşturulur. Genlik değişimi (zarf veya yansıma enerjisi) (şekil 6.30.c, 6.129 denklemi) ve evre değişimi (6.130 eşitliği) verilmiştir.

$$a(t) = \sqrt{[f(t)]^2 + [\hat{f}(t)]^2} = \sqrt{\{\text{Ger}[f_+(t)]\}^2 + \{\text{San}[f_+(t)]\}^2} \quad (6.129)$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{\hat{f}(t)}{f(t)} \right\} = \text{tg}^{-1} \frac{\text{San}[f_+(t)]}{\text{Ger}[f_+(t)]} \quad (6.130)$$

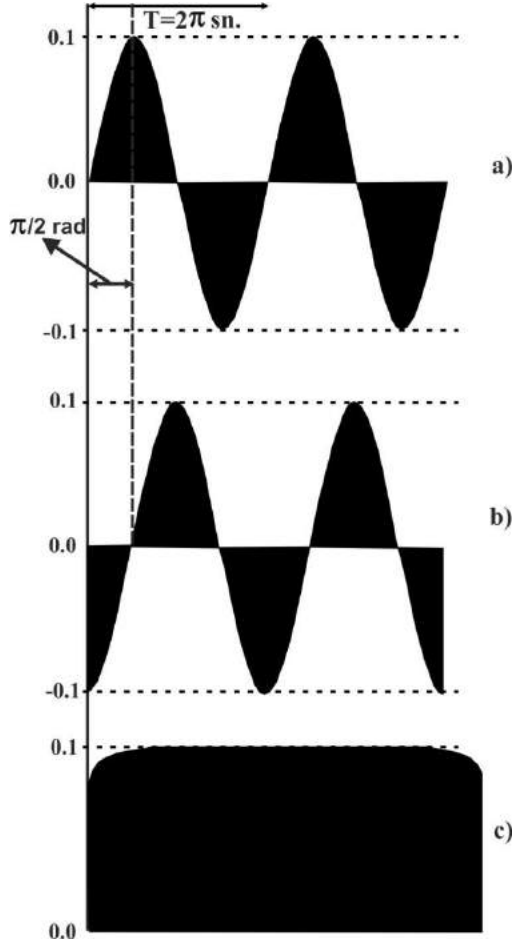
hesaplanır. (6.129) genlik,  $a(t) = \sqrt{\{\sin(\omega t)\}^2 + \{\cos(\omega t)\}^2}$

eşitliğinden bulunur. “a(t)” nin, şekil 6.31 den “0.1” birim olduğu

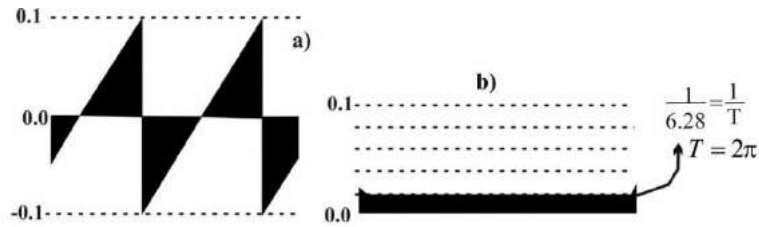
görülmektedir. Şekilde, zarfın değişim göstermemesi, sinyalin tek bir sinüzoidal olduğunu gösterir.

**I.4** Analitik sinyalin evre değişimi ise şekil 6.31 de verilmiştir. Evre değişimi “arctg” eğrisidir.

**I.5** Anlık evre (veya anlık frekans) (6.173) bağıntısından bulunur (şekil 6.31). Buradan sinyalin çizgisel frekansı [ $1/6.28 \approx 0.16$  Hz] dolayısıyla da dönemi ( $T=2\pi$ ) elde edilir.

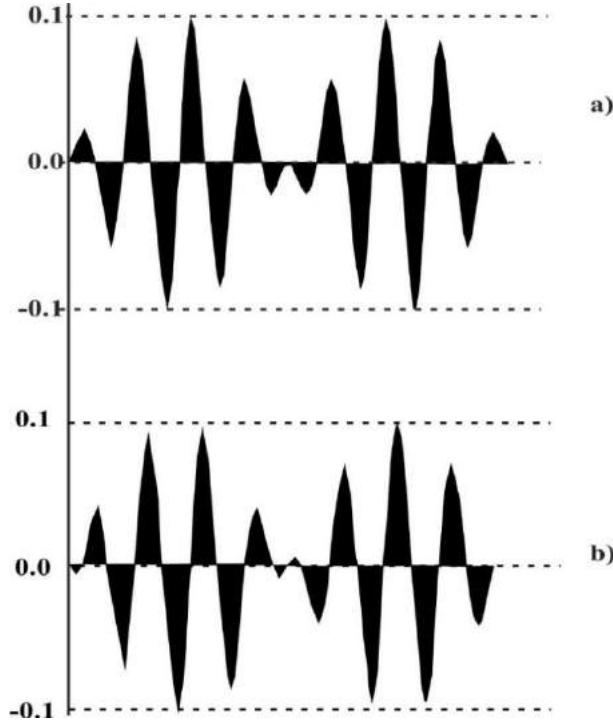


**şekil 6.30**  $f(t)=\sin(t)$  ızının HD. (Yılmaz, ., 1978). **a)** 1 Hz lik sinüs sinyali (aynı zamanda, analitik sinyalin gerçel bileşeni). **b)** Giriş (sinüs) ızının Hilbert dönüşümü,  $90^\circ$  kayarak kosinüs izine (sinüs ızının türevi) donuşmuştur (aynı zamanda analitik sinyalin sanal bileşeni). **c)** Genlik eğrisi veya zarfı veya yansımaya enerjisidir.



**şekil 6.31** Oluşturulan analitik sinyalin anlık **a)** evre **b)** frekansları

Şekil (6.32) de Sinüs işlevinin anlık evre ve anlık frekans değişimleri verilmektedir. Anlık frekanstan, sinyalin dönemine ulaşılır.



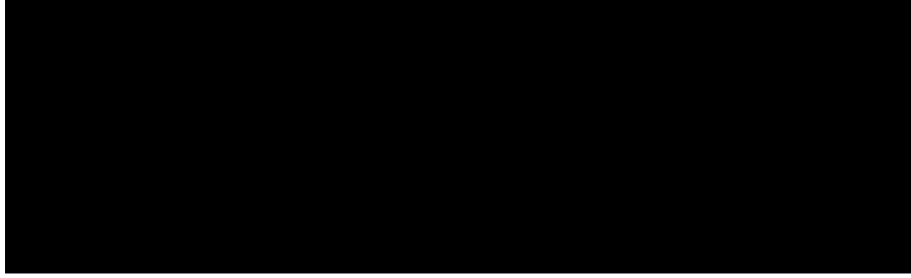
Şekil 6.32 0.5 ve 4 Hz frekanslı iki sinüs dalgasının toplamından oluşan sinyal

**II) İki adet sinüsoidal dalgadan analitik sinyal üretilerek elde edilen HD. çözümleri (Şekil 6.32)**

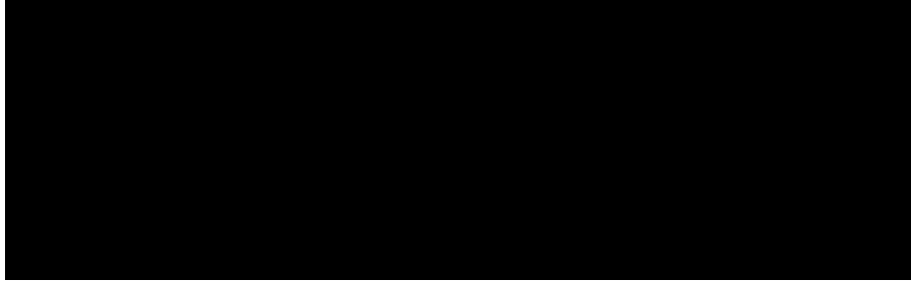
Frekansları 0.5 Hz ve 4 Hz olan iki sinüsoidal, birbirleri üzerine bindirilerek toplam sinyal bulunmuştur (Şekil 6.32.a). Sinyalin kendisi, analitik izin gerçel bileşenidir. HD alındıktan sonra sanal kısım bulunmuştur ve  $\pi/2$  radyan kadar evre kaymıştır (Şekil 6.32.b)

**a)** sinyalin kendisi (gerçel bileşen) **b)** Hilbert dönüşümü alınmış giriş izi ( $90^\circ$  kaymış ve sanal bileşeni oluşturmuştur).

Toplam sinyalin yansıma enerjisi ise Şekil 6.33 te verilmiştir. Şekil incelendiğinde, iki ayrı maksimum değer vermesi, giriş sinyalinin, iki ayrı frekanslı (veya dönemli) sinüzoidal dalgacığından oluştuğu ve bunların genliklerinin 0.1'er birim olduğu bilgisini verir. Şekil 6.34.a ve 6.34.b de ise anlık evre ve frekans değişimleri görülmektedir.



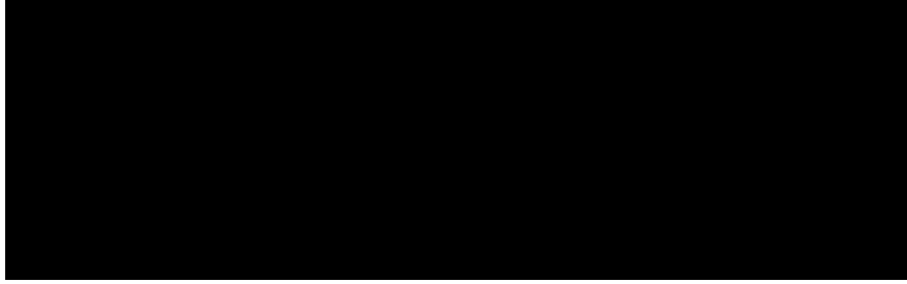
**Şekil 6.33** İki sinüsoidalın toplamından oluşmuş izin yansıma enerjisi (zarf).



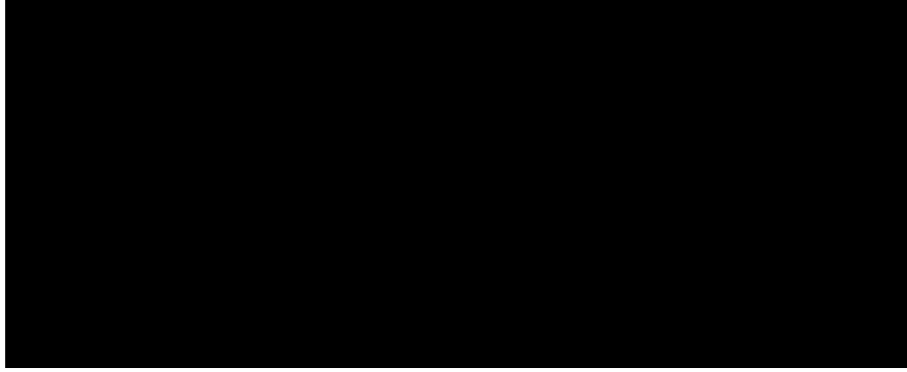
**Şekil 6.34** İki sinüzoidalın, a) anlık evre, b) anlık frekans değişimi

**III) Gerçek bir sismik sinyalden analitik sinyal üretilerek elde edilen HD. çözümleri (Şekil 6.35)**

Araziden elde edilen sismik iz, Şekil 6.35.a da verilmiştir. Aynı zamanda, oluşturulan analitik sinyalin gerçel kısmıdır. Bu bileşenin HD. alınarak sanal kısmı bulunur (Şekil 6.35.b). Sanal bileşen, gerçel bileşen ile aynı genlikte ve  $90^0$  ötelenmiş biçimindedir. Arazi sinyalinin analizi için bilgi eğrileri elde edilir (Şekil 6.36 a-b-c).



**Şekil 6.35** Gerçek bir sismik iz **a)** Sismik iz (aynı zamanda, gerçel bileşen) **b)** sanal bileşen.



#### **6.4 “Z” DÖNÜŞÜMLERİ**

Zaman ortamında karmaşık olarak gösterilebilen bir sinyali (veya ayrık değerler), frekans ortamına dönüştürmekte kullanılır. Bu özelliği nedeniyle, doğrusal dizge kuramında, dizgeye giriş – çıkış tanımları ve dönüşüm işlevinin bulunmasında önemli bir yer tutar. Dizgenin durağanlığının saptanmasında, kök ve kutuplar kullanılarak yakınsamasının saptanmasında yine “Z” dönüşümleri önemlidir.

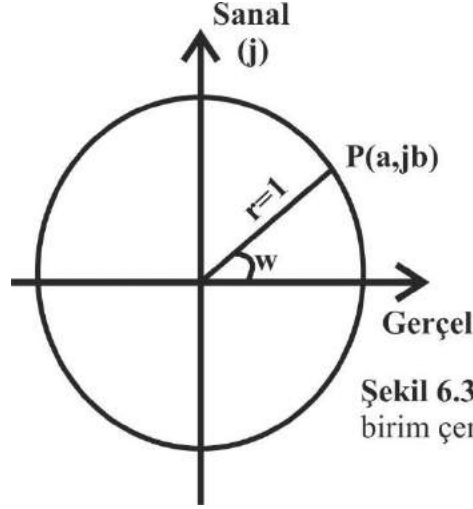
Karmaşık bir sayı üstel olarak

$$z = e^{jw} \quad (6.131)$$

olarak yazılır. “z” karmaşık bir değişkendir. Bu bağıntıda, “P” noktası, karmaşık ortamda, “w” açısal hızıyla dönen bir noktadır. w, 0-2π



aralığında değişir. Eğer w, 0-2π aralığında çizilirse birim çember üzerindeki izdüşümü elde edilir (Şekil 6.37).



Şekil 6.37 karmaşık sayının birim çemberdeki konumu

Ayrık bir “f(n)” sinyalin “z” dönüşümü,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} \quad n < 0 \quad (6.132)$$

dır.

Kesirli olarak ise

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0 + az^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_Mz^{-M}}{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Nz^{-N}} = \frac{\sum_{i=0}^M a(m)z^{-i}}{\sum_{i=0}^N b(n)z^{-i}} \quad (6.133)$$

dır. Son eşitlikte, F(z)= 0 için kutuplar, F(z)=∞ için sıfırlar elde edilir.

F(z)=0 için A(z)=0, F(z)= ∞ için B(z)=0 olmalıdır. Sıfır ve kutuplar, dizgenin durağanlığı için kullanılır.

### **Örnek 6.6**

Aşağıda verilen dürtü işlevinin “z” dönüşümünü bulunuz.

#### **Çözüm**

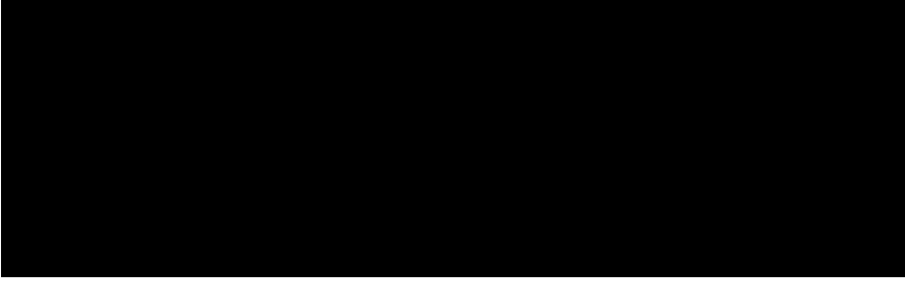
Dürtü işlevinden oluşmuş dizi f(n)=δ(n) olarak yazılır.

$$f(n)=\delta(n)=\dots\dots 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\dots\dots$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

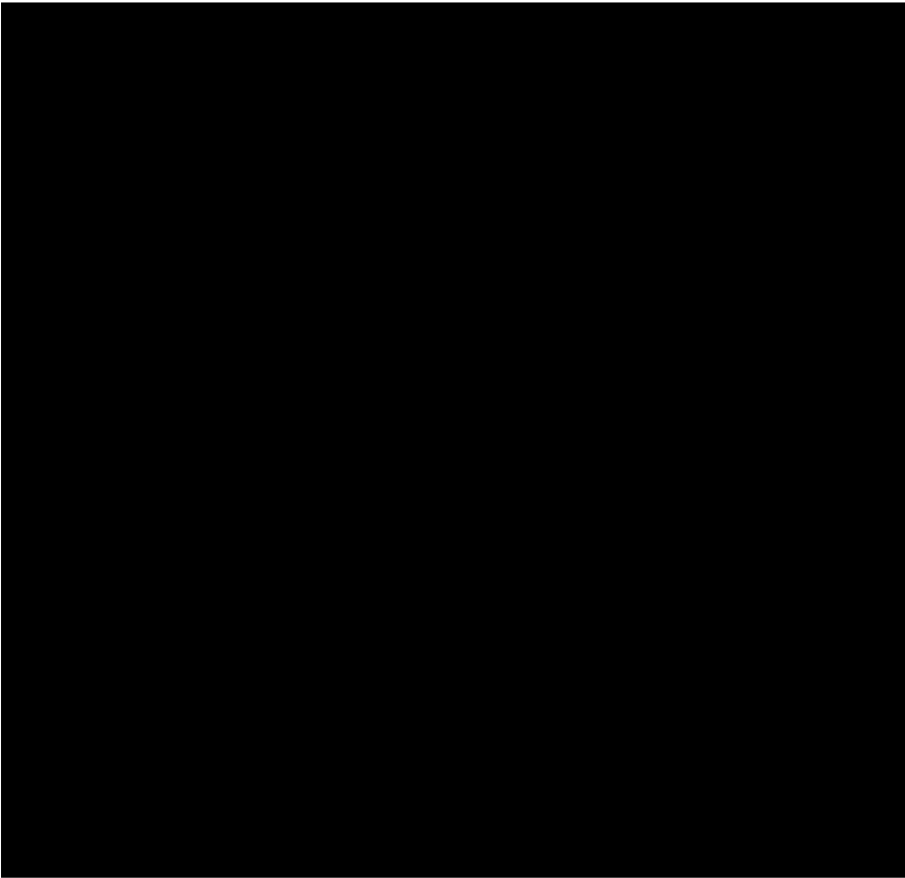
$$n=-4 \quad n=-3 \quad n=-2 \quad n=-1 \quad n=0 \quad n=1 \quad n=2$$

Dürtü, soldan 5. ayrık değerdedir. Dolayısıyla zaman sayıcısı -4 ten başlar. Verilen izin “z” dönüşümü,



elde edilir.

**Örnek 6.7**

- a) Birim basamak işlevinin  $[u(n)]$  “z” dönüşümünü bulunuz.
  - b) 2 birim kadar ötelenmiş birim basamak işlevinin  $[u(n)]$  “z” dönüşümünü bulunuz.
  - c) Birim basamak işlevinin sıfır ve kutuplarını bularak, karmaşık düzlemde gösteriniz.
- 



kaydırma işleci gibi çalışmaktadır. Yani “z” dönüşümü, aynı zamanda, bir kaydırma işlecidir. Bu koşulda, “z” dönüşümü bir kaydırma işleci olarak,

$z^{-n}f_r=f_{r-n}$  biçiminde yazılabilir. Evrişim de bir tür kaydırmalı çarpımdır (Bkz Bölüm 4.2). Dolayısı ile evrişime giren seriler polinom şeklinde yazılıp "z" dönüşümleri alınarak çarpım şeklinde gösterilebilir.

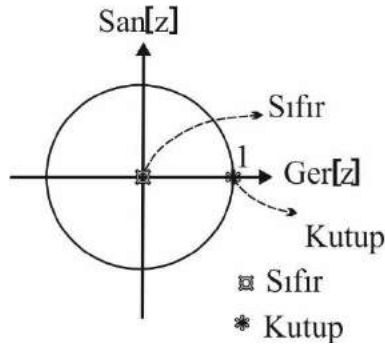
### c) Çözüm

Birim basamak işlevinin “z” dönüşümü (a maddesi)

$$U(z) = \frac{z}{z-1} \text{ dır.}$$

Sıfırlar  $U(z)=0 \rightarrow z=0$

Kutuplar  $U(z)=\infty \rightarrow z-1=0 \rightarrow z=1$  (şekil 6.38).



Şekil 6.38 Birim basamak işlevinin sıfır ve kutupları

### Örnek 6.8

w' nın,  $0, 2\pi/\Delta x$  aralığında,  $\pi/2\Delta x$  artışlarla, değişimini inceleyiniz.

### Çözüm

w	0	$\pi/2\Delta x$	$\pi/\Delta x$	$3\pi/2\Delta x$	$2\pi/\Delta x$
$z = e^{jw\Delta x}$	1	j	-1	-j	1

Euler bağıntısı,  $z = e^{jw\Delta x} = \cos(w\Delta x) + j \sin(w\Delta x)$  kullanılır.

Yani "w" nın  $w_n = 2\pi/\Delta x$  den  $2 w_n$  değerine doğru arttırılması yukarıda verilen z değerlerinin yinelenmesi anlamına gelir. Bu yineleme, dönemi olarak "w" nın her "w<sub>n</sub>" artışında (katlanma frekansı) tekrar görülecektir.

### **Örnek 6.9**

İki iz sayısal olarak,  $f_1(n) = (2, 0, -1)$  ve  $f_2(n) = (4, 2, 1)$  olarak verilmektedir. İki izin z dönüşümünü ve elde edilen polinomların çarpımını bulunuz.

#### **Çözüm**

(6.132) bağıntısından;

$$F_1(z) = 2z^0 + 0z^{-1} + (-1)z^{-2} \Rightarrow F_1(z) = 2 - z^{-2}$$

$$F_2(z) = 4z^0 + 2z^{-1} + 1z^{-2} \Rightarrow F_2(z) = 4 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$Y(z) = F_1(z)F_2(z) = (2 - z^{-2})(4 + 2z^{-1} + z^{-2})$$

$$Y(z) = 8 + 4z^{-1} + 2z^{-2} - 4z^{-2} - 2z^{-3} - z^{-4}$$

$$y(n) = f_1(n) \cdot f_2(n)$$

$$y(n) = (8, 4, -2, -2, -1)$$

### **Örnek 6.10**

Bölüm 4.2 de verilen  $A = (1, 2)$  ve  $B = (1, 2, 3)$  dalgacıklarının evrişimini "z" dönüşümü yöntemiyle bulunuz.

#### **Çözüm**

$$\begin{array}{ccc} B(z) & b_0 + b_1z + b_2z^2 & 1 + 2z + 3z^2 \\ x A(z) \rightarrow & a_0 + a_1z & \rightarrow x \quad 1 + 2z^2 \end{array}$$

---


$$\begin{array}{ccc} B(z)A(z) & a_0b_0 + a_0b_1z + a_0b_2z^2 & 1 + 2z + 3z^2 \\ & + a_1b_0z + a_1b_1z^2 + a_1b_2z^3 & + 2z + 4z^2 + 6z^3 \end{array}$$

---


$$\begin{array}{ccc} & a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)z + & 1 + 4z + 7z^2 + 6z^3 \\ & + (a_0b_2 + a_1b_1)z^2 + a_1b_2z^3 & \end{array}$$

Bölüm 4.2 de verilen  $c_0, c_1, c_2$  katsayıları kullanılarak aşağıdaki eşitliklere ulaşılır.

$$c_0 = a_0 b_0 = 1$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 4$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 = 7$$

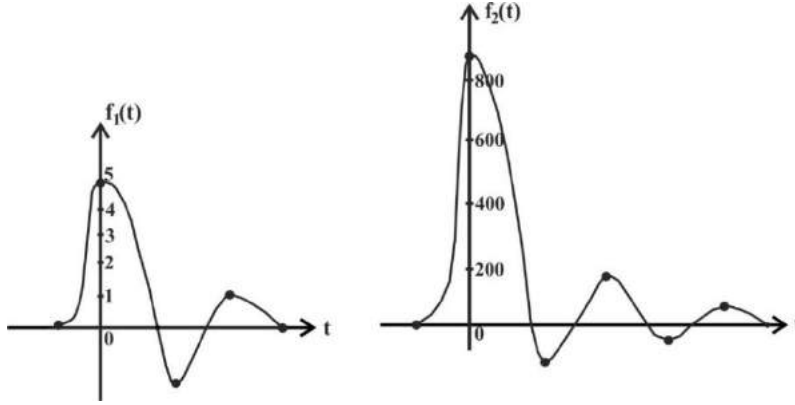
$$c_3 = a_1 b_2 = 6$$

### **Örnek 6.11**

Ayrık olarak  $f_1=(5,-2,1)$  ve  $f_2=(864,-144,162,-51,51)$  dalgacıkları verilmektedir (şekil 6.39).

a) Dalgacıkların “z” dönüşümünü bulunuz.

b) Sıfırları birim daire (z düzlemi) üzerinde gösteriniz.



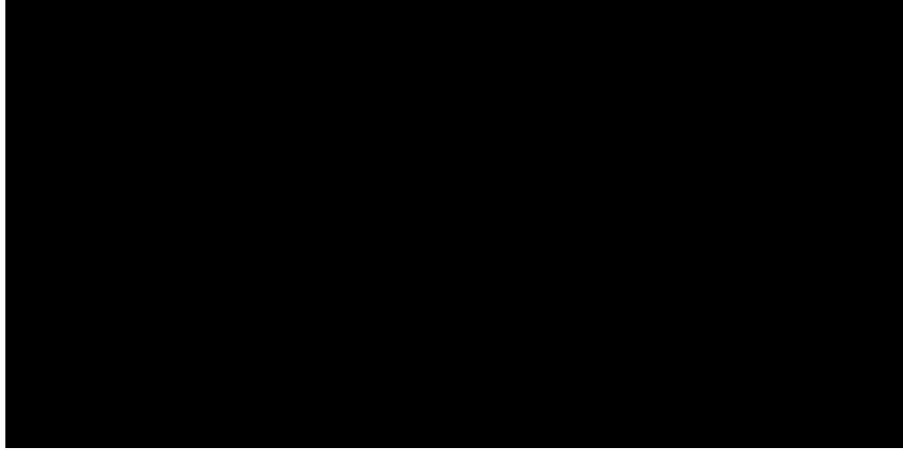
Şekil 6.39  $f_1=(5,-2,1)$  ve  $f_2=(864,-144,162,-51,51)$  dalgacıkları.

### **Çözüm**



b) Sıfır ve köklerin, birim çember üzerindeki yerleri, bir dizgenin durağan olup olmadığını gösterir. Eğer dizge işlevinin, kutup ve sıfırları, çemberin dışında yer alıyorsa, dizge durağan değildir. Durağan olan dizgelerde, tüm sıfır ve kutuplar birim çemberin içinde yer alırlar (Bkz. doğrusal dizgeler, bölüm10).

Bir süzgecin kutup ve sıfırları  $z$  düzleminde yerleştirilerek sayısal süzgeçler elde edilir. Eğer sinyalin herhangi bir frekansındaki bileşeni ortadan kaldırılmak istenirse, süzgeç düzenlenirken o frekansa karşılık gelen yerde, sıfırları olan rasyonel bir süzgeç düzenlenebilir.



Şekil 6.40 Sıfırların birim çember üzerlerindeki konumları

**Örnek 6.12**

Aşağıdaki iki işlevin  $t=0,1,2,\dots,n$  değerleri için “ $z$ ” dönüşümünü bulunuz. “ $z$ ” e bağlı “ $A(z)$ ” işlevini toplam olarak gösteriniz.

- a.  $a_t=k^t$       $a_t=0, t<0$  için
- b.  $a_t=tk^t$       $a_t=0, t<0$  için

**Çözüm**

a.  $a=a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  bağıntısı polinom olarak

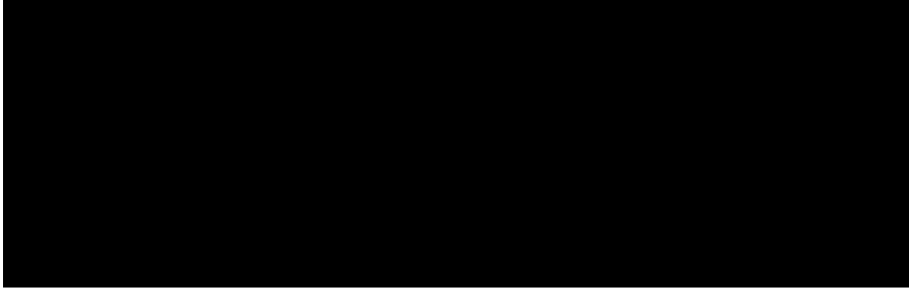
$$A(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}$$

dir. Burada,  $A(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$  yaklaşımından yararlanarak,



elde edilir.

b.

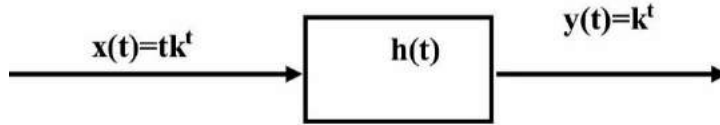


$$A(z) = kz^{-1} + 2k^2z^{-2} + 3k^3z^{-3} + \dots + nk^n z^{-n} \Rightarrow A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nk^n z^{-n}$$

bulunur.

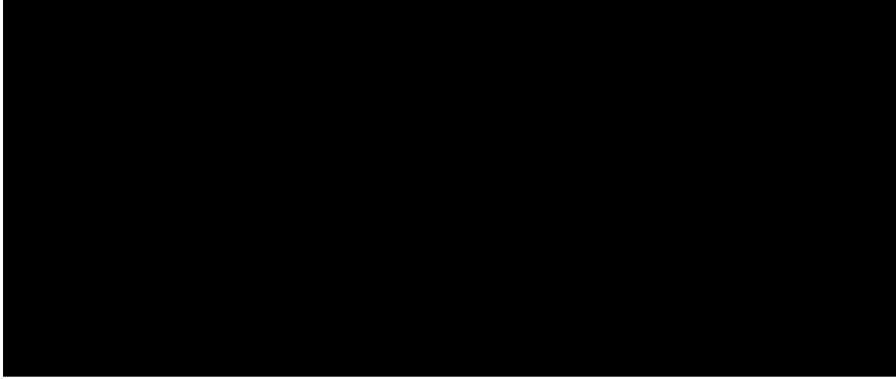
### **Örnek 6.13**

Şekil 6.41 de verilen dizgenin çıktı işlevini bulunuz.



Şekil 6.41 bir dizgeye giriş ve çıkış

***Çözüm***



**Not:** Dizge işlevleri için bkz. bölüm 10

## 6.5 HARTLEY DÖNÜŞÜMLERİ

### 6.5.1 Genel bağıntılar

Gerçek bir  $f(t)$  dalgasının tümlev dönüşümü

$$\Phi(w) = (2\pi)^{-1/2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt \right] \quad (6.134)$$

$$\Phi(w) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(wt) + \sin(wt)] dt \quad (6.135)$$

$$cas(wt) = \cos(wt) + \sin(wt)$$

olarak verilir. Üstteki eşitliklerde, gerekli değişiklikler yapıldığında,

$$\Phi(w) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) cas(wt) dt \quad (6.136)$$

durumuna gelir. Burada,

$$G(w) = \mathfrak{I}_c[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt$$

$$S(w) = \mathfrak{I}_s[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt \quad \text{dir (bkz bölüm 3.6).}$$

$$\Phi(w) = (2\pi)^{-1/2} \{ \mathfrak{I}_c[f(t)] + \mathfrak{I}_s[f(t)] \} \quad (6.137)$$

$$\Phi(w) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) cas(wt) dt \quad (6.138)$$

(6.138) Hartley dönüşümü olarak tanımlanır (Bracewell 1984).

Bağıntı karışık gibi görülebilir. Ancak, (6.134) denkleminde de

açıkça görüleceği gibi tümlev, sinüs ve kosinüs dönüşümüdür. (6.134)

denkleminin ters dönüşümü,

$$f(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(w) [\cos(wt) + \sin(wt)] dw \quad (6.139)$$

ve (6.136) ve (6.137) ye benzer şekilde

$$f(t) = (2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(w) cas(wt) dw \quad (6.140)$$

$$f(t) = (2\pi)^{-1/2} \{ \mathfrak{I}_c^{-1}[\Phi(w)] + \mathfrak{I}_s^{-1}[\Phi(w)] \} \quad (6.141)$$

dir. (6.138) ve (6.140) bağıntıları "Hartley Dönüşüm" çifti olarak

bilinir.  $\Phi(w)$  işlevi tek ve çift işlevlerin toplamı olarak yazılabilir.



$$\Phi(w) = E(w) + O(w)$$

Bu bağıntıda:

$E(w)$ :  $\Phi(w)$ ' nın çift işlevi,

$O(w)$ :  $\Phi(w)$ ' nın tek işlevidir.

Tek ve çift işlevlerin özelliklerinden yararlanılarak,

$$E(w) = \frac{\Phi(w) + \Phi(-w)}{2} = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt \quad (6.142)$$

$$O(w) = \frac{\Phi(w) - \Phi(-w)}{2} = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt \quad (6.143)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada genlik ve evre spektrumu,

$$|A(w)| = [E^2(w) + O^2(w)]^{1/2} = \left[ \frac{\Phi^2(w) + \Phi^2(-w)}{2} \right]^{1/2} \quad (6.144)$$

$$\theta(w) = tg^{-1} \frac{O(w)}{E(w)} = tg^{-1} \frac{\Phi(w) - \Phi(-w)}{\Phi(w) + \Phi(-w)} \quad (6.145)$$

(6.142-6.143) denklemleri Fourier kosinüs ve sinüs dönüşümleridir.

Hartley dönüşümünün çift ve tek kısımları, Fourier kosinüs ve sinüs dönüşümüdür. Bu durumda, FD  $F(w) = [E(w) - jO(w)]$  olarak yazılabilir.

Başka bir deyişle, Hartley dönüşümünün tek [ $O(w)$ ] ve çift kısımları

[ $E(w)$ ] kullanılarak FD lerine ulaşılabileceğini gösterir.

$$F(w) = E(w) - jO(w) = (2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(wt) - j \sin(wt)] dt \quad (6.146)$$

(6.146) dan yararlanarak  $S(w)$  ve  $\Phi(w)$  arasında

$$\Phi(w) = Ger[F(w)] - San[F(w)] \quad (6.147)$$

bağıntısı yazılabilir. (6.147) denkleminde de anlaşılacağı gibi, Hartley dönüşümü, FD. nün gerçel ve sanal kısımlarının farkından da elde edilebilir.

### 6.5.2 Ayrık Hartley Dönüşümü (AHD)

(6.136) denklemini ayrık olarak yazıldığında, ayrık Hartley Dönüşümü elde edilir.

$$\hat{H}_a(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \text{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \quad (6.148)$$

Burada “ $\hat{\cdot}$ ” işareti ayrık değerleri göstermek üzere,

$\hat{\mathcal{H}}_a$  : Ayrık Hartley dönüşümü

N : AHD alınacak nokta sayısı.

k : Tümler değişkeni.

$\text{cas}(\theta) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$

Ters AHD ise

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\mathcal{H}}_a(n) \text{cas}\frac{2\pi nk}{N} \quad (6.149)$$

dır. Tek ve çift işlevlerin özellikleri kullanılarak

$$\hat{\mathcal{H}}_a(n) = \hat{E}(n) + \hat{O}(n) \quad (6.150)$$

$$\hat{E}(n) = \frac{\hat{\mathcal{H}}_a(n) + \hat{\mathcal{H}}_a(N-n)}{2} \quad (6.151)$$

$$\hat{O}(n) = \frac{\hat{\mathcal{H}}_a(n) - \hat{\mathcal{H}}_a(N-n)}{2} \quad (6.152)$$

olarak yazılır. Böylece Hartley dönüşümlerinden yararlanılarak AFD,

$$\hat{F}(n) = \hat{E}(n) - j\hat{O}(n) \quad (6.153)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_a(n) = \mathfrak{I}(f_{\text{çift}}) - \mathfrak{I}(f_{\text{tek}}) \quad (6.154)$$

elde edilir.

---

#### **Not:**

K: zaman ortamı sayıcısı, n: frekans ortamı sayıcısı, N: zaman ortamı nokta sayısı (aynı zamanda frekans ortamındaki toplam harmonik sayısındır ve burada her ikisi de birbirlerine eşit alınmıştır).

---

#### **Örnek 6.14**

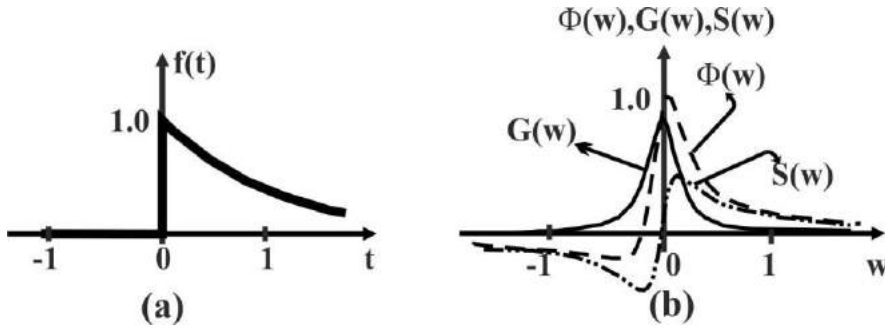
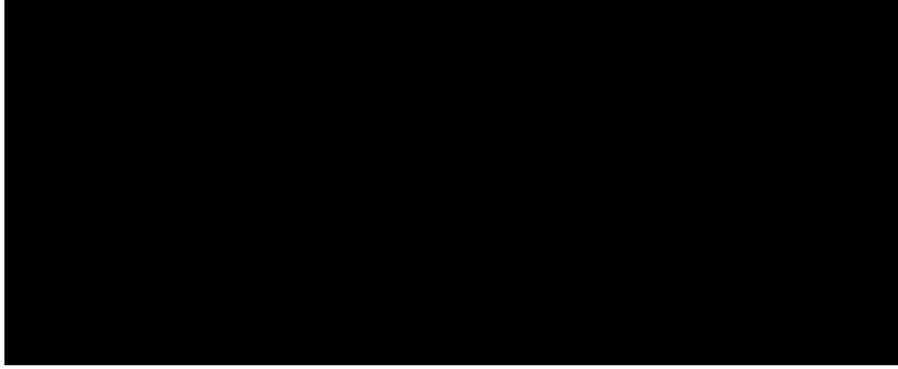
$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{işlevinin Hartley dönüşümünü bulunuz.}$$

#### **Çözüm**

Bölüm 3 Örnek 3.8 – 3.9 dan yararlanarak,

$$\mathfrak{I}_c(e^{-t}) = \frac{1}{1+w^2}, \mathfrak{I}_s(e^{-t}) = \frac{w}{1+w^2}$$

elde edilir. (6.135) denkleminde,



**Şekil 6.42 a)**  $f(t)$  dalgacığı (Bracewell 1986) **b)**  $\Phi(w)$ :  $f(t)$  dalgacığını Hartley dönüşümü (mavi renkli).

**G(w):**  $\Phi(w)$ ' nın (Hartley dönüşümü) gerçel kısmı, veya kosinüs dönüşümü (düz çizgi)

**S(w):**  $\Phi(w)$ ' nın (Hartley dönüşümü) sanal kısmı, veya sinüs dönüşümü, ancak "j" olmadığı için  $G(w)$  ve  $S(w)$  nın her ikisi de aynı ekseninde gösterilebilir (noktasız kesikli çizgi).

### **Örnek 6.15**

SP de kürenin FD kullanılarak güç spektrumunun bulunması Bölüm 4 Ek 1 de verilmiştir. Bu kez, güç spektrumunu, Hartley dönüşümünü kullanarak bulunuz.

### **Çözüm**

“ $\alpha$ ” açısıyla polarlanmış bir kürenin SP anomalisi

$$V(x) = \frac{\Delta V R^2}{2} \left[ \frac{h \cos(\alpha) + x \sin(\alpha)}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \right] \quad (6.155)$$

ile verilir (Heiland 1968). Burada  $\Delta V$  kürenin iki kutbu arasındaki gerilim farkıdır. Öngörülen bağıntıda  $N = \Delta V R^2 / 2$  tanımlaması yapıp  $V(x)$  tek ve çift fonksiyonların toplamı şeklinde,

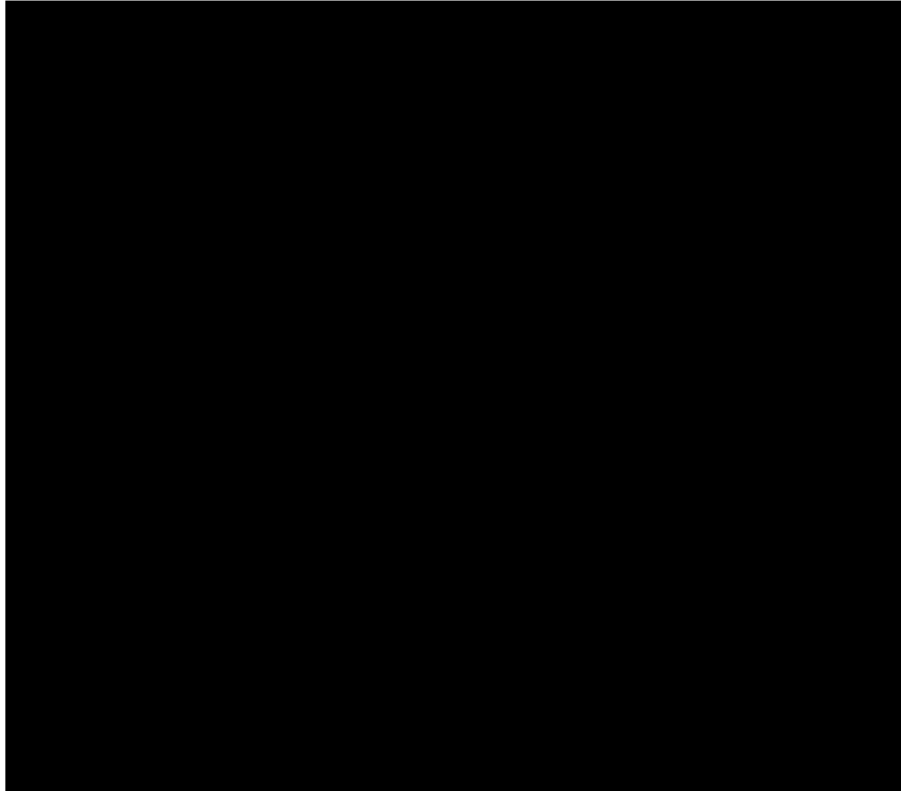
$$V(x) = V_\zeta(x) + V_t(x)$$

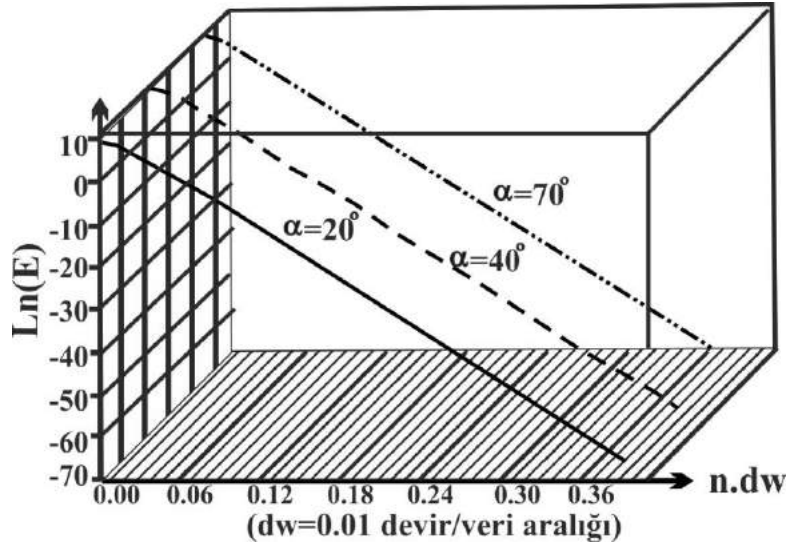
$$V_\zeta(x) = N \frac{h \cos(\alpha)}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \quad (6.156)$$

$$V_t(x) = N \frac{x \sin(\alpha)}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \quad (6.157)$$

elde edilebilir.

$V(x)$  gerilim bağıntısının Hartley dönüşümü (6.134-6.59-6.60) yaklaşımları kullanılarak ve sabitler tümlev dışına alınarak,





**Şekil 6.44** Doğal potansiyel yönteminde, 100 m. derinliğindeki küre modelinin, güç spektrumunun kutuplaşma açılarına bağlı olarak değişimi (Akçığ. Z., Pınar. R., 1994).

$$E(w)=4N^2w^2K^2(wh) \quad (6.165)$$

elde edilir.  $C=4N^2$  ile tanımlanıp, enerji spektrumunu doğrudan etkileyen parametreleri belirlemek ve doğrusallaştırmak için her iki tarafın logaritmaları alınarak izleyen bağıntı elde edilir.

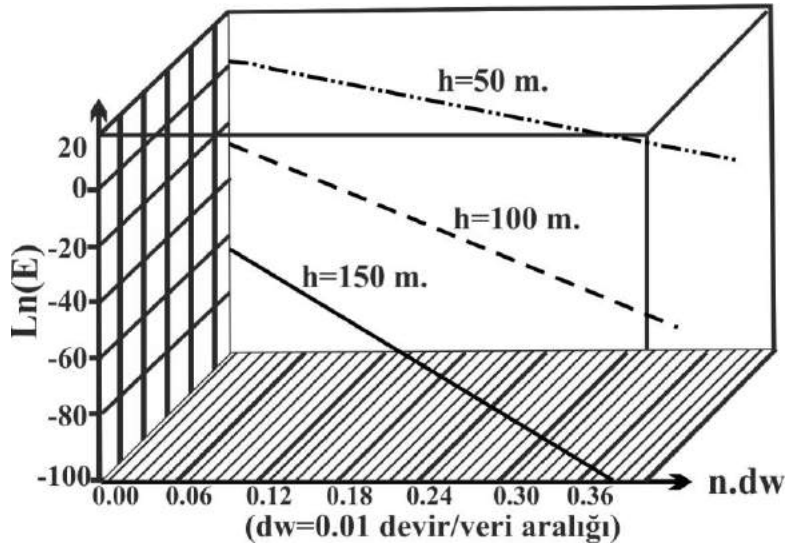
$$\ln E(w) = \ln C + 2 \ln(w) + 2 \ln(1.25) - \ln(wh) - 2wh \quad (6.166)$$

(6.166) bağıntısını inceleyecek olursak birinci ve üçüncü terimlerin (küre yarıçapı ve potansiyel farkı) spektrum eğrisinin eğimine etkilediği, yalnızca genlik değerine etkilediği görülür. İkinci, dördüncü ve beşinci terimlerin ise spektrumun eğimini etkilediği, ancak bunların arasında ise temel etkinin “-2wh” teriminden kaynaklandığı saptanmıştır (Akçığ. Z. ve diğ. 1990).

Sonuç olarak, (6.166) eşitliğinde,  $\ln E(w) = -2wh$  yazılabilir. Son denklemden, geçirilen doğrunun eğimi olarak

$$\text{Eğim} = -2h \quad (6.167)$$

bağıntısına ulaşılır. Böylece geçirilen doğrunun eğiminden yararlanılarak küre şekilli cismin derinliği bulunabilir. Şekil 6.45-7.50 ve çizelge 6.7 de bu tür uygulamaya ilişkin bir örnek ve saptanan derinliklerin hata oranları görülmektedir. Çizelgeden de izlenebileceği gibi sonuçlar oldukça başarılıdır.



**Şekil 6.45** Doğal potansiyel yönteminde,  $40^\circ$  kutuplaşma açılı, küre modelinin, güç spektrumunun derinliklere bağlı olarak değişimi (Akçığ. Z., Pınar. R., 1994).

Güç spektrumunu hesaplanmasında (6.167) eşitliği çok önemlidir. Bu bağıntı genellenerek, tüm potansiyel alanlarda (gravite, manyetik, doğal potansiyel yöntemleri) kaynak derinliğinin hesaplanmasında kullanılır.

POLARLANMA AÇISI	GERÇEK DER. (m)	HESAPLANAN DER. (m)	HATA ORANI %
$\alpha=20^\circ$	h=100	h=96.6	3.4
$\alpha=40^\circ$	h=100	h=96.6	3.4
$\alpha=70^\circ$	h=100	h=96.6	3.4
$\alpha=40^\circ$	h=50	h=46.6	6.8
$\alpha=40^\circ$	h=100	h=96.6	3.4
$\alpha=40^\circ$	h=150	h=144.4	3.7

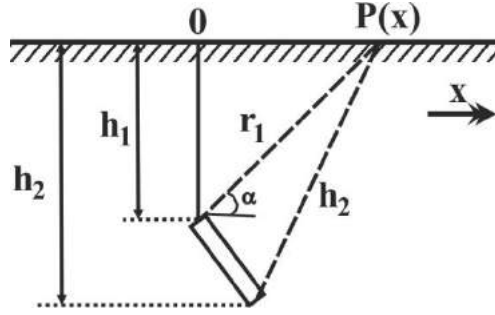
**Çizelge 6.7** Çubuk modeline ait derinlikler ve hata oranları (potansiyel anomalisi)

### **Örnek 6.16**

Doğal Potansiyel yönteminde, çubuk biçimli yapının, güç spektrumunu, Hartley dönüşümü yardımıyla bulunuz.

### **Çözüm**

Yeraltında “ $\alpha$ ” kutuplaşma açısına sahip bir çubuğun (Şekil 6.46), yeryüzündeki izdüşümünden x uzaklıktaki bir “P(x)” noktasında oluşturacağı gerilimin bağıntısı,



Şekil 6.46 Doğal potansiyel yönteminde çubuk modeli

$$v(x) = -\frac{\rho I}{2\pi} \left\{ (x^2 + h_1^2)^{-1/2} - \left[ \left( x - \frac{h_2 - h_1}{\tan(\alpha)} \right)^2 + h_2^2 \right]^{-1/2} \right\} \quad (6.168)$$

ile verilir (Heiland 1968). Burada:

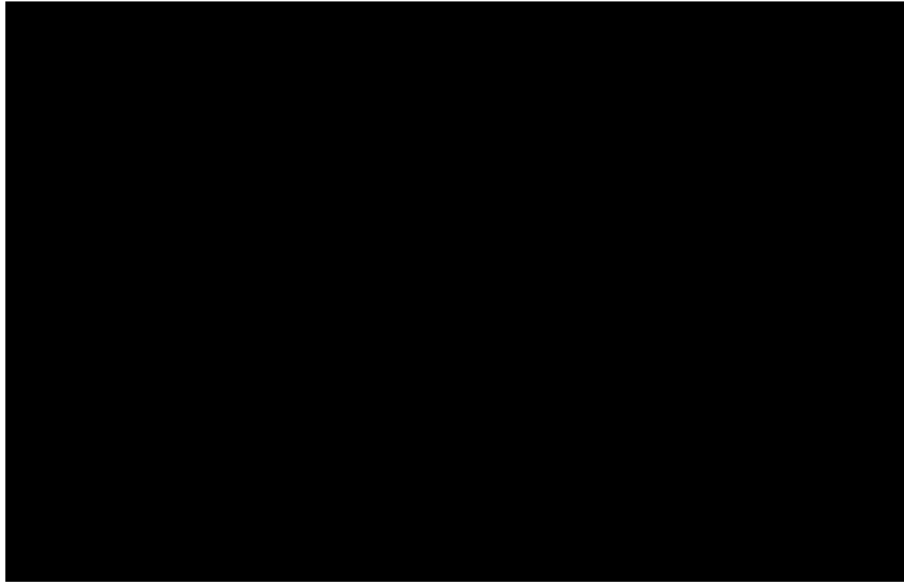
$\rho$ : Ortamın özdirenci.

$I$ : Akım yoğunluğu.

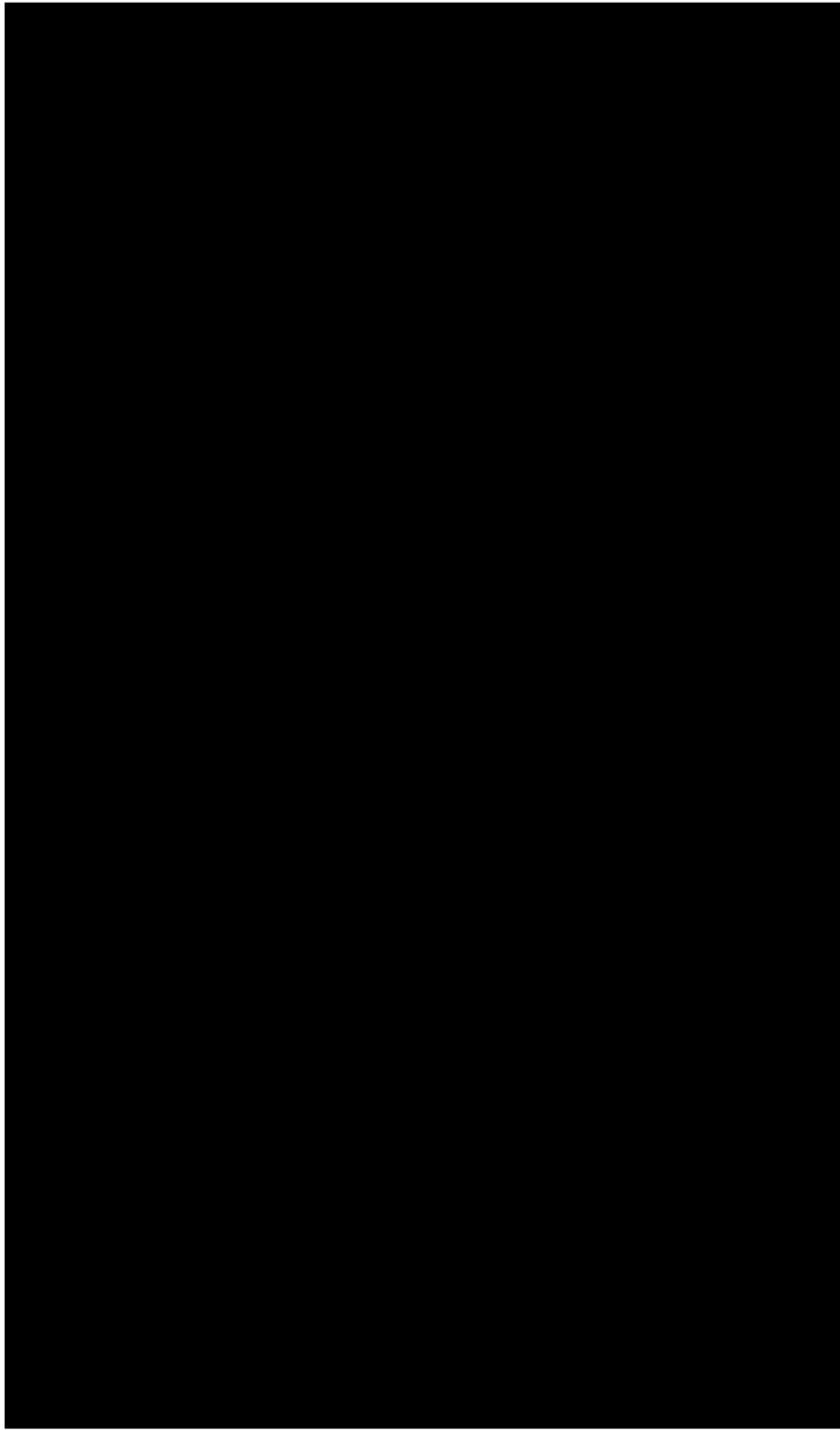
“ $h_1$ ” çubuğun üst ucunun, “ $h_2$ ” çubuğun alt ucunun yeryüzüne olan uzaklığı olmak üzere, (6.168) bağıntısında

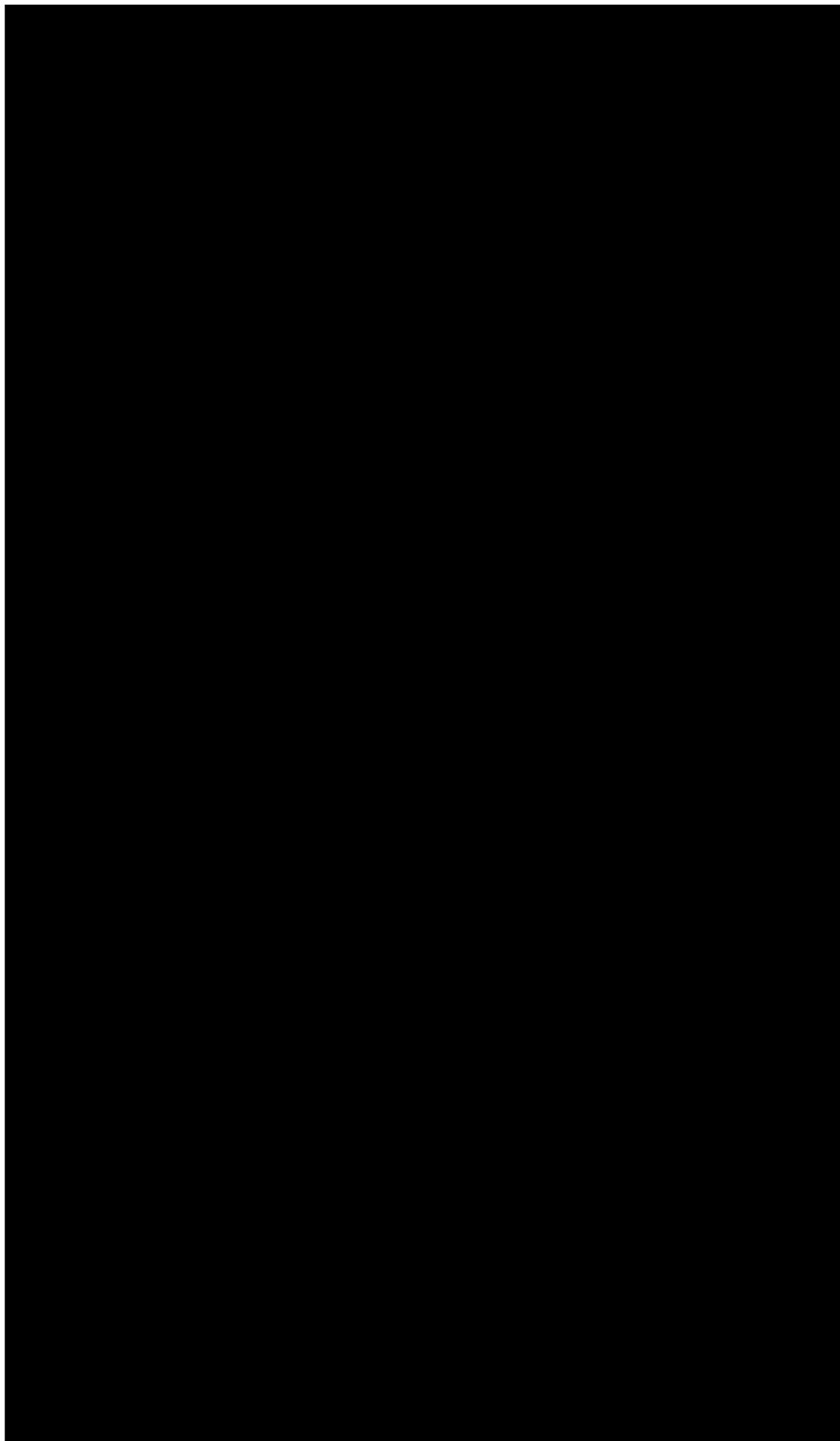
$$N = \frac{\rho I}{2\pi} \quad , \quad a = \frac{h_2 - h_1}{\tan(\alpha)} \quad (6.169)$$

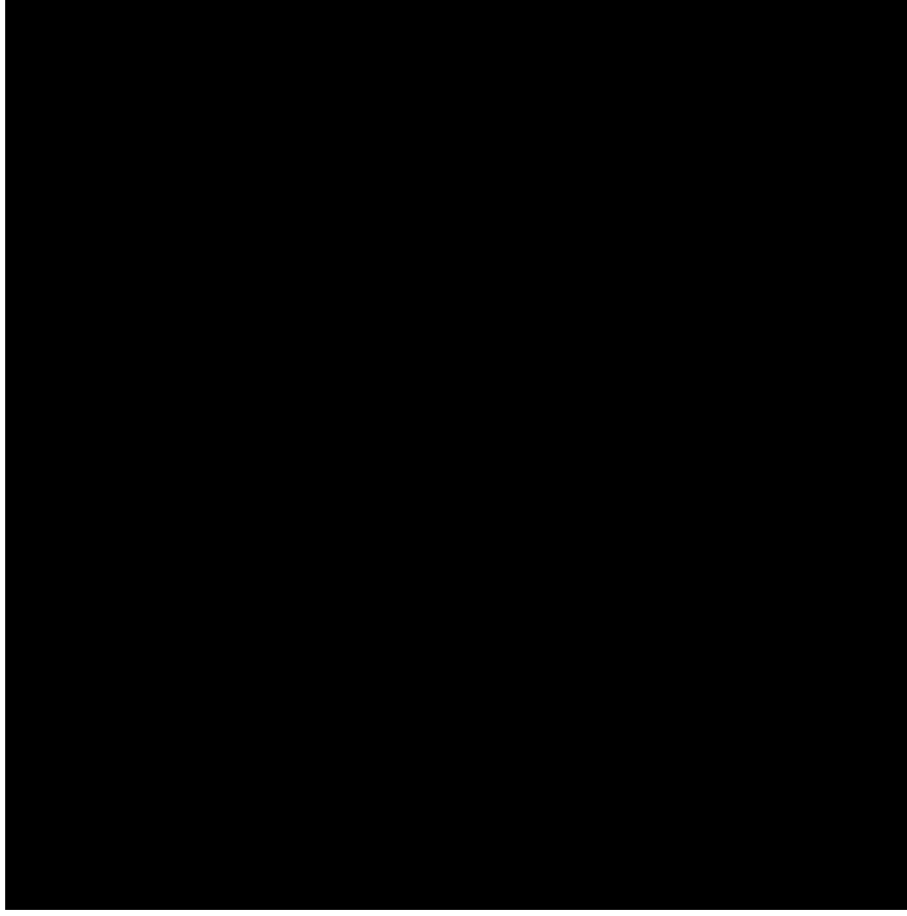
tanımlamaları yapılarak ve “ $v(x)$ ” tek ve çift bileşenlerine ayrılarak











düzenlenebilir. Terimler incelendiğinde, eğime olan temel etkinin “-2wh<sub>1</sub>” teriminden kaynaklandığı, (6.167) bağıntısının, tüm potansiyel alanlarda, model ne olursa olsun, geçerli olduğunu bir kez daha göstermektedir.

**Eğim=-2h**

(6.167)

Bu örnekte (Hartley dönüşümü kullanılarak), verilen yöntem ile bulunan derinlikler ile gerçek derinlikler ve yanılğı oranları (Şekil 6.45) çizelge 6.9 da verilmiştir.

<b>h<sub>1</sub>=50 m    h<sub>2</sub>=50 m    α=20<sup>0</sup>    L=100 m</b>				
<b>w</b>	<b>K<sub>0</sub>(wh<sub>1</sub>)</b>	<b>K<sub>0</sub>(wh<sub>2</sub>)</b>	<b>K<sub>0</sub>(wh<sub>1</sub>)* K<sub>0</sub>(wh<sub>2</sub>)</b>	<b>K<sub>0</sub>(wh<sub>1</sub>)/K<sub>0</sub>(wh<sub>2</sub>)*100</b>
0.05	0.06505	0.00906	5.9 10 <sup>-4</sup>	13.93
0.1	0.0377	9.5 10 <sup>-5</sup>	3.6 10 <sup>-7</sup>	2.52
0.15	2.5 10 <sup>-4</sup>	1.1 10 <sup>-6</sup>	2.8 10 <sup>-10</sup>	0.45
0.2	1.8 10 <sup>-8</sup>	1.6 10 <sup>-8</sup>	2.8 10 <sup>-11</sup>	0.08
0.25	1.3 10 <sup>-6</sup>	2.0 10 <sup>-10</sup>	2.7 10 <sup>-14</sup>	0.15
<b>h<sub>1</sub>=50 m    h<sub>2</sub>=114 m    α=40<sup>0</sup>    L=100 m</b>				
<b>w</b>	<b>K<sub>0</sub>(wh<sub>1</sub>)</b>	<b>K<sub>0</sub>(wh<sub>2</sub>)</b>	<b>K<sub>0</sub>(wh<sub>1</sub>)* K<sub>0</sub>(wh<sub>2</sub>)</b>	<b>K<sub>0</sub>(wh<sub>1</sub>)/K<sub>0</sub>(wh<sub>2</sub>)*100</b>
0.05	0.06505	1.7 10 <sup>-3</sup>	1.1 10 <sup>-4</sup>	2.6
0.1	0.0377	4.1 10 <sup>-6</sup>	1.5 10 <sup>-7</sup>	0.11
0.15	2.5 10 <sup>-4</sup>	1.1 10 <sup>-8</sup>	2.5 10 <sup>-12</sup>	4.0 10 <sup>-3</sup>
0.2	1.8 10 <sup>-8</sup>	3.0 10 <sup>-11</sup>	5.4 10 <sup>-16</sup>	1.6 10 <sup>-4</sup>
0.25	1.3 10 <sup>-6</sup>	9.0 10 <sup>-11</sup>	1.2 10 <sup>-16</sup>	7.0 10 <sup>-3</sup>
<b>h<sub>1</sub>=50 m    h<sub>2</sub>=146 m    α=75<sup>0</sup>    L=100 m</b>				
<b>w</b>	<b>K<sub>0</sub>(wh<sub>1</sub>)</b>	<b>K<sub>0</sub>(wh<sub>2</sub>)</b>	<b>K<sub>0</sub>(wh<sub>1</sub>)* K<sub>0</sub>(wh<sub>2</sub>)</b>	<b>K<sub>0</sub>(wh<sub>1</sub>)/K<sub>0</sub>(wh<sub>2</sub>)*100</b>
0.05	0.06505	3.0 10 <sup>-4</sup>	2.0 10 <sup>-4</sup>	0.46
0.1	0.0377	9.8 10 <sup>-8</sup>	3.6 10 <sup>-10</sup>	2.5 10 <sup>-3</sup>
0.15	2.5 10 <sup>-4</sup>	7.0 10 <sup>-11</sup>	1.7 10 <sup>-14</sup>	1.75 10 <sup>-12</sup>
0.2	1.8 10 <sup>-8</sup>	6.0 10 <sup>-14</sup>	1.08 10 <sup>-18</sup>	1.08 10 <sup>-16</sup>
0.25	1.3 10 <sup>-6</sup>	2.0 10 <sup>-17</sup>	2.6 10 <sup>-23</sup>	1.53 10 <sup>-21</sup>

**Çizelge 6.8**  $K_0(w_{h1})$  ve  $K_0(w_{h2})$  nin “w” ya bağlı olarak değişimi

<b>POLARLANMA AÇISI (<math>\alpha</math>)</b>	<b>GERÇEK DERİNLİK (m)</b>	<b>HESAPLANAN DERİNLİK (m)</b>	<b>HATA ORANI %</b>
20 <sup>0</sup>	100	97.6	2.4
40 <sup>0</sup>	100	97.6	2.4
70 <sup>0</sup>	100	97.6	2.4
40 <sup>0</sup>	50	49.0	2.0
40 <sup>0</sup>	100	97.6	2.4
40 <sup>0</sup>	150	145.6	3.0

<b>POLARLANMA AÇISI (<math>\alpha</math>)</b>	<b>GERÇEK DERİNLİK (m)</b>	<b>HESAPLANAN DERİNLİK (m)</b>	<b>HATA ORANI %</b>
20 <sup>0</sup>	100	97.2	2.8
40 <sup>0</sup>	100	97.2	2.8
70 <sup>0</sup>	100	97.2	2.8
40 <sup>0</sup>	50	48.8	2.4
40 <sup>0</sup>	100	97.2	2.8
40 <sup>0</sup>	150	145.0	3.0

**Çizelge 6.9** Küre modeline ait derinlikler ve hata oranları (potansiyel anomalisi)

## EK-A Denklem çözümleri

(6.43), (6.44) bağıntılarının ara geçişleri aşağıda verilmiştir.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(t, \alpha) = f(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [F_{\zeta}(w) \cos wt + F_t(w) \sin wt] e^{-\alpha w} dw \quad (6.56)$$

Yeni bir “g(r)” işlevini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$g(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [F_{\zeta}(w) - jF_t(w)] e^{jr w} dw$$

Son eşitlikte ”r” karmaşık değişkendir ve  $r=t+j\alpha$  olarak verilir. Bu koşulda 6.43 te verilen denklem, “g(r)” in yalnızca gerçel kısmıdır. Sanal kısım da “q” ile gösterilirse

$g(r)=f(r)+jq(r)=f(t,\alpha)+jq(t,\alpha)$  dır. Burada

$$q(t, \alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [F_t(w) \cos wt - F_{\zeta}(w) \sin wt] e^{\alpha w} dw$$

dır. Son bağıntıda

$$f_1(t) = -\mathcal{A}(t, 0) = -\mathcal{A}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [F_t(w) \cos wt - F_{\zeta}(w) \sin wt] dw \quad (6.57)$$

tanımlanır.

## EK-B Denklem çözümleri

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx \quad \text{olduğunu anımsayınız.}$$

(6.110) ve (6.113) bağıntılarını çözümlerinde Erdelyi 1954 kalıpları kullanılır. Söz konusu kalıp denklemleri aşağıda verilmiştir.

(6.113) bağıntısının çözümünde kullanılan kalıp denklem (bölüm 2.4, denklem no 1);

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2} \quad \text{iken,}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(xy) dx = \frac{1}{2\pi} a^{-1} e^{-ay} \quad \text{dır.}$$

(6.113) bağıntısının çözümünde kullanılan kalıp denklem (bölüm 2.4, denklem no 1);

$f(x)=e^{-ax}$  iken,

$$g(y) = \int_0^{\infty} f(x) \sin(xy) dx = \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin(xy) dx = \frac{y}{a^2 + y^2} \text{ dir.}$$

### EK-C Denklem çözümleri

(6.116) denkleminin FD

$$V(w) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z \cos(Q) - x \sin(Q)}{z^2 + x^2} e^{-jwx} dx$$

olarak yazılabilir. Bu denklem düzenlenirse,

$$V(w) = A z \cos(Q) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jwx}}{z^2 + x^2} dx - A \sin(Q) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-jwx}}{z^2 + x^2} dx$$

şeklini alır. Bu tümlevde  $\lambda=jx$  dönüşümü yapılırsa,

$$V(w) = \frac{A h \cos(Q)}{j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-w\lambda}}{z^2 - \lambda^2} d\lambda - A \sin(Q) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda e^{-w\lambda}}{z^2 - \lambda^2} d\lambda$$

elde edilir. Tümlevlerin çözümü için Rezidü kuramı kullanılır.

$$\int f(\lambda) d\lambda = \pi j a_{-1} \quad a_{-1} = \lim_{\lambda \rightarrow a} (\lambda - a) f(\lambda) \text{ (rezidü)}$$

$\lambda=z$  için rezidü tümlevin 1. kısmı için

$$a_{-1} = \lim_{\lambda \rightarrow z} \frac{(\lambda - z) e^{-w\lambda}}{z^2 - \lambda^2} = -\frac{e^{-wz}}{2z}$$

tümlevin 2. kısmı için;

$$a_{-1} = \lim_{\lambda \rightarrow z} \frac{(\lambda - z) z e^{-w\lambda}}{z^2 - \lambda^2} = -\frac{e^{-wz}}{2}$$

elde edilir.  $\lambda = -z$  ın jeofizikte bir anlamı yoktur (yani "-" derinlik olmaz) dolayısı ile bu çözüm yapılamaz. O zaman gerçel ve sanal bileşenler,

$$GerV(w) = -A z \cos(Q) \left[ \frac{2\pi}{2z} e^{-wz} \right] = -A \pi \cos(Q) e^{-wz}$$

$$SanV(w) = A \sin(Q) \left[ -\pi j e^{-wz} \right] = -j A \pi \sin(Q) e^{-wz}$$

bulunur.

## EK-D

Bu bölümde tümlev çözümlerinde kullanılan Erdelyi 1954 ve Abramowitz, Stegun, 1972 kalıpları aşağıda verilmiştir.

**Not:** Kalıplarda kullanılan “Re”, gerçel anlamındadır.

1) Erdelyi 1954, s.11, kalıp 7,

$$g(y) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(xy) dx \quad , \quad f(x) = \frac{1}{\{x^2+a^2\}^{-v-1/2}}$$
$$g(y) = \left[ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)y}{a} \right]^v \pi^{\frac{1}{2}} \left[ \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) \right]^{-1} K_v(ay)$$

Re  $a > 0$ , Re  $v > -1/2$

2) Erdelyi 1954, s.14, kalıp 28,

$$g(y) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(xy) dx \quad , \quad f(x) = \frac{x^{2m}}{\{x^2+a^2\}^{v+1/2}}$$
$$g(y) = \frac{(-1)^m a^{-v} \pi^{1/2}}{2^v \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)} \frac{d^{2m}}{dy^{2m}} [y^v K_v(ay)]$$

Re  $> 0$  ,  $0 \leq m < \text{Re}[v+(1/2)]$

3) Erdelyi 1954, s.66, kalıp 27,

$$g(y) = \int_0^{\infty} f(x) \sin(xy) dx \quad , \quad f(x) = \frac{x}{\{x^2+a^2\}^{3/2}}$$
$$g(y) = y K_0(ay)$$

Re  $a > 0$

4) Erdelyi 1954, s.67, kalıp 37

$$g(y) = \int_0^{\infty} f(x) \sin(xy) dx \quad f(x) = \frac{x^{2m+1}}{\{x^2+a^2\}^{n+1/2}}$$
$$g(y) = \frac{(-1)^{m+1} \pi^{1/2}}{2^n a^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \frac{d^{2m+1}}{dy^{2m+1}} [y^n K_n(ay)]$$

$-2 \leq 2m \leq 2n$  , Re  $a > 0$



5) Abramowitz, and Stegun, 1972, s.255,

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5.7 \dots (2n - 1)}{2}$$

$$\Gamma(1) , \quad \Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$$

6) Abramowitz, and Stegun, 1972,

$$\frac{d}{dx} = [w^n K_n(wh) = -hw^n K_{n-1}(wh)]$$

7) Abramowitz, and Stegun, 1972, s.379,

$$0 < x < 2$$

$$K_0 = -Ln\left(\frac{x}{2}\right)I_0(x) - 0.5772 + 0.4227\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 0.2306\left(\frac{x}{2}\right)^4 \dots$$

8) Abramowitz, and Stegun, 1972, s.379,

$$2 < x < \infty$$

$$x^{\frac{1}{2}}e^{-x}K_0(x) = 1.2553 - 0.0783(2/x) + 0.218(2/x)^2 - 0.0106(2/x)^3 \dots$$

9) Abramowitz, and Stegun, 1972, s.379,

$$0 < x < 2$$

$$xK_1(x) = xLn(x/2)I_1(x) + 1 + 0.15443(x/2)^2 - 0.67278(x/2)^4 \dots$$

10) Abramowitz, and Stegun, 1972, s.379,

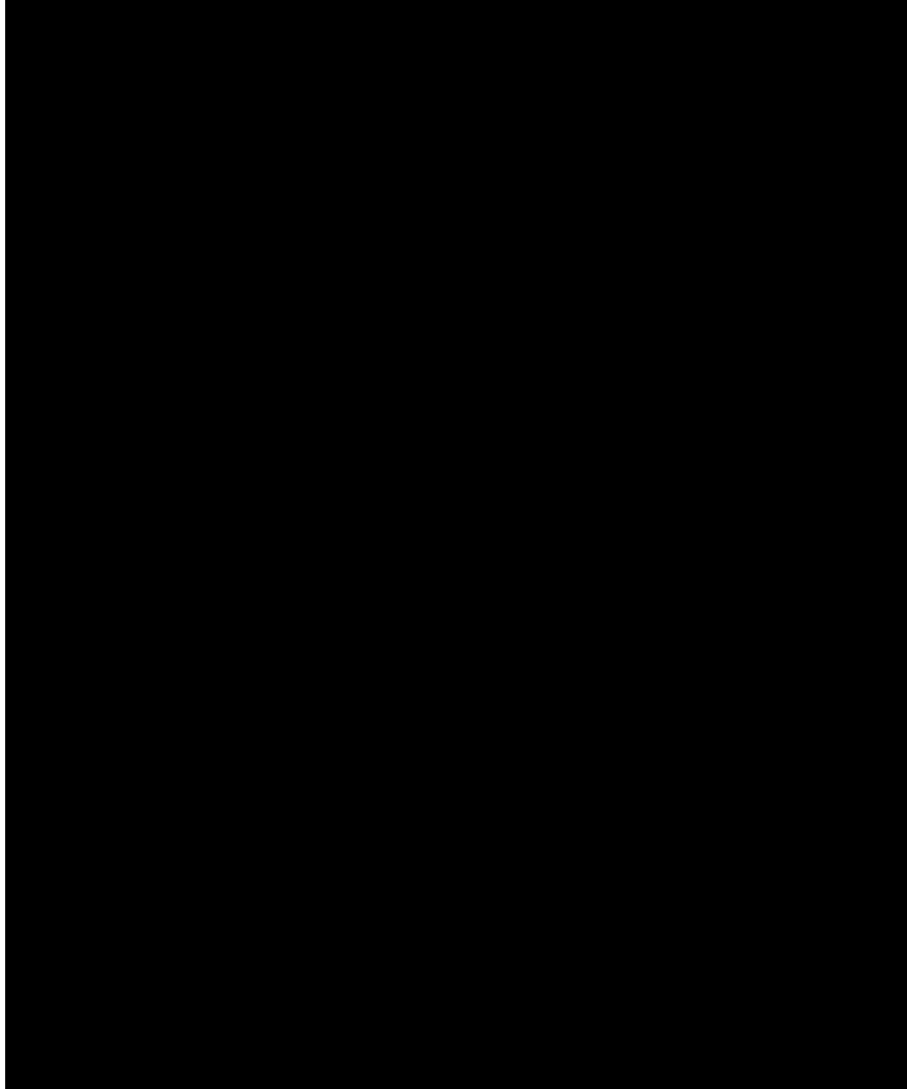
$$2 < x < \infty$$

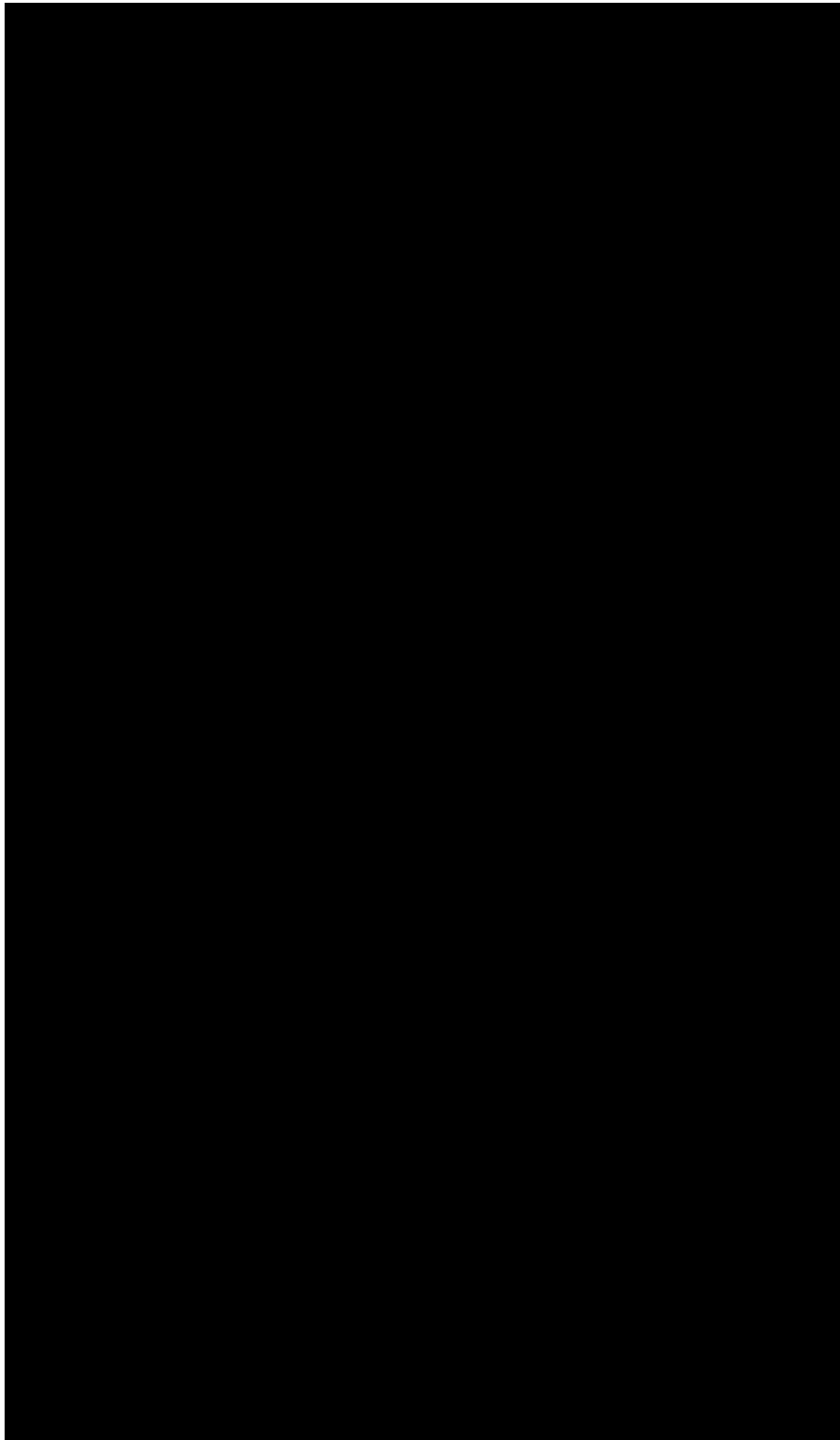
$$x^{\frac{1}{2}}e^{-x}K_1(x) = 1.2553 + 0.2349(2/x) - 0.0365(2/x)^2 + 0.01504(2/x)^3 \dots$$

## **EK PR-1**

Hilbert Dönüşümünün katsayılarını (istenilen uzunlukta) hesaplayan program

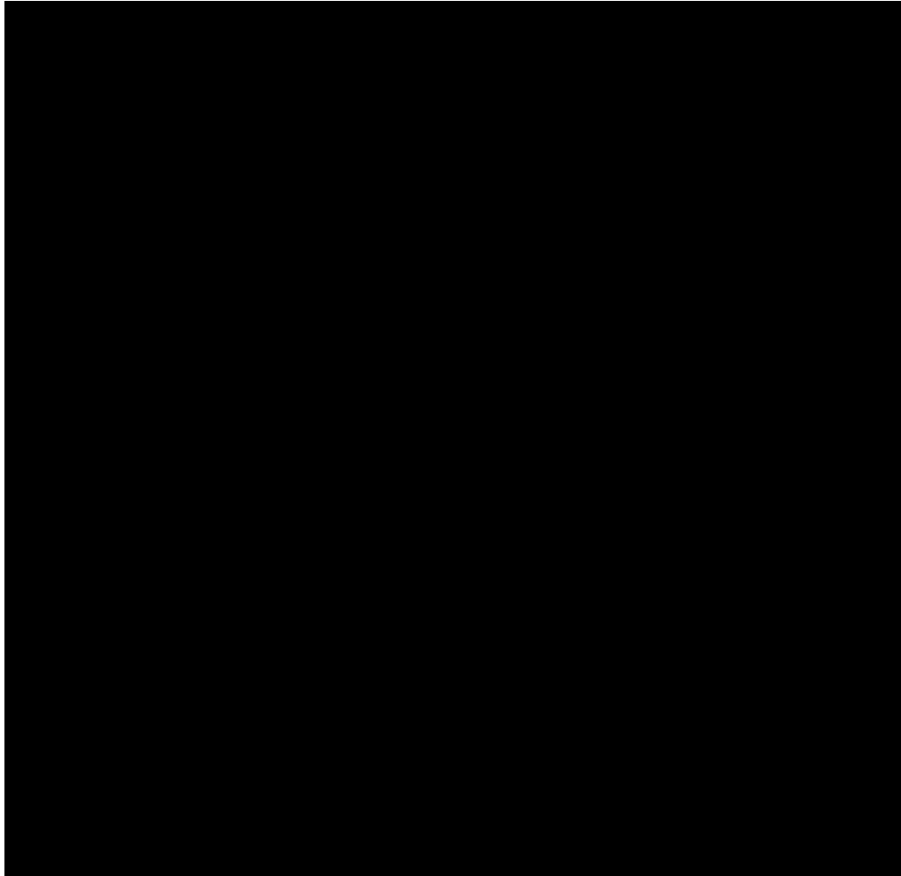
```
C  ** TEK BOYUTLU HILBERT DONUSUMU KATSAYILARI
C  PROGRAMI**
C  *** UYARI: HESAPLANACAK OLAN HD. KATSAYILARI
C  TEK OLMALIDIR. ***
C*****
```

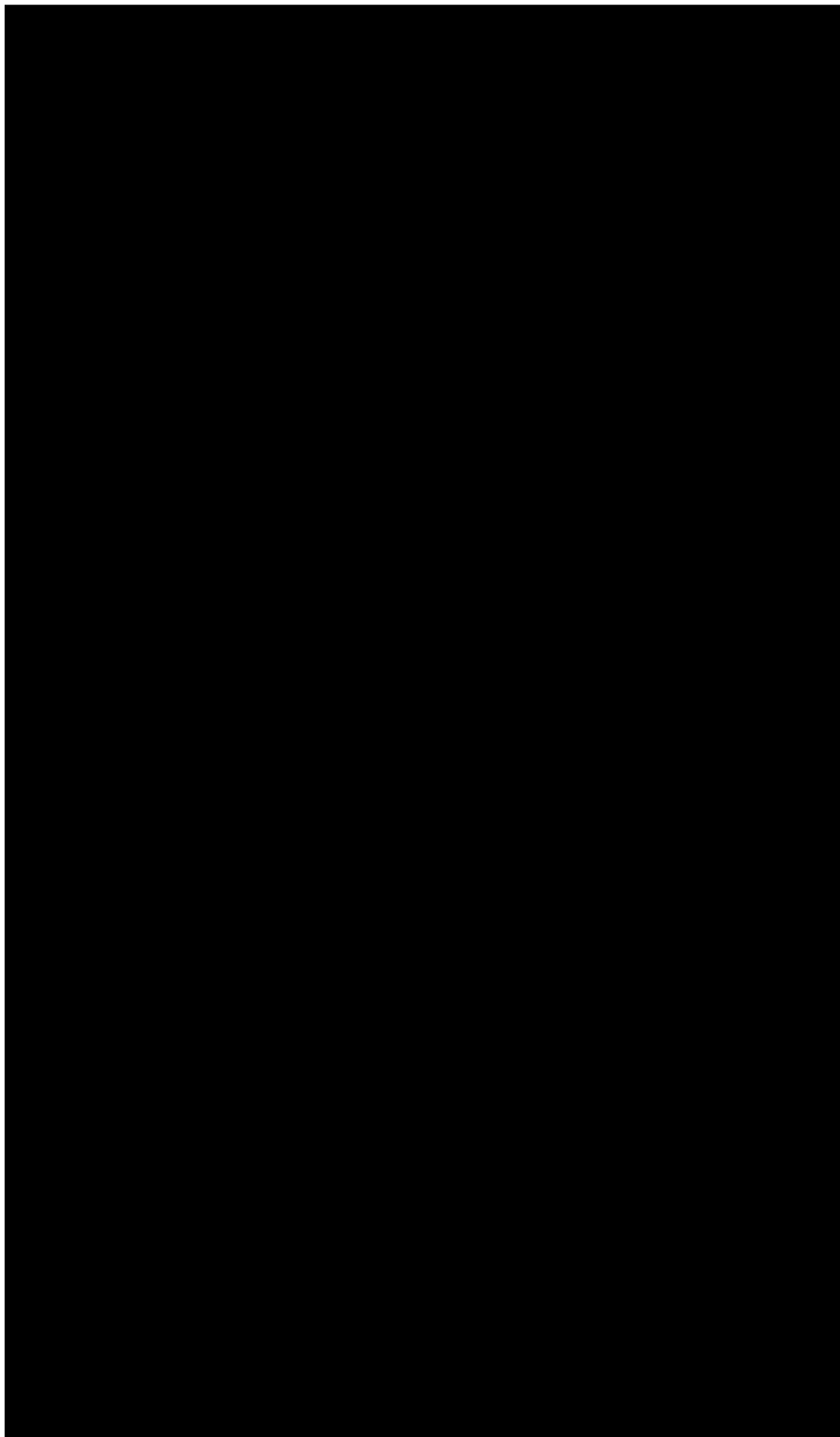


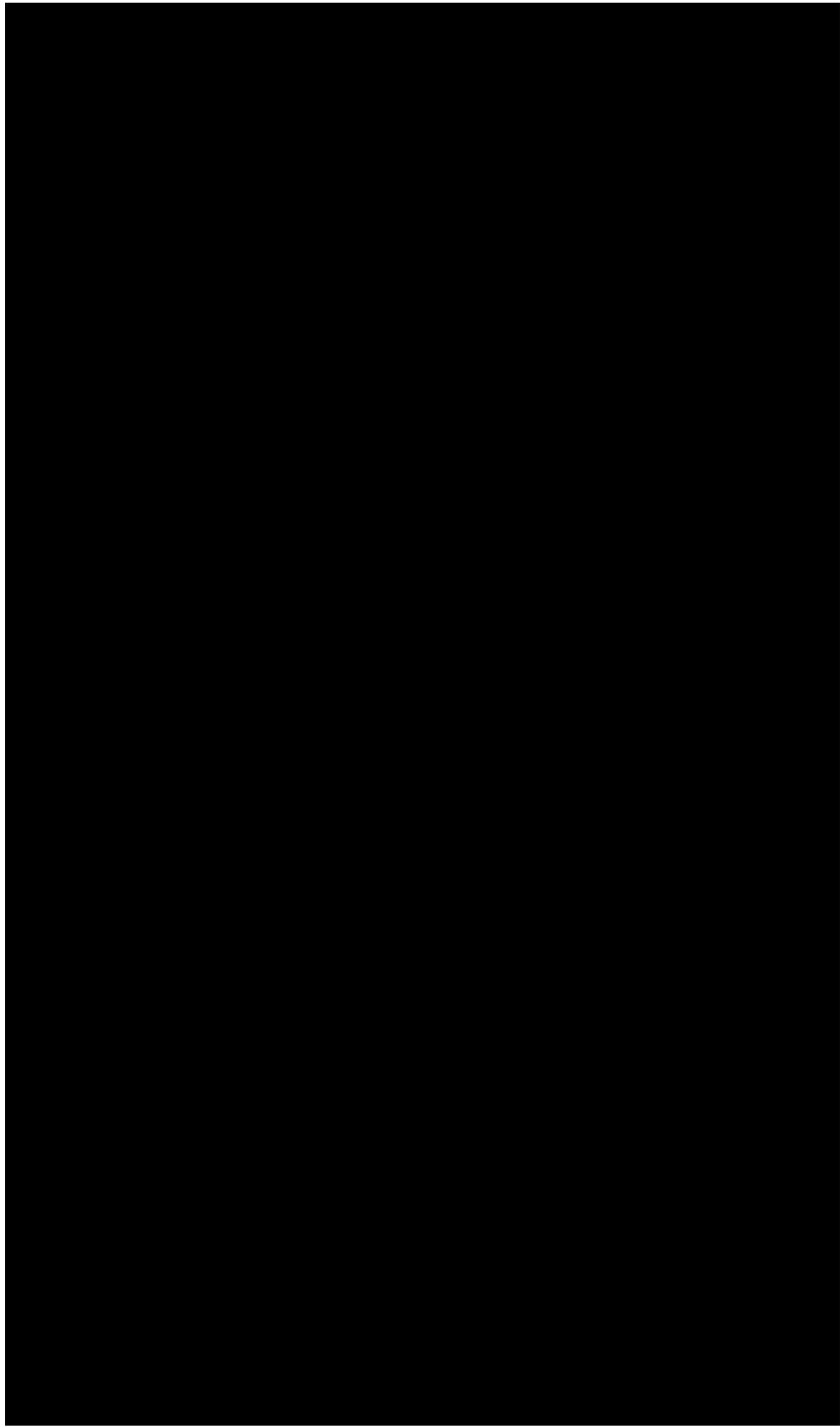


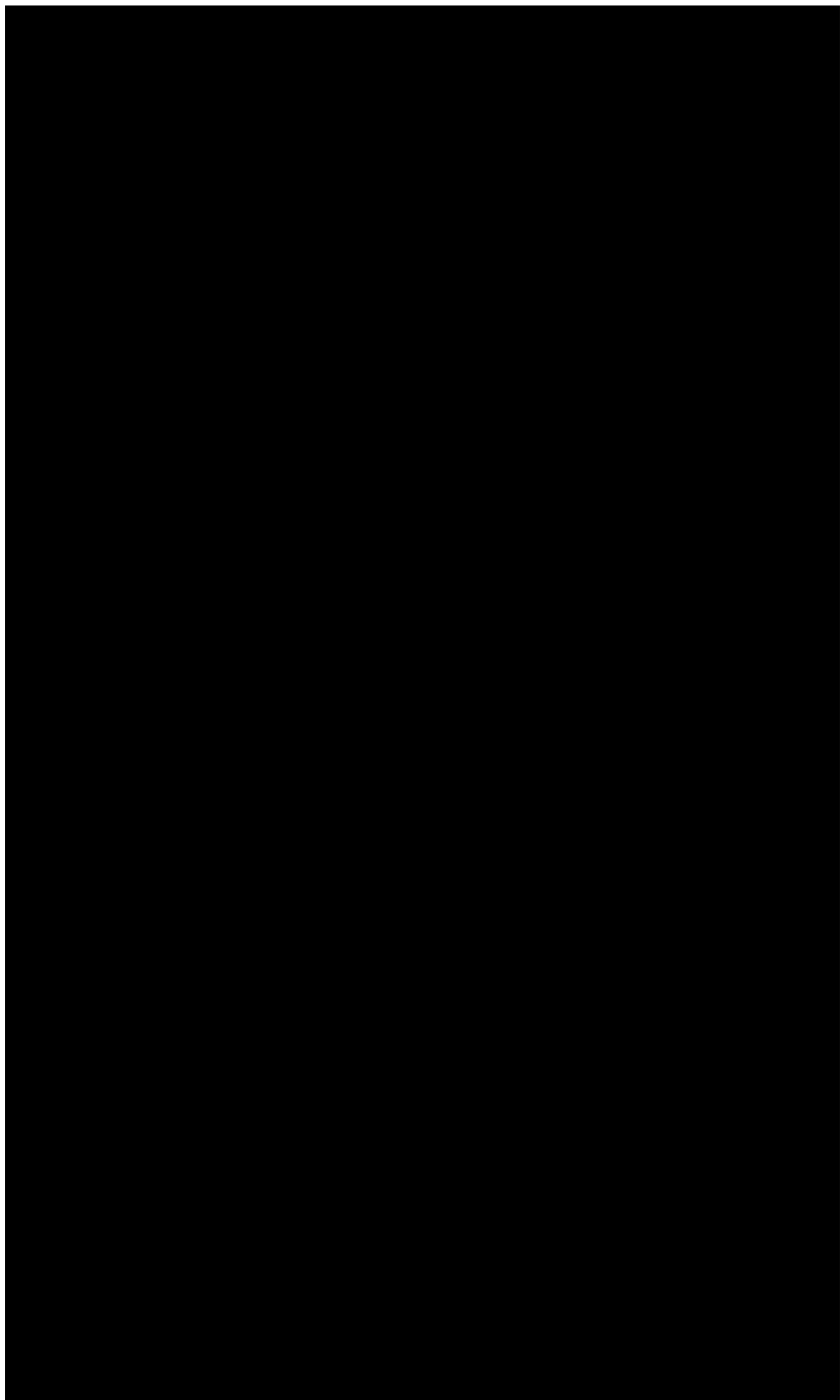
## EK PR-2

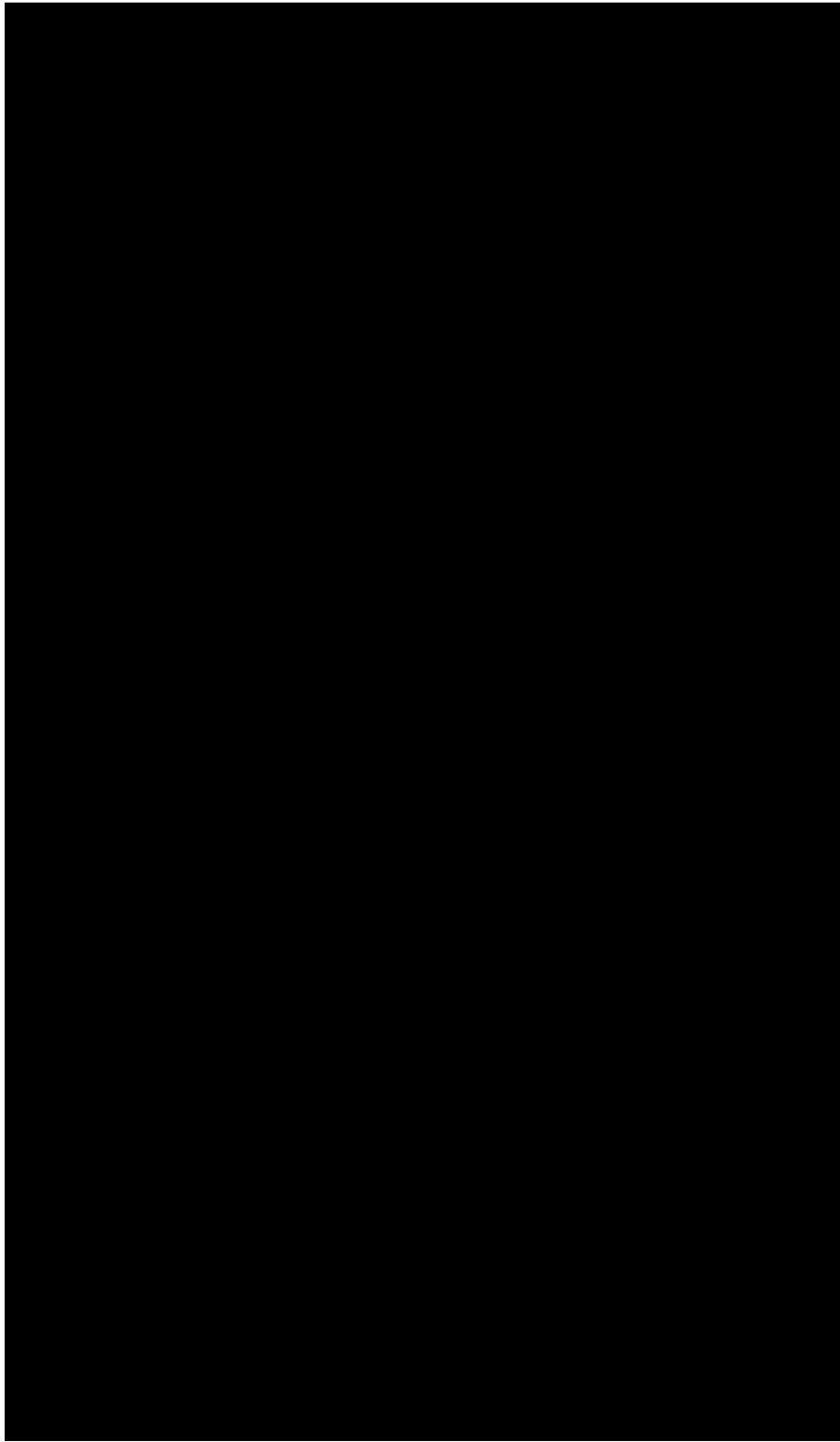
C \*\* TEK BOYUTLU HILBERT DONUSUMU PROGRAMI\*\*  
C\*\*\*\*\*  
C \*\*\* UYARI: VERI VE HD. KATSAYILARI TEK OLMALIDIR.  
C NH : HILBERT ISLEC KATSAYILARININ SAYISI (TEK  
C SAYIDA VERILECEK)  
C NG : VERI SAYISI  
C DX : ORNEKLEME ARALIGI (KM.)  
C G : VERILER  
C A : ANLIK GENLIK DEGISIMI  
C Q : ANLIK EVRE DEGISIMI  
C HH : "NG" BOYUNDA, HD. KATSAYI DIZISI  
C GTR: VERILERIN YATAY (X YONUNDE) 1. TUREVI  
C GHL: VERILERIN HD. (VERI \* HD. KATSAYILARI)  
C\*\*\*\*\*













Programın sınanması için giriş ve çıkış verileri

Programa giriş verileri:

11 ⇒ HD. nün hesaplanacağı katsayıların sayısı  
21 ⇒ HD. alınacak veri sayısı  
1 ⇒ Verilerin örnekleme aralığı (km. cinsinden)  
10 9.8 9.7 9.6 9.5 9.3 9.1 8.8 8.5 8.2 7.8 7.5 7 6.8 6.5 6.3 6 5.8 5.7 5.6  
5.5 ⇒ veriler 21 adet

Programın çıkış verileri:

11 BOYLU NORMALLESTIRILMIS HD. KATSAYILARI

0.0000 -0.1111 0.0000 -0.1429 -0.0000 -0.2000 0.0000  
-0.3333 0.0000  
-1.0000 0.0000

\*\*\* HD. ALINMIS VERILER \*\*\*

0.0698 0.0553 0.1342 0.1145 0.3287 0.2544 0.2713  
0.3175 0.3803  
0.4599 0.4945 0.5722 0.5426 0.5953 0.5594 0.5758  
0.5192 0.3593  
0.3715 0.3172 0.3172

\*\*\* GENLIK DEGISIMI \*\*\*

0.2118 0.1143 0.1625 0.1467 0.3613 0.3236 0.3689 0.4426  
0.4793 0.5830  
0.6011 0.7078 0.6502 0.6394 0.6127 0.6277 0.5837 0.3862  
0.3826 0.3326  
0.3326

\*\*\* EVRE DEGISIMI \*\*\*

70.7707 61.0498 34.3341 38.6807 24.5308 38.1711 42.6606  
44.1621 37.4866  
37.9245 34.6406 36.0604 33.4424 21.4017 24.0805 23.4697  
27.1852 21.5194  
13.8605 17.4967 17.4967

## Herman Hankel 1839-1873



14 şubat 1839 da Halle de doğan Herman Hankel, 1857 yılında babasının Leipzig Üniversitesinde çalışmaya başlaması üzerine matematik eğitimini Leipzig Üniversitesinde sürdürdü. Burada, matematik eğitimini, dönemin ünlü matematikçisi Möbius, fizik eğitimini ise babasıyla sürdürdü. 1860 yılında Göttingen'e giderek Riemann ile bir sonraki yıl, Weierstrass ve Kronecker ile Berlin de çalıştı. Doktora tezini 1862 de tamamladı.

1867 de olağanüstü profesör olarak atanarak, ilkbahar ve sonbahar dönemlerinde Leipzig ta ders verdi. Erlangen Marie DIPPE evlendi. 1869 da Tübingen de ders vermeye başladı.

Çalışmaları, genelde karmaşık sayılar, fonksiyonlar teorisi ve matematik tarihinin üzerinedir. Riemann's tümlevini, yeni baştan inceledi. Tüm çalışmalarını bu alanda yaptı. Yalnızca orijinden uzaklığa bağlı fonksiyonlar kuramı üzerinde çalıştı. Bilim tarihinde, bu çalışmaları, kendi adıyla bilinen Hankel dönüşümleridir.

29 ağustos 1873 te, 34 yaşında Tübingen de öldü.

### David Hilbert 1862-1943



David Hilbert, 23 Ocak 1862'de Prusya'nın Königsberg (Kaliningrad) şehrinde doğdu. 1884'te Königsberg Üniversitesinde doktora çalışmasını tamamladı. Aynı üniversitede, 1886-92 arasında doçent, 1892-93'te profesör, 1893-95 arasında ordinaryüs profesör olarak görev aldı.

Hilbert değişmezler kuramını kurdu ve geliştirdi. Değişmezler kuramı, dönme, genişleme, ve yansıma gibi geometrik değişimler altında, değişmeden kalan matematiksel varlıklarla ilgili bir kuramdır. Yirminci yüzyılda kullanılabilir olan, matematik açısından önemli gördüğü, 23 problemi ortaya koydu. "Hilbert'in 23 problemi" olarak Ünlü olan bu problemlerin bir kısmı çözülmüş ve bu çözümlerin her biri, bilim dünyasında büyük ses getirmiştir. Tümlev denklemleri üzerindeki çalışmalarıyla, fonksiyonların analizine önemli katkıları

oldu. Bu çalışmalar, günümüzde, Hilbert uzayı olarak adlandırılan, sonsuz boyutlu, uzay kavramının ortaya çıkmasını sağladı.

1910'da verilen ikinci Wolfgang Bolyai ödülünü aldı .1930'da Göttingen Üniversitesi'nden emekli olan Hilbert, aynı yıl Königsberg kentinin fahri hemşeriliğine seçildi. Hilbert'in bu seçim nedeniyle yaptığı *Naturerkennen und Logik* (Doğanın Anlaşılması ve Mantık) başlıklı konuşmasının son tümcesi şöyledir:

*Wir müssen wissen, wir werden wissen. (Bilmeliyiz, bileceğiz.)*

Hayatının son on yılı, Nazi rejiminin kendisine, öğrencilerine ve meslektaşlarından bir kısmına uyguladığı baskılardan ötürü sıkıntı içinde geçti. 14 Şubat 1943'te Göttingen'de öldü.

Hilbert'in eserleri toplu olarak *Gesammelte Abhandlungen* (Toplu Eserleri) adı altında 3 cilt olarak yayımlanmıştır.

## KAYNAKÇA

Abramowitz, M., and Stegun, I.A., 1972, Handbook of mathematical functions: Dover Publications Inc.

Akçıĝ, Z., Pınar R., 1994, SP yönteminde Hartley dönüşümü kullanılarak güç spektrumu uygulaması, Jeofizik, 8, 2, 147-160.

Akçıĝ, Z., Pınar, R., ve Ulugergerli E. 1990, Güç spektrumunun SP yönteminde küre modeline uygulaması, Jeofizik 4, 37-40.

Akçıĝ, Z., Pınar R., 1994, SP yönteminde Hartley dönüşümü kullanılarak güç spektrumu uygulaması, Jeofizik, 8, 2, 147-160.

Bracewell R. N., 1965, The Fourier transform and its application: McGraw Hill Book Company.

Bracewell, R. N., 1984, The fast Hartley transform, Prooc. IEEE, 72,1832-1835.

Bracewell R. N., 1986, The Fourier transform and its application: McGraw Hill Book Company, Second Edition.

Dean, W. C., 1958, Frequency analysis for gravity and magnetic interpretation: Geophysics, 23, 97-127.

Erdelyi, A., 1954, Tables of integral transforms, Vol. 1: Mc Graw-Hill Book Company Inc.

Grant, F.S. and West, G.F., 1965, Interpretation Theory in Applied Geophysics. McGraw Hill Book Co., New York, 584.

Heiland, C. A., 1968, Geophysical exploration: Hafner Publishing Co.

Lavin, P. M., Devanne J. F., 1970, Direct design of two dimensional wave number filters, Geophysics, 35, 1073-1078.

Cizek, V., 1970, The discrete Hilbert transform. Trans. Inst. Elect. Electron. Engrs, Au-18, 340-343.

Lindsenth, R. O., 1982, Digital processing of geophysical data: a review, P. Gepoh. Calgary, Teknica.

Mohan, N. L., Sandararajan, N., and Rao, S., 1982, Interpretation of some two dimensional magnetic bodies using Hilbert Transform: Geophysics, 47, 376-387.

Nabighian, M. N., 1984, Toward a three dimensional automatic interpretation of potential field data via generalized Hilbert transforms fundamental relations, Geophysics, 49, 780-786.

Nelson, J. B., 1988, Calculation of the magnetic gradient tensor from total field gradient measurements and its application to geophysical interpretation, Geophysics, 53, 957-966.

Pınar, R., 1984, Potansiyel alanlarda yukarı ve aşağı analitik uzanımlar, TMMOB, Madencilik, 23, 2, 5-19

Pınar, R., 1985, Karmaşık gradiyent yönteminin düşey süreksizliklere uygulanması ve bilgisayarla gerçekleştirimi, E.Ü. Bilgisayar ve Uygulama Merkezi dergisi, 8, 1, 1-16.

Rao, D. A., Babu, H. V. R., and Narayan, P. V. S., 1981, Interpretation of magnetic anomalies due to dikes: The Complex Gradient Method, Geophysics, 46, 1572-1578.

Sanver,, M-, 1974, Ege Bölgesi havadan manyetik haritasının iki boyutlu filitreler ve istatistik yöntemlerle analizi: İ-T-Ü- Maden Fakültesi (Doçentlik tezi).

Yılmaz, Ö., 1978, Refleksiyon sismolojisinde rezolüsyon ve reverberasyon problemleri, Jeofizik, 5, 2.

## **BÖLÜM 7**

### ***AYRIK FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ***

#### ***7.1 GİRİŞ***

Önceki bölümlerde, FD lerinin analitik bağıntıları verilmiştir. Oysa mühendislikte yapılan gözlemlerde ayırık/sayısal değerler elde edilir. Ayırık verilerin FD lerinin elde edilmesinde sayısal FD leri kullanılır.

#### ***7.2 SAYISALLAŞTIRILMADA, SPEKTRAL ORTAM SORUNLARI***

Gözlemlerinden elde edilen sayısal veriler, grafiğe dökülerek anlamlandırılır. Değerlendirmede verinin ilgi duyulan kısmı (veya tümü) kullanılır. Dolayısıyla çizilmiş olan sinyal, yeniden sayısallaştırılır. Verilerin ayırık olarak elde edilmesi, örnekleme kuramına (bölüm 8) uygun olarak yapılır.

Sayısallaştırılma sırasında karşılan sorunlar aşağıda verilmiştir.

##### **7.2.1. Katlanma**



**Şekil 7.1** Katlanma frekansı

### 7.2.2. Sızma (Leakage)



### 7.2.3. Çit etkisi (Picket-fence effect)

Verinin üzerinde pencere etkisinden kaynaklanan bir sorundur. Her iki ortamda pencereleme izleyen denklemlerle verilir.

$$\hat{f}(t) = f(t) \cdot p(t) \Leftrightarrow FD \Rightarrow \hat{F}(w) = F(w) * P(w) \quad (7.1)$$

“^” işareti, ayrık izi gösterir. Spektral ortamda, iz ile “sinc” işlevinin evrişimi, sınırlandırılmış verinin spektrumunu verir. Sinc işlevinin loblarından ötürü geçirim zonunda küçük bombeler oluşur. Bu olay, çit etkisidir. Aynı olgu, dizge düzenlenirken, dizge işlevinin kesilmesi nedeniyle de oluşur. Ancak oluşan bu yan salınımlarla, çit etkisi, karıştırılmamalıdır (şekil 7.2).



Şekil 7.2 Çit etkisi



### 7.3 AYRIK FOURIER DÖNÜŞÜMÜ (AFD)

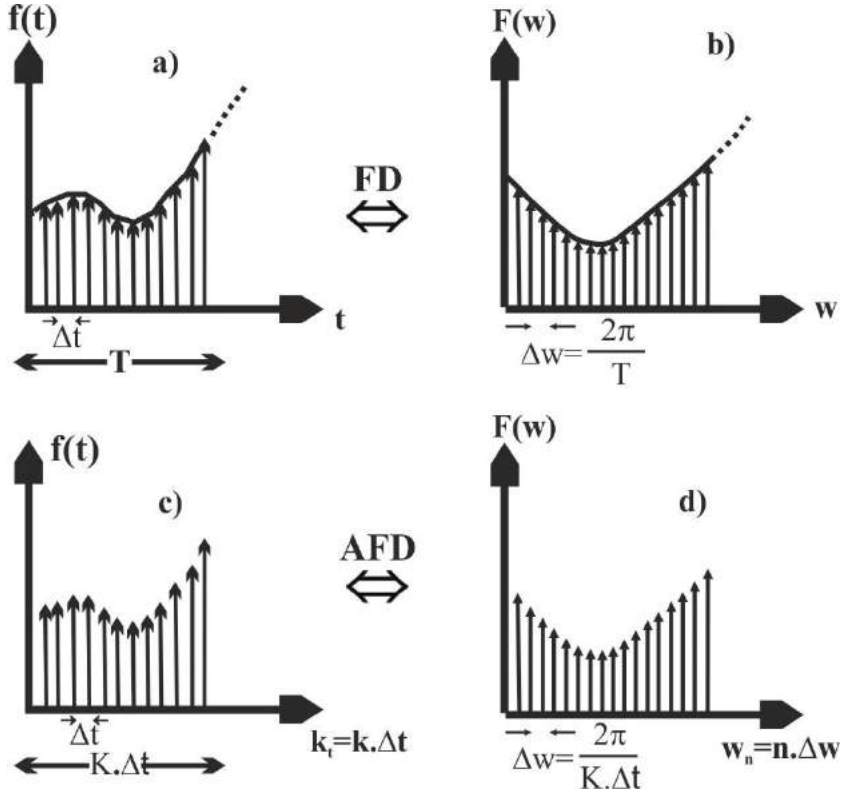
#### 7.3.1 AFD' nün elde edilmesi

Sürekli FD bağıntıları

$$F(w) = \mathfrak{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jw t} dt \quad (3.8)$$

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{jw t} dw \quad (3.9)$$

dır. Sürekli bir sinyalin sayısallaştırılması şekil 7.3 te verilmiştir.



**Şekil 7.3** Zaman ve frekans ortamlarındaki sürekli ve ayırık sinyaller  
**a)** Zaman ortamı sürekli izi **b)** sürekli izin spektrumu **c)** Ayırık zaman ortamı sinyali **d)** Ayırık sinyalin spektrumu

Şekil 7.3 te gösterilen parametreler aşağıda tanımlanmıştır.

T : sürekli sinyalinin boyu/uzunluğu

$\Delta w$ : frekans ortamı örnekleme aralığı

$$\left[ \Delta w = \frac{2\pi}{T} (\text{açısal frek.}), \Delta f = \frac{1}{T} (\text{çizgisel frek.}) \right]$$

K: zaman ortamı, ayırık sinyalin nokta sayısı

$\Delta t$ : örnekleme aralığı ( $\Delta t = T/K$ )

k : zaman ortamı sayacı

$k_t$ : zaman ortamı yatay eksen

N: frekans ortamındaki, ayırık, harmoniklerin sayısı

n : frekans ortamı sayacı

Yukarıdaki tanımlara göre; zaman ortamı, ayırık izin boyu " $T=K.\Delta t$ ", frekans ortamı örnekleme aralığı " $\Delta w=2\pi/(K.\Delta t)$ " dır. AFD alınırken, genelde, zaman ortamı örnek sayısı ile frekans ortamındaki harmonik sayısı eşit alınır (bkz. örnek 7.3). Bu koşulda, " $N=K$ " dır.

(3.8) bağıntısındaki "t" zaman, "w" frekans ortamı bağımsız değişkenleridir. Ayırık gösterimde ise " $t_k$ " ve " $w_n$ " olarak kullanılmışlardır. Bu koşulda (3.8) eşitliğindeki üstel terim,

$$-j\omega t = -j.n.\Delta w.k.\Delta t$$

$$\Delta w = \frac{2\pi}{K.\Delta t}$$

$$-j.n.\Delta w.k.\Delta t = -j.n.k.\frac{2\pi}{K.\Delta t}\Delta t$$

$$-j\omega t = -j.n.k.\Delta w.\Delta t = -j.2\pi.\frac{n.k}{K}$$

olarak elde edilir. (3.8) bağıntısında yerine yazılır ve tümlev, toplam ile yer değiştirirse, FD denklemini,

$$F(n) = \mathfrak{F}[f(k)] = \sum_{k=0}^{K-1} f(k)e^{-j.2\pi\frac{n.k}{K}} \quad (7.2)$$

bulunur. Benzer biçimde, TFD eşitliği de elde edilir.

$$f(k) = \mathfrak{F}^{-1}[F(n)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(n)e^{j.2\pi\frac{n.k}{K}} \quad (7.3)$$

(7.2) ve (7.3) bağıntıları simgesel olarak

$$f(k) \Leftarrow \mathfrak{F} \Rightarrow F(n), \quad F(n) = \mathfrak{F}[f(k)], \quad f(k) = \mathfrak{F}^{-1}[F(n)]$$

gösterilir. Verilen bağıntılar kullanılarak düz ve ters Fourier dönüşümü alan program, Ek Pr1 de verilmiştir.

### 7.3.2 AFD dizeyi

(7.2) de “ $e^{-j2\pi/K} = W$ ”, “ $F_n = F(n)$ ” ve “ $f_k = f(k)$ ” olarak gösterilirse,

$$F_n = \sum_{k=0}^{K-1} f_k \cdot W^{(nk)} \quad (7.4)$$

elde edilir.

(7.4) bağıntısındaki “W” katsayı dizeyidir. Frekans ortamı bağımsız değişkeni “w” ile ilişkisi yoktur. Son eşitlik dizey biçiminde yazılarak,

$$\begin{matrix} [F_n] = [W^{(nk)}] \cdot [f_k] & n = 0,1,2,\dots,N-1 \\ (n.1) & (n.k) & (k.1) & k = 0,1,2,\dots,K-1 \end{matrix} \quad (7.5)$$

bulunur. (7.5) bağıntısında n = satır, k = kolondur. nk = L ise “W” nın üstel terimidir.

$$W^L = e^{-\frac{2\pi j}{N}L} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}L\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N}L\right) \quad (7.6)$$

Örnek olarak, “N=8” için “W<sup>L</sup>” değerlerini aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$W^{L=0} = \cos(0) - j \sin(0) = 1$$

$$W^{L=1} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{(2)^{1/2}}{2} \Rightarrow W^{L=1} = \frac{(2)^{1/2}}{2} - j \frac{(2)^{1/2}}{2}$$

Evre ve genlik  $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$   $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$  eşitliklerinden,

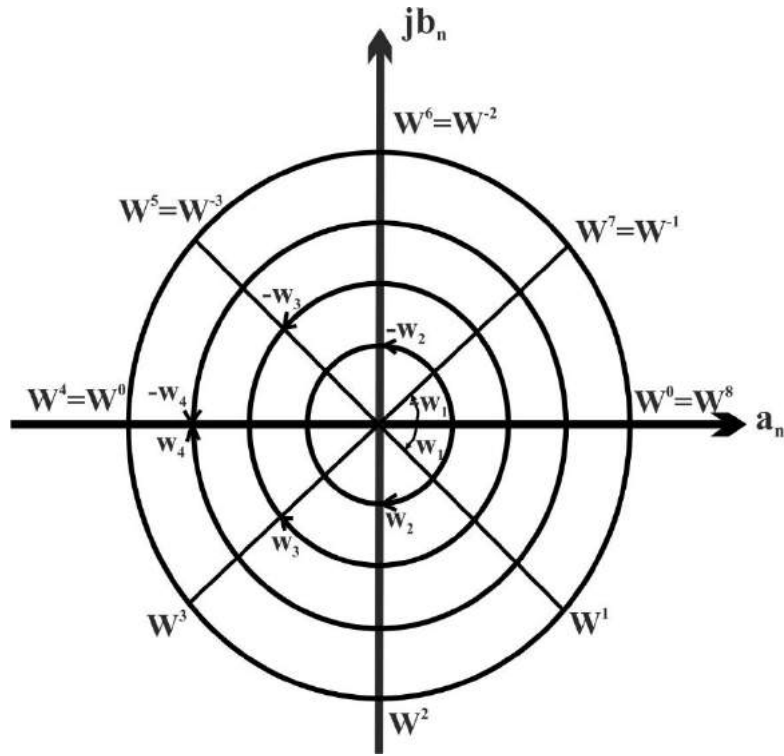
$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{(2)^{1/2}/2}{(2)^{1/2}/2}\right], \quad \phi = \tan^{-1}(1), \quad \phi = 45^\circ = \pi/4$$

$$r = (2/4 + 2/4)^{1/2} = 1 \quad (\text{birim})$$

bulunur. Söz konusu hesaplamalar L, “0” dan başlayarak “7” ye kadar (toplam 8 değer) yapılarak “W” nın kuvvetleri elde edilir (şekil 7.4). Şekil 7.4 ten “w<sub>4</sub>” frekansına göre “W<sup>L</sup>” ve “W<sup>-L</sup>” gerçel eksene göre bakışıktır. Bu nedenle “W<sup>L</sup>(L>N/2)” değerleri, karmaşık eşleniktir. Şeklin, gerçel eksene göre bakışık olduğu “w<sub>4</sub>” frekansı katlanma frekansıdır (N/2=8/2=4).

(7.4) bağıntısı kullanılarak, FD leri dizey biçiminde hesaplanabilir.

(7.7) bağıntısı, N=K=8 alınarak (7.4) dizeyinin yazılmış biçimidir.



Şekil 7.4  $e^{-j2\pi/K}$  bağılı olarak “W” dizeyinin birim çember üzerindeki değişimi ( “W” dizey, “w” açısıl frekanslardır).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{n} \\ \downarrow \\ \text{(satr)} \end{array} \\
 \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{k (kolon)} \\ \rightarrow \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{katlanma} \\ \text{ekseni} \\ \nearrow \end{array} \\
 \begin{bmatrix}
 W^{0(0,0)} & W^{0(0,1)} & \dots & W^{0(0,7)} \\
 W^{0(1,0)} & W^{1(1,1)} & \dots & W^{7(1,7)} \\
 W^{0(2,0)} & W^{2(2,1)} & \dots & W^{6(2,7)} \\
 W^{0(3,0)} & W^{3(3,1)} & \dots & W^{5(3,7)} \\
 W^{0(4,0)} & W^{4(4,1)} & \dots & W^{4(4,7)} \\
 W^{0(5,0)} & W^{5(5,1)} & \dots & W^{3(5,7)} \\
 W^{0(6,0)} & W^{6(6,1)} & \dots & W^{2(6,7)} \\
 W^{0(7,0)} & W^{7(7,1)} & \dots & W^{1(7,7)}
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \quad (7.7)$$

### 7.3.3 Hızlı Ayırık Fourier dönüşümü (HAFD)

Bölüm 7.3.1 ve 7.3.2 de verilen FD yöntemleri, uzun verilerde çok zaman alır. Gerçi, günümüz bilgisayarlarının çok hızlı olmasından ötürü zaman yitimi azalmıştır.

7.7 bağıntısı kullanılarak, alınan FD de  $N^2$  çarpma,  $N(N-1)$  toplama yapılır. Örneğin 8 nokta için 64 çarpma, 56 toplama işlemi yapılır. İşlem sayısının azaltılması için (7.7) dizeyinde, düzenlemeler yapılarak algoritmalar geliştirilmiştir. HAFD algoritmaları, zaman ve frekans içinde kümelenme yöntemleriyle çözülür.

### 7.3.4 Frekans içinde kümelenme yöntemi

(7.7) bağıntısında aşağıda verilen düzenlemeler yapılarak algoritma oluşturulur. (7.7) eşitliği, bir düzey çarpımıdır.

$$\begin{array}{r}
 \text{k (kolon)} \rightarrow \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & 7 \end{array} \\
 \begin{array}{l} F_0 = f_0 + W^0f_1 + W^0f_2 + \dots + W^0f_7 \\ F_1 = f_0 + W^1f_1 + W^2f_2 + \dots + W^7f_7 \\ F_2 = f_0 + W^2f_1 + W^4f_2 + \dots + W^6f_7 \\ F_3 = f_0 + W^3f_1 + W^6f_2 + \dots + W^5f_7 \\ F_4 = f_0 + W^4f_1 + W^0f_2 + \dots + W^4f_7 \\ F_5 = f_0 + W^5f_1 + W^2f_2 + \dots + W^3f_7 \\ F_6 = f_0 + W^6f_1 + W^4f_2 + \dots + W^2f_7 \\ F_7 = f_0 + W^7f_1 + W^6f_2 + \dots + W^1f_7 \end{array} \\
 \begin{array}{l} n \\ \text{(sattır)} \end{array} \downarrow
 \end{array} \quad (7.8)$$

0. kolonun elamanları, 1. kolonun elamanlarına eklenir.

$$\begin{array}{l}
 f_0 + W^0f_1 \\
 f_0 + W^1f_1 \\
 f_0 + W^2f_1 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 f_0 + W^7f_1
 \end{array}$$

0. kolon elemanları 2. kolonun elemanlarına, 0. kolon elemanları 3. kolonun elemanlarına eklenir. Dizey çarpımı nedeniyle

$$\begin{array}{l} W \text{ nın 1. kolonu } f_1 \text{ ile ,} \\ W \text{ nın 2. kolonu } f_2 \text{ ile ,} \\ \cdot \quad \quad \quad \vdots \\ \cdot \quad \quad \quad \vdots \\ W \text{ nın 7. kolonu } f_7 \text{ ile} \end{array}$$

çarpılır. Birinci kolonun elemanları;

$$W^0 f_1, W^1 f_1, W^2 f_2, \dots, W^{(N/2)} = W^4 = -W_0 = -1$$

dir ve  $W^{N/2}$  ye göre bakışıktır.  $W, W^{N/2}$  den sonrası için karmaşık eşleniktir. Bu nedenle yalnızca  $W^0 f_1, W^1 f_1, W^2 f_2, W^3 f_3$ , değerlerini hesaplamak yeterlidir.

Aynı işlem  $N/2$  den sonra olan satırlar içinde (4,5,6,7. satırlar) sürdürülür.

$$\begin{array}{l} W^4 f_1 = -W^0 f_1 \quad , \quad W^5 f_1 = \overline{W^3 f_1} \\ W^6 f_1 = \overline{W^2 f_1} \quad , \quad W^7 f_1 = \overline{W^1 f_1} \end{array}$$

Son eşitlikte, üstteki çizgiler karmaşık eşleniği gösterir.

Buraya dek anlatılanlar 2. kolon için de gerçekleştirilir. Söz konusu işlem yalnızca " $W^0 f_2$ " ve " $W^2 f_2$ " değerlerini için yapılacaktır. Çünkü;

$$W^4 f_2 = -W^0 f_2 \quad , \quad W^6 f_2 = \overline{W^2 f_2}$$

dir. Yukarıda verilen işlemler, aşağıdaki adımlar kullanılarak, hesaplama aşamasında, kolaylık sağlanır.

1. Zaman artışları "k", frekans artışları "n" ve tam zaman aralığı "T" ile gösterilir.
2. (7.6) bağıntısından yararlanarak " $L=0,1,2,.., N-1$ " değerleri için " $W^L$ " hesaplanır.
3. Her bir " $f_0$ " değeri kullanılarak " $F_0, F_1, \dots, F_{N-1}$ " denklemleri oluşturulur [(7.8) denklemlerinin sıfıncı kolonu].
4. (7.7) denklemindeki "W" dizeyinin elemanları, "n" satır, "k" kolon sayısı olarak ve "k=1" den başlayarak "n = 0,1,2, ..., N-1" için "L"

değerleri hesaplanır. “W”, uygun “f<sub>k</sub>” ile çarpılır. İlk “L” değerlerinin sıfır olmasına uygun olarak (7.7) dizeyinin sıfıncı kolonundaki “W” nın kuvvetleri sıfırdır. “L= N/2” olduğunda “W<sup>f</sup>” karmaşık eşlenikleri “W<sup>N/2</sup>” ye göre bakışık olduğu önceki değerlerden elde edilir. “L=0” ise “W<sup>f</sup>” yinelenir.

5. 4. adımda hesaplananlar, “F<sub>0</sub>, F<sub>1</sub>,...,F<sub>N-1</sub>” in bulunan değerlerine eklenir.

6. 4. ve 5. Adımlar “k=2,3,...,N-1” için yinelenir.

“F” ler, karmaşık sayılardan bulunur. “F<sub>i</sub>” elemanlarının açısıl frekansı “w=iΔw (i = 0,1,2,...,n)” bağıntısına uygun olarak elde edilir. Son olarak, “F<sub>N/2</sub> (= F<sub>4</sub>, N=8 için)” ye göre “F” in bakışık olmasından dolayı (7.7) bağıntısındaki kolon dizeyinin karmaşık eşleniğidir.

$$F_5 = \overline{F_3} \quad , \quad F_6 = \overline{F_2} \quad , \quad F_7 = \overline{F_1}$$

Dolayısıyla ”F” in “F<sub>N/2</sub>” den sonrası için hesaplanması gereksizdir. (7.7) dizeyinde hesaplanan “F<sub>2</sub>” ve “F<sub>6</sub>” değerleri aşağıda verilmektedir.

$$F_2 = \underline{W^0 f_0} + \underline{W^2 f_1} + \underline{W^4 f_2} + \underline{W^6 f_3} + \underline{W^0 f_4} + \underline{W^2 f_5} + \underline{W^4 f_6} + \underline{W^6 f_7} + \underline{W^2 f_7} \quad (7.9)$$

$$F_6 = \underline{W^0 f_0} + \underline{W^6 f_1} + \underline{W^4 f_2} + \underline{W^2 f_3} + \underline{W^0 f_4} + \underline{W^6 f_5} + \underline{W^4 f_6} + \underline{W^2 f_7} \quad (7.10)$$

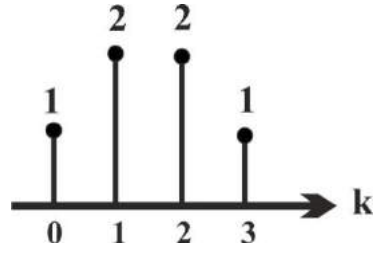
Altı çizgili olanlar, “W<sup>0</sup>=-W<sup>4</sup>=1” olmasından ötürü gerçel değerlerdir. Şekil 7.4 ten “W<sup>2</sup>” ve “W<sup>6</sup>”, birbirilerinin karmaşık eşleniğidir. Karmaşık eşleniğin anlamı, sanal eksen (düşey eksen) eşlenik demektir. Gerçel eksen eşlenik olması ise yalnızca “eşlenik” terimiyle nitelendirilir. Şekil 7.4 ten, “W<sup>0</sup>” ve “W<sup>4</sup>” gerçeldirler ve gerçel eksen eşleniktirler (denklem (7.10) da, altı çizili olanlar).

Cooley ve Tukey tarafından geliştirilen, “NLOGN” programı Ek Pr2 de verilmektedir. Bu program kullanılırken, veri sayısı, 2<sup>N</sup> olarak alınmalıdır. Yani veri sayısı, “2” nin kuvvetleri (N=3 için 2<sup>3</sup>=8, N=5 için 2<sup>5</sup>=32 adet veri) olarak verilir. Eğer veri sayısı, “2” nin kuvvetinden daha az ise, veri sonuna “0” değerleri koyularak, veri sayısı “2<sup>N</sup>” e tamamlanır. Örneğin, 30 adet veri varsa, “N=5” yazılır, veri sonuna 2 adet “0” eklenerek veri sayısı 32’ ye tamamlanır.

Tamamlamanın spektral işlemlerde hiçbir etkisi yoktur. Genlik ve  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{K\Delta t}$  evrede değişikliğe yol açmaz. Ancak, frekans ortamı ayrık izin örnekleme aralığı “ $\Delta\omega=2\pi/(K.\Delta t)$ ” olmasından ötürü “ $\Delta\omega$ ” çok küçülür.

### **Örnek 7.1**

Sayısal değerleri [1,2,2,1] olan izin, AFD nü alınız (şekil 7.5).



Şekil 7.5 Ayrık iz

### ***Çözüm***







Harmonikler	Gerçel	Sanal	Karmaşık sayı	Genlik spektrumu
0	6	0	6,0	6
1	-1	-1	-1,-j	1.41
<b>2</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
3	1	1	-1,j	1.41

**Çizelge 7.1** Verilen izin harmonikleri.

Çizelge 7.1 de katlanma 2. harmonik te oluşmuştur (koyu satır). Sıfırıncı harmonik, FD alınacak tüm sayısal değerlerinin toplamıdır. Sıfırıncı harmonikte, sanal kısım yoktur. Kullanılan algoritmalarda, bu özellik, algoritmaları kontrol olarak kullanılabilir. Ancak, uzun sayı dizilerinde, tüm verilerin sayısal olarak toplanmasından ötürü, sıfırıncı harmonik, çok büyük değerlere ulaşır. Bu değer, veri sayısına bölünerek veya başka yöntemlerle (normalleştirme, vb) küçültülür.

Çözülen bu örnekte ve Ek3 Pr1 de verilen programda harmonik sayısı, veri sayısına eşit olarak alınmıştır. Veri ve harmonik sayılarının eşit alınması koşulunda, FD nedeniyle herhangi bir enerji kaybı oluşmaz.

Parseval kuramına göre (Bkz Bölüm 4.3.1) her iki ortamdaki enerjilerinin eşit olması gerekir. Böylece kullanılan FD yönteminin sağlığı hakkında karar verilebilir. Enerjiler yönünden,

$$\sum_{k=0}^{K-1} f^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F^2(n) \quad \text{olmalıdır.}$$

Zaman ortamında

$$\sum_{k=0}^3 f^2(k) = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 = 10 \quad \text{dır.}$$

Frekans ortamında,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F^2(n) = \frac{1}{4} [F^2(0) + F^2(1) + F^2(2) + F^2(3)]$$

$$F^2(0) = 6^2 = 36$$

$$F^2(1) = (-1 - j)^2 = 1 + 2j + j^2 = 2j$$

$$F^2(2) = 0$$

$$F^2(3) = (-1 + j)^2 = 1 - 2j + j^2 = 2j$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F^2(n) = \frac{1}{4} (36 + 2 + 0 + 2) = \frac{40}{4} = 10 \quad \text{dır.}$$

Zaman ve frekans ortamlarında hesaplanan enerjiler eşittir. Kullanılan çözüm yöntemi sağlıklıdır.

### **Örnek 7.2**

Örnek 7.1 de verilen [1,2,2,1] izin AFD nü dizey yöntemi kullanarak bulunuz.

### **Çözüm**

Çözümde, frekans ve zaman ortamlarındaki nokta sayıları eşit alınır (K=N=4).

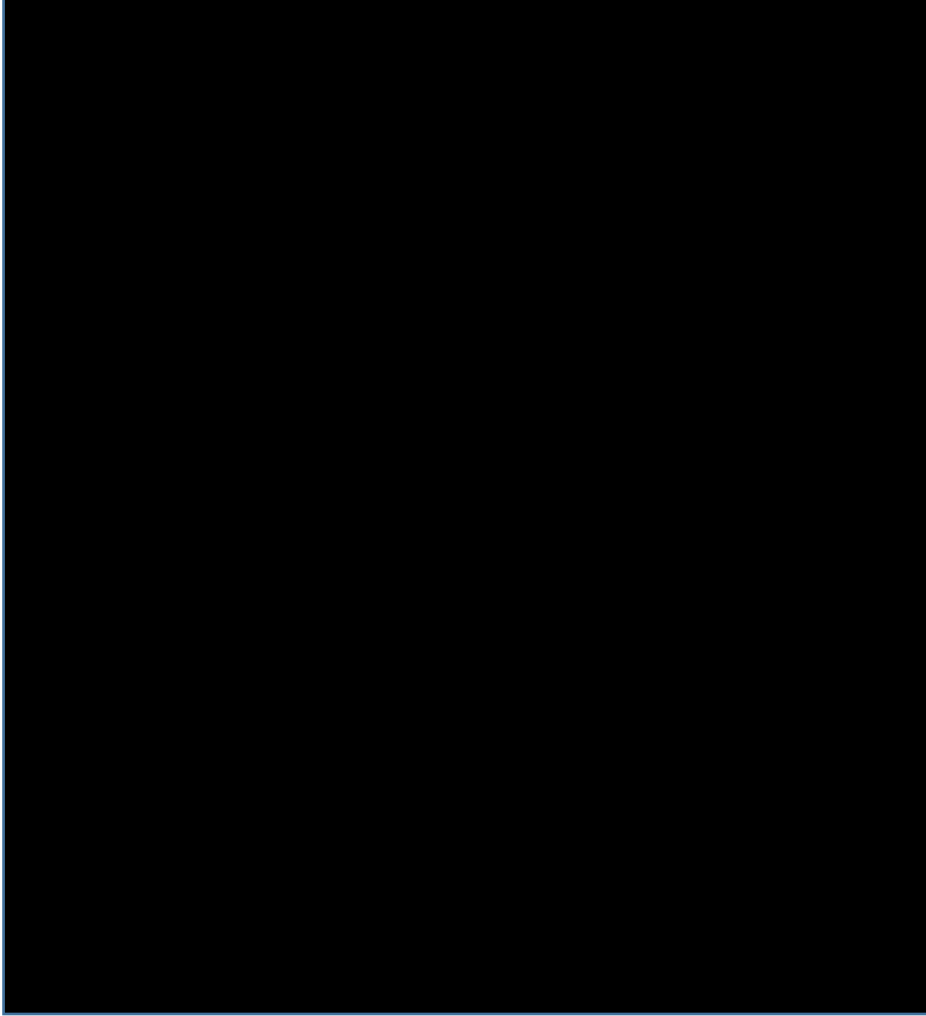
$$\Delta t = T/K = 4/4 = 1$$

Zaman adımları	Zaman (t)	İşlev f(t)
0	0	1
1	1	2
2	2	2
3	3	1

Çizelge 7.2 Ayrık değerler

1.

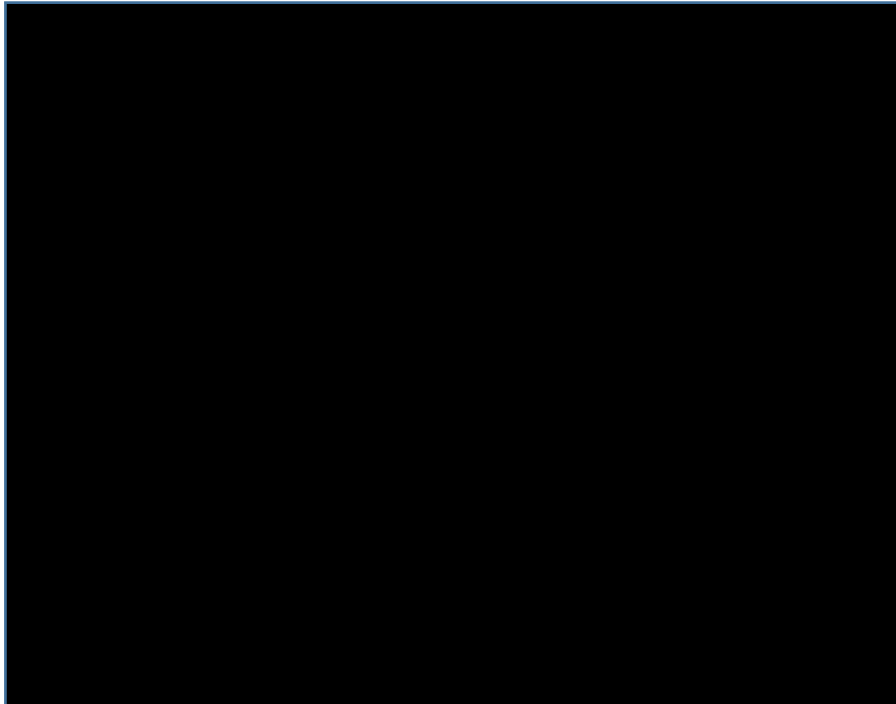
$$W^L = \cos\left(\frac{2\pi}{N}L\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N}L\right) \quad (7.6) \text{ dan } "W^L" \text{ değerleri bulunur.}$$

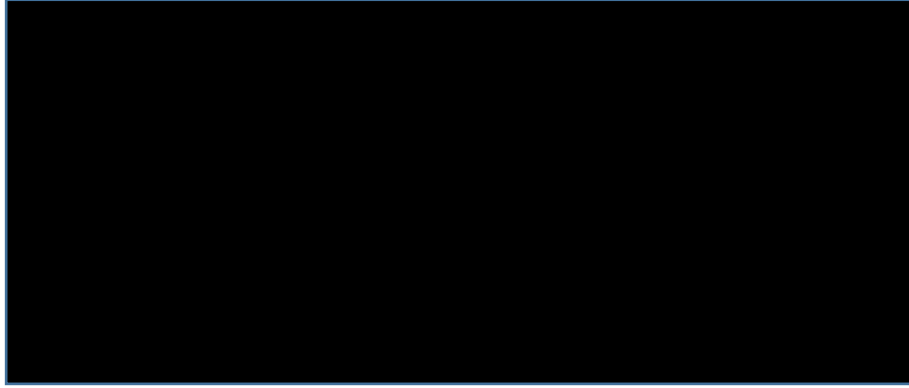




2. (7.7) dizeyi oluşturulur.

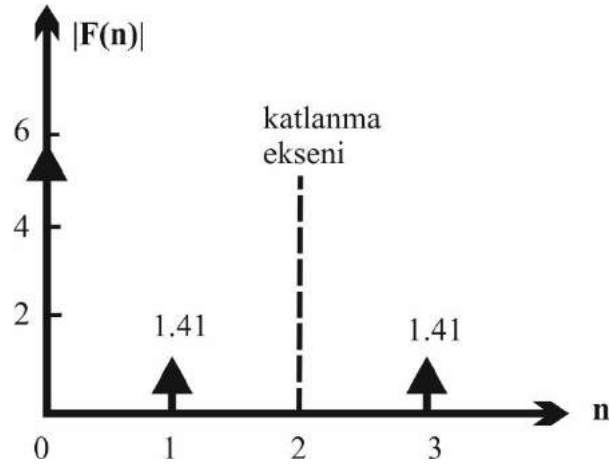
$$\begin{array}{c} \mathbf{k} \longrightarrow \\ \mathbf{n} \downarrow \end{array} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{0(0,0)} & W^{0(0,1)} & W^{0(0,2)} & W^{0(0,3)} \\ W^{0(1,0)} & W^{1(1,1)} & W^{2(1,2)} & W^{3(1,3)} \\ W^{0(2,0)} & W^{2(2,1)} & W^{2(2,2)} & W^{6(2,3)} \\ W^{0(3,0)} & W^{3(3,1)} & W^{6(3,2)} & W^{7(3,3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$





Frekans adımı $n$	Açısal frekans $\omega_n = n\Delta\omega$	Gerçel $F$ ( $a_n$ )	Sanal ( $b_n$ )	Genlik $ F $
0	0	6	0	6
1	1.5708	-1	-1	1.4142
2	3.1416	0	0	0
3	4.7124	1	1	1.4142

Çizelge 7.3 Toplu sonuçlar



Şekil 7.6 1,2,2,1 izinin genlik spektrumu

### Katsayı dizeyinin özellikleri

Elde edilen dizeyin önemli özellikleri vardır. Bu özellikler kullanılarak dizey katsayıların hesaplanmasında, işlemler azaltılır.

1. “N/2 (=4/2=2)” de yani “F<sub>2</sub>” de katlanma oluşur.
2. Katlanma eksenindeki katsayıların hepsi “1” dir ve toplamları sıfır olmak zorundadır.
3. Kullanılan dizeyin özelliğinden (N=4 için) (7.7) dizeyinin katsayıları, bu problem için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{0(0,0)} & W^{0(0,1)} & W^{0(0,2)} & W^{0(0,3)} \\ W^{0(1,0)} & W^{1(1,1)} & W^{2(1,2)} & W^{3(1,3)} \\ W^{0(2,0)} & W^{2(2,1)} & W^{4(2,2)} & W^{6(2,3)} \\ W^{0(3,0)} & W^{3(3,1)} & W^{6(3,2)} & W^{1(3,3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

“W<sup>0</sup>=1” olduğundan daima “0.” satır ve “0.” kolonun tüm değerleri “1” dir. Katlanma eksenini üzerindeki ilk katsayılar da “+1” olmak zorundadır [W<sup>0(1,0)</sup>=1, W<sup>0(0,2)</sup>=1]. Bu nedenle yalnızca “W<sup>1(1,1)</sup>” katsayısı (-j) hesaplanarak, tüm katsayılar, yukarıda verilen dizeydeki gibi, atamalar yapılarak bulunabilir.



Bu dizeyin “0.” kolon ve satırının tüm değerleri “1” olmak zorundadır. Gösterilen eksenler de katlanma eksenleri olduğundan kat sayı dizeyi kolaylıkla yazılır.

---

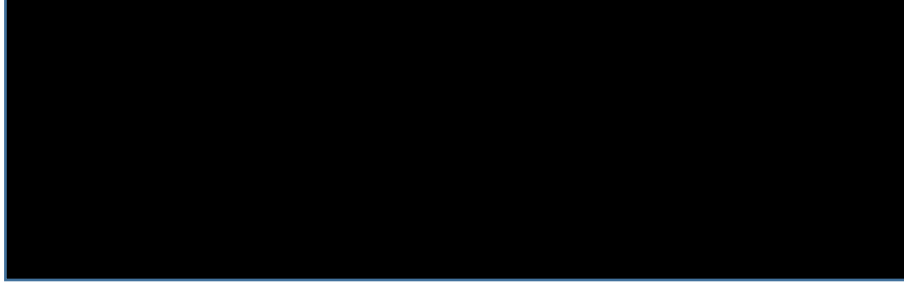
**Not:** Karmaşık eşlenik olanlar (sanal eksende, burada düşey eksen) katlanırken -1 ile çarpılır.

---

4. Eğer N=6 olsaydı,

$$N/2 = 6/2 = 3$$

n=3. kolon ve satırına göre katlanacaktır. O zaman katsayı dizeyi aşağıdaki gibi oluşturulur.



---

**Not:**  $\overline{W}$  eşleniği gösterir.  $(a + jb)^* = (a - jb)$  dir.

---

### **Örnek 7.3**

Spektral ortamda ayırık değerleri  $[6, (-1, -j), 0, (-1, j)]$  olan sinyalin zaman ortamındaki değerlerini, her iki ortamdaki nokta sayılarını eşit alarak, bulunuz (zaman ortamında verilen örnek 7.1 in ters dönüşümü olduğuna dikkat ediniz).

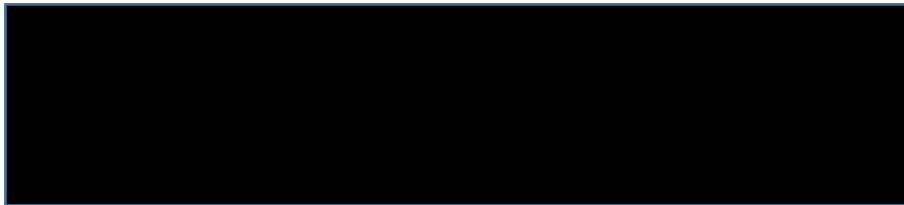
#### **Çözüm**

Frekans ortamından, zaman ortamına dönmek için (7.3) denklemi kullanılır.

$$f(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(n) e^{j2\pi nk/K} \quad (7.3)$$

$f(k) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 F(n) e^{j2\pi \frac{nk}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 F(n) e^{j\pi \frac{nk}{2}}$  Bu problemde  $N=4$  dür. Çözümde Euler denklemi,  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$  yaralanarak yazılır.

k=0 için 1. ayırık değer



k=1 için 2. ayrık değer



k=2 için 3. ayrık değer



k=3 için 4. ayrık değer



Euler bağıntılarından

$e^{j\pi/2}=j$ ,  $e^{j3\pi/2}=-j$ ,  $e^{j\pi}=-1$ ,  $e^{j3\pi}=-1$ ,  $e^{j9\pi/2}=j$  dır.

#### **Örnek 7.4**

2 boylu, [1,2] izinin, 5. harmoniğe kadar gerçel, sanal bileşenlerini, genlik ve evre spektrumunu hesaplayarak çiziniz.

***Çözüm***

$$F(n) = \sum_{k=0}^{K-1} f(k) e^{-j2\pi nk/K}$$







1. harmonik  $\Rightarrow F(0)=3$
2. harmonik  $\Rightarrow F(1)=1+2(-1)=-1$
3. harmonik  $\Rightarrow F(2)= 1+2(1)=3$
4. harmonik  $\Rightarrow F(3)= 1+2(-1)=-1$
5. harmonik  $\Rightarrow F(4)= 1+2(1)=3$

**ÖNEMLİ SONUÇ:** ilk 2 harmonik, daha sonraki harmoniklerde yinelenmektedir. Bu nedenle veri sayısı kadar harmoniğin hesaplanması yeterlidir.

Genlik spektrumu,

$$|F(w)| = \sqrt{Ger^2[F(w)] + San^2[F(w)]}$$

dır. Bu problemde, daima,  $San[F(w)]=0$  dır.

$$F_1(w)=3, F_2(w)=1, F_3(w)=3, F_4(w)=1 \dots\dots\dots$$

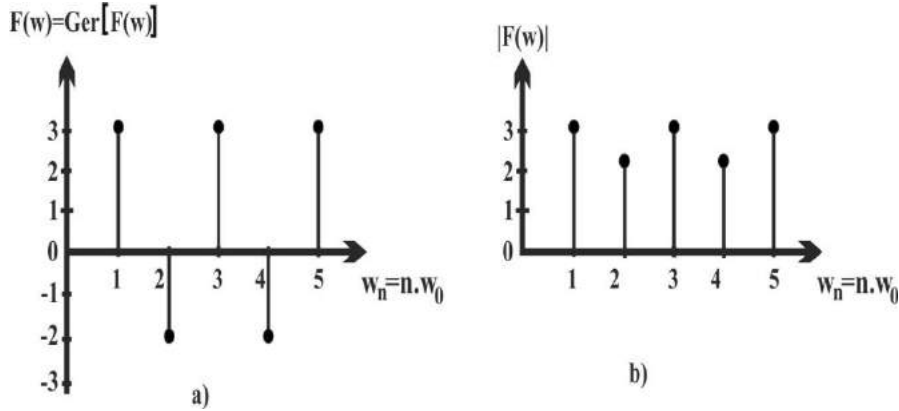
Evre spektrumu

$$\Phi(w) = -tg^{-1} \frac{San[F(w)]}{Ger[F(w)]} = 0 \text{ dır.}$$

dır. Elde edilen sonuçlar çizelge 7.4, şekil 7.7 de verilmiştir.

HARMONİKLER	GERÇEL	SANAL	GENLİK SPEK.	EVRE SPEK.
1	3	0	3	0
2	-1	0	1	0
3	3	0	3	0
4	-1	0	1	0
5	3	0	3	0

**Çizelge 7.4** Toplu sonuçlar

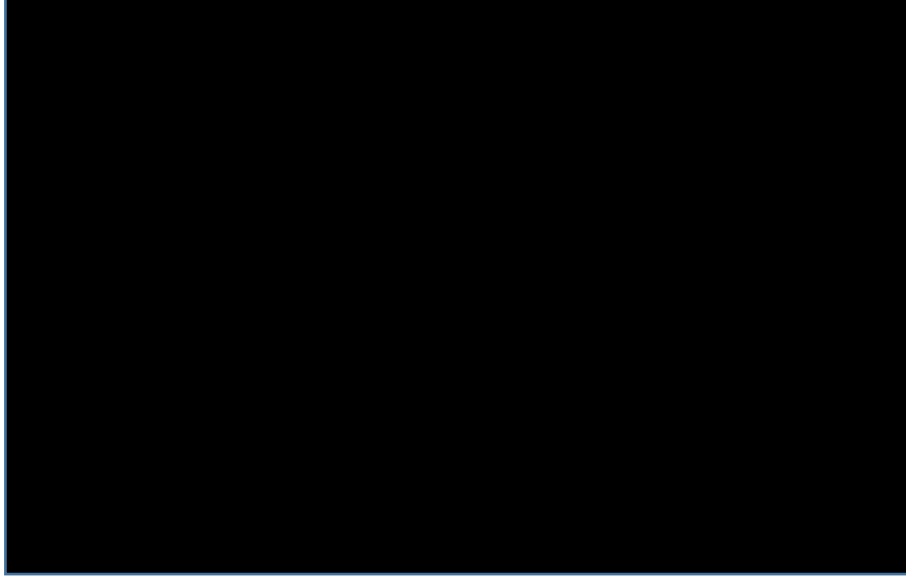


**Şekil 7.7** [1,2] izinin **a)** gerçel bileşeni (veya spektrum) **b)** genlik spektrumu

### Örnek 7.5

- a) Ayrık bir izin frekans ortamı örnekleme aralığı  $\Delta\omega=0.0628$  Hz. olması için zaman ortamındaki boyu ne olmalıdır.
- b)  $\Delta t=1$  sn ise iz, kaç ayrık değerden oluşmuştur?
- c) Harmonik ve zaman ortamı veri sayılarını eşit alarak göre ayrık izin katlanma frekansını (açısal frekans cinsinden) bulunuz.

### Çözüm

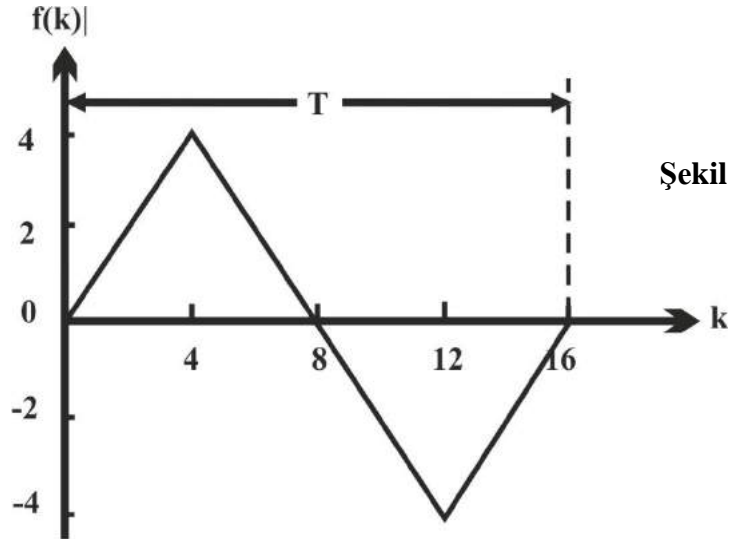


### Örnek 7.6

Şekil 7.8 de verilen izin AFD bulunuz.

### Çözüm

$K=16$ ,  $N=16$ ,  $T=16$  dir.  $\Delta T=T/K \Rightarrow K=1$



Şekil 7.8 Ayrık iz

Verilen izin analitik bağıntısının FS kullanılarak elde edilmesi örnek 2.23 te verilmiştir. Söz konusu analitik bağıntı,

$$f(t) = \frac{32}{\pi^2} \left[ \sin(\omega t) - \frac{1}{3^2} \sin(3t) + \frac{1}{5^2} \sin(5t) - \frac{1}{7^2} \sin(7t) \dots \dots \dots \right]$$

dır.

1. (7.6) bağıntısından yararlanarak  $L=nk$  dan  $W^L$  değerleri saptanır. Elde edilen değerler karmaşık ortamda çizilerek karmaşık kökler bulunur.
2. (7.7) dizeyi oluşturulur.
3. Frekans ortamındaki örnekleme aralığı ve frekans adımları hesaplanır.

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N} = \frac{T}{K} = \frac{2\pi}{16} = 0.392699$$

$$\omega_i = i \Delta\omega \quad i = 0,1,2,\dots,\dots,n$$

$$\omega_0 = 0$$

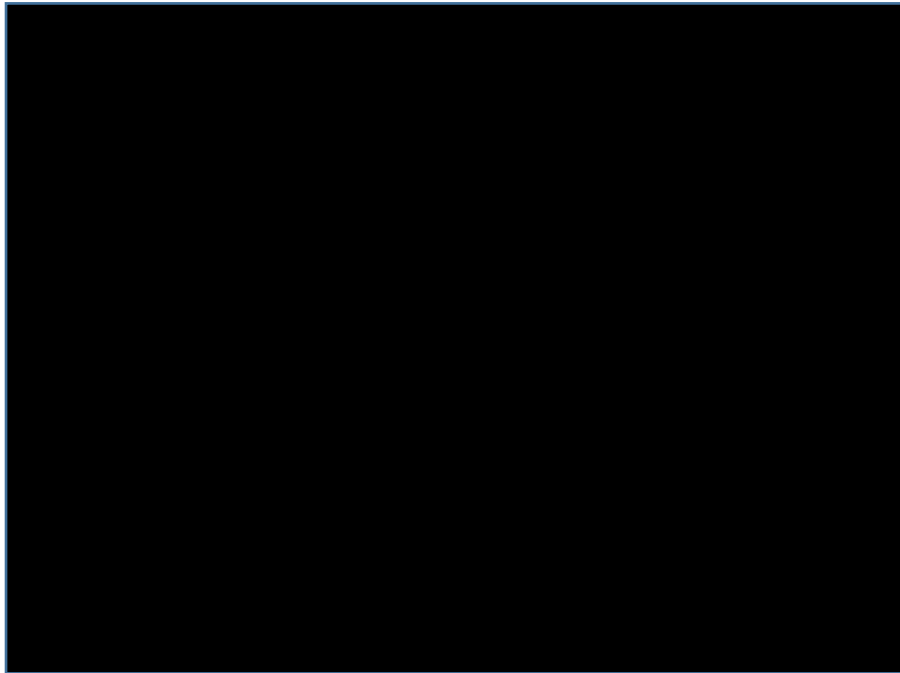
$$\omega_1 = 0.3927$$

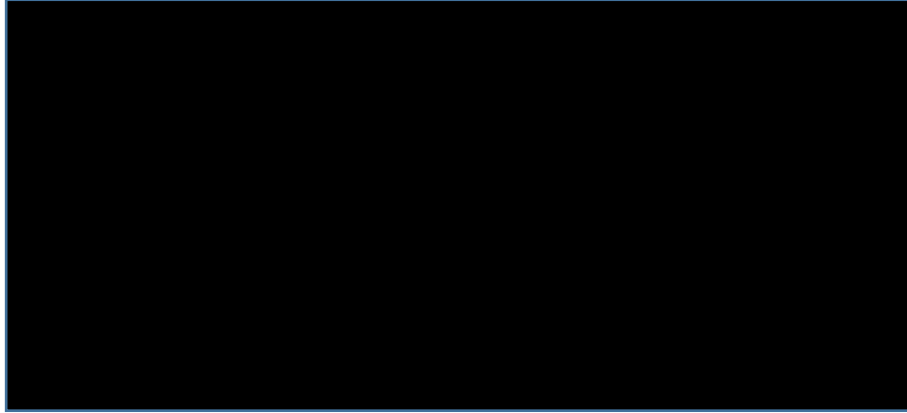
$$\omega_2 = 2 \cdot 0.3927 = 0.7854$$

---

**Not:** W: ayrık Fourier dizeyi, w: açısal frekanstır.

---





$f(t) = 3.2842\sin(w_1t) - 0.4050\sin(w_3t) + 0.1808\sin(w_5t) - \dots$   
elde edilir. Elde edilen işlev, bu örneği başında verilen işlevden fazla farklı değildir. Bu nedenle çözüm kabul edilebilir.

Zaman (t)	İşlev f(t)	Frekans adımları	w	a <sub>n</sub>	b <sub>n</sub>	F
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0.3927	0	-4.1817	4.1817
2	2	2	0.7854	0	0	0
3	3	3	1.1781	0	0.5156	0.5156
4	4	4	1.5708	0	0	0
5	3	5	1.9635	0	-0.2302	0.2302
6	2	6	2.3562	0	0	0
7	1	7	2.7489	0	0.1655	0.1655
<b>8</b>	<b>0</b>	<b>8</b>	<b>3.1416</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
9	-1	9	3.5343	0	-0.1655	0.1655
10	-2	10	3.9270	0	0	0
11	-3	11	4.3197	0	0.2302	0.2302
12	-4	12	4.7124	0	0	0
13	-3	13	5.1051	0	-0.5156	0.5156
14	-2	14	5.4978	0	0	0
15	-1	15	5.8905	0	4.1817	4.1817

**Çizelge 7.5** Verilen sinyalin zaman ve frekans ortamlarındaki ayırık değerleri

## ÖDEVLER

1. Çizelge 7.4 ü elde etmek için katsayı dizeyini kurunuz, gerekli çözümleri yapınız.
2. Örnek 8.1 de spektrum ortamında elde edilen  $F(n)=6,-1-j,0,-1+j$  sinyalinin zaman ortamındaki sayısal değerlerini bulunuz.

## KAYNAKÇA

Cooley, J. S., and J. W. Tukey, (1965), An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, Math. Computation 19, 297-301.

## Ek Pr1

```
C **FOURIER DONUSUMU PROGRAMI**
  DIMENSION FC(1000),FS(1000)
  COMPLEX XCOM(1000)
C *****
C ISEC: 1 DUZ FD., -1 TERS FD.
C N: NOKTA SAYISI
C VERILERIN OKUTULMASI: VERILER ASAGIDAKI SIRA ILE
C OKUTULMALIDIR.
C 1) ISEC, N (AYNI SATIRDA)
C 2) GERCEL BILESEN (FC), SANAL BILESEN (FS) (AYNI SATIRDA, ALT
C ALTA)
C ZAMAN OTAMINDA SANAL SAYI GIRILMESINE GEREK YOKTUR
C FR. ORTAMINDA SANAL BILESEN YOKSA SIFIR VERILMELIDIR.
C 3) ORNEKLEME ARALIGI VERILMELIDIR (YOKSA "1" GIRILMELIDIR)
```

C TFD.  
C ALINIRKEN GEREK YOKTUR.  
C \*\*\*\*\*ZAMANDAN FREKANS (DUZ FD)\*\*\*\*\*  
C F DIZISI: DUZ FD. ALINACAK DIZI  
C KATLANMA FREKANSINA KADAR OLAN HARMONIKLER  
C HESAPLANIR  
C BULUNAN FREKANS DEGERLERI ACISAL FREKANS CINSINDENDIR.  
C  $f=2\pi/T$  DEN CIZGISEL FREKANS GECILEBILIR.  
C VERILEN NOKTA SAYISI CIFT ISE, KATLANMA:(N/2)+1. NOKTADA  
C GERCEKLESIR  
C VERILEN NOKTA SAYISI TEK ISE, KATLANMA:(N-1)/2. NOKTADAN  
C YARIM ORNEKLEME ARALIGI (FR. ORTAMI) KADAR DAHA  
C OTESINDE GERCEKLESIR.  
C DONUSUMLERDE NOKTA VE HARMONIK SAYILARI ESIT ALINIR.  
C\*\*\*\*\*









**Program sınaama verileri:**

1, 4  $\Rightarrow$  Düz FD alınacağını gösterir (-1 ise TFD), FD.  
alınacak nokta sayısı

1  
2  
2  
1  
1

} AFD. alınacak sayısal değerler

$\Rightarrow$  Örneklem aralığı (yoksa 1)

**Ek Pr1 Ayrık Fourier Dönüşümü programının çıktısı**

FOURIER DONUSUMU PROGRAMI (HAZIRLAYAN: RAHMI PINAR)

ORNEKLEME ARALIGI= 1.000 VERI BOYU= 3.000

\*\*FD ALINACAK VERI\*\*

GERCEL SANAL

1.00 0.00

2.00 0.00

2.00 0.00

1.00 0.00

FR. ORTAMI (ACISAL) ORNEKLEME ARALIGI DW= 2.0944

KATLANMA M= 3.HARMONIK

*I*	*FREK*	*GER*	*SAN*	*GENLIK*	*GUC*
1. HARMONIK	0.00	6.00	-0.00	6.00	36.00
2. HARMONIK	2.09	-1.00	-1.00	1.41	2.00
3. HARMONIK	4.19	0.00	-0.00	0.00	0.00
4. HARMONIK	6.28	-1.00	1.00	1.41	2.00

## Ek Pr2

### NLOGN programı

```
DIMENSION X(1000),Y(1000)
```

```
COMPLEX FCOM(1000)
```

```
C COMPLEX FCOM
```

```
C ISR: +1 DUZ FD, -1 TFD. ALINIR
```

```
C GIRDI DIZISI SANAL KISIM ICERMEK ZORUNDADIR (YOKSA SIFIR
```

```
C YAZILIR)
```

```
C GERCEL VE SANAL KISIMLAR AYNI SATIRDA YAN YANA YAZILIR
```

```
C N: ZAMAN ORTAMI VERİ SAYISI (2' NİN KUVVETİ OLACAK)
```

```
C M: FR. ORTAMI HARMONİK SAYISI (N=M ALINMISTIR)
```

```
C COOLEY,J,S., VE J. W. TUKEY
```

```
OPEN(UNIT=1,FILE='NLO.DAT')
```

```
OPEN(UNIT=2,FILE='NLY.DAT')
```

```
READ(1,*)SIGN
```

```
READ(1,*)N
```

```
NN=2**N
```

```
DO I=1,NN
```

```
READ(1,*)X(I),Y(I)
```

```
END DO
```

```
DO I=1,NN
```

```
FCOM(I)=CMPLX(X(I),Y(I))
```

```
END DO
```

```
CALL NLOGN(N,FCOM,SIGN)
```

```
DO I=1,NN
```

```
WRITE(2,*)FCOM(I)
```

```
END DO
```

```
STOP
```

```
END
```

```
SUBROUTINE NLOGN(N,X,SIGN)
```

```
DIMENSION M(25),X(25)
```

```
COMPLEX X,WK,HOLD,Q
```

```
LX=2**N
```

```
DO 1 I=1,N
```

```
1 M(I)=2**(N-I)
```

```
DO 4 L=1,N
```

```
NBLOCK=2**(L-1)
```

```
LBLOCK=LX/NBLOCK
```

```
LBHALF=LBLOCK/2
```

```
K=0
```

```
DO 4 IBLOCK=1,NBLOCK
```

```
FK=K
```

```
FLX=LX
```

```
V=SIGN*6.2831853*FK/FLX
```

```

WK=CMPLX(COS(V),SIN(V))
ISTART=LBLOCK*(IBLOCK-1)
DO 2 I=1,LBHALF
J=ISTART+I
JH=J+LBHALF
Q=X(JH)*WK
X(JH)=X(J)-Q
X(J)=X(J)+Q
2 CONTINUE
DO 3 I=2,N
II=I
IF(K.LT.M(I)) GO TO 4
3 K=K-M(I)
4 K=K+M(II)
K=0
DO 7 J=1,LX
IF(K.LT.J)GO TO 5
HOLD=X(J)
X(J)=X(K+1)
X(K+1)=HOLD
5 DO 6 I=1,N
II=I
IF(K.LT.M(I)) GO TO 7
6 K=K-M(I)
7 K=K+M(II)
IF(SIGN.LT.0.) RETURN
DO 8 I=1,LX
X(I)=X(I)/FLX
RETURN
END

```

1⇒ Düz FD alınacağını gösterir (-1 ise TFD)

2⇒ Nokta sayısı, 4 nokta olduğundan,  $2^N=4 \Rightarrow N=2$  dir.

1 0	} AFD. alınacak sayısal değerler. 1. kolon gerçel, 2. kolon sanal kısımlardır. Sanal kısım yoksa sıfır değeri verilir.
2 0	
2 0	
1 0	

### **Ek Pr1 Ayrık Fourier Dönüşümü programının çıktısı**

```

( 1.5000000 , 0.0000000 )
(-0.25000000 , 0.25000000 )
( 0.0000000 , 0.0000000 )
(-0.24999999 , -0.25000000 )

```

## **BÖLÜM 8**

### ***ÖRNEKLEME KURAMI***

#### ***8.1 GİRİŞ***

Örnekleme, sinyal işlemede ve istatistikte farklı amaçlar için yapılır. İstatistikte hedef, kitleden (küçük topluluklar) hareketle, topluluklar (büyük topluluk) hakkında bilgi edinmektir. Örneğin, yapılacak bir milletvekili seçiminde, partilerin ne oranda oy alacağını kestirilmesi için, araştırma şirketleri, seçtikleri bir kitle üzerinde “eğilim belirleme” araştırması yaparak, seçim sonuçlarında, partilerin alacakları oy oranını ülke çapında, belirlemeye çalışırlar. Kitle üzerinde yapılan araştırmayı, tüm topluluğa yayarlar. Bu sırada kullanılan yöntemin sınanması, seçim sonuçlarına göre yapılır.

Sinyallerin işlenmesinde kullanılan örnekleme kuramı, amaç ve yöntem açısından farklıdır. Ancak, örneklemenin anlaşılabilmesi için istatistikte kullanılan örneklemeyle ait temel tanımlar verilecektir.

#### ***8.2 ÖRNEKLEME ÇEŞİTLERİ***

Kendisinden daha büyük kitleleri temsil etme özelliğine sahip malzeme veya malzemeler grubuna örnek denir. Bu amaç için yapılan işleme de örnekleme adı verilir. Örneğin bir alanda, tabanda yer alan temel kayaya ait manyetik duyarlık (süseptibilite) dağılımı araştırılacaksa, ana kayanın yüzlek (mostra) verdiği yerlerde manyetik duyarlık ölçmeleri yapılır. Elde edilen dağılımdan, temel kayacın duyarlığı hakkında kestirime gidilir.

Örnekleme, genelde, 2 türde yapılır.

##### ***8.2.1 Kasıtlı örnekleme***

Araştırma amacına ulaştıktan sonra, hedef topluluğu daha iyi tanımak için yapılan örnekleme türüdür. Örneğin yukarıda verilen örnekte, duyarlık ve kayanın mineralojik ilişkisi aranacaksa, duyarlığın yüksek olduğu yerden kaya parçası alınarak mineralojik deneyler yapılır. Böylece kayayı oluşturan mineraller ve manyetik duyarlık arasında

ilişki kurulabilir. Bu tip örnekleme ile istatistiksel yorumlamalar yapılamaz,

### 8.2.2 Gelişigüzel örnekleme

Örnekleme planında bir gelişigüzel yöntem içeren örnekleme şeklidir. İstatistiksel örnekleme deyimi; kitledeki her elemanın, seçilen örnekte yer alma olasılığının birbirine eşit olduğu varsayımına dayandırılmasıdır. Gelişigüzel örnekleme iki başlıkta toplanır.

#### 8.2.2.1 Basit gelişigüzel örnekleme

"N" adet verinin gelişigüzel seçilmesinden oluşur. Şekil 8.1 de bir kesit boyunca alınmış 10 adet gelişigüzel örnek görülmektedir (yuvarlak noktalar). Bu tip örnekleme tek düzelik yoktur. Örnekleme aralığı sık ve seyrek olabilir.



Şekil 8.1 Basit gelişigüzel örnekleme

"N" adet bireyden oluşmuş bir kitleden seçilen, büyüklüğü "y" olan elemanın seçilme olasılığı, tüm bireylerde eşittir.

En temel istatistiksel parametreler aritmetik ortalama, değişinti (varyans) ve değişintiden türeyen standart sapmadır.

Topluluğa ait aritmetik ortalama " $\mu$ ", değişintisi " $\sigma^2$ " ile gösterilir.

Aritmetik ortalama,

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (8.1)$$

dır. Bu bağıntıda:

$y_i$  :  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$  "N" adet bireyden oluşan topluluğun, her bireyinin değeridir.

Kitlenin " $\sigma^2$ " ile gösterilen değişintisi,

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \quad (8.2)$$

bağıntılarından yararlanarak elde edilir. Örneklemin aritmetik ortalaması " $\bar{x}$ " ve örnekleme varyansı " $s^2$ " ise:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_i \quad (8.3)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (8.4)$$

dır. Burada:  $x_i : x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  "n" adet bireyden oluşan kitlenin her bir elemanının değeridir.

Kitlenin ve topluluğun kestirilen (tahmini) istatistiksel parametreleri aralarındaki ilişki

$$\hat{\mu} = \bar{x} \quad (8.5)$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 \quad (8.6)$$

olmalıdır. Bu koşullarda, kitlenin istatistiksel değerleri kullanılarak, topluluğa ait doğru kestirimler yapılmış olur. Aralarındaki yanlış ise, kestirimde yapılan yanlıdır.

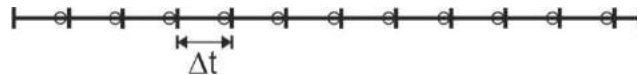
### 8.2.2.2 Eşit aralıklı örnekleme

Örneklemenin, kitle üzerinde tekdüze bir dağılım göstermesi veya örnekleme için ayrılan bütçenin kısıtlı olması durumunda sistematik örnekleme başvurulur (Şekil 8.2). Örneklerin alınacağı kesitin başlangıcı, gelişigüzel seçilir. Ancak daha sonra alınacak örneklerin arasında sabit " $\Delta x$ " kadar bir uzaklığın olması istenir. Örneklenen kitlenin beklenen aritmetik ortalamasının yaklaşık değeri,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_i \quad (8.7)$$

dır.  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  ise sistematik örneklerin her birinin değeridir. Kitle hakkında başka bilgiler olmadıkça, sistematik örnekleme ile topluluğa ait değışınti kestirilemez.

Anlatılan iki tip örneklemenin dışında daha başka örnekleme tipleri vardır. Çok aşamalı örnekleme, katmanlı (tabakalı) örnekleme, vd. gibi. Ancak jeofizikte en çok kullanılan örnekleme tipleri yukarıda verilenlerdir.



Şekil 8.2 Eşit örnekleme aralığı

### 8.3 SÜREKLİ VE AYRIK SİNYALLER

Sinyaller iki biçimde bulunur.

- Sürekli sinyaller (analog), zamanın her parçasında tanımlıdır (continuous time)
- Ayrık sinyaller, “ $\Delta t$ ” aralıklarla tanımlı, bunun dışında sıfırdır (discrete time).

Analog sinyaller üzerinde herhangi bir işlem yapılamaz. Örneğin spektrumu, türevi, tümlevi vb. alınmaz. İki ayrı analog im toplanamaz. Bu nedenle analog izler örneklenecek sayısal duruma getirilir. Sayısallaştırılan izler üzerinde her türlü işlemler yapılabilir. Ancak ayrık imlerin de kendi başlarına bir anlamı yoktur. Anlam kazanabilmesi için, yeniden analog duruma getirilir. Bu olayı Jeofizikten bir örnek ile açıklayalım. Deprem sırasında, kaynaktan (deprem odağı) çevreye deprem dalgaları yayılır. Depremin başlamasından bitimine kadar geçen sürede, titreşim sürekli. Her anda, tanımlı olan sinyal, bir kayıtçı (sismometre) tarafından kaydedilebilir. Kayıt, analog olabildiği gibi daha önceden saptanmış bir zaman aralığı ile sayısal olarak ta yapılabilir. Analog, deprem sinyali üzerinde herhangi bir işlem yapılamaz. Analog olan deprem sinyali, seçilen bir örnekleme aralığı kullanılarak ayrık (sayısal) duruma getirilir. Sayısallaştırılmış sinyal üzerinde işlem yapılabilir. Örneğin genlik ve evre spektrumları, AFD alınarak bulunur.

Jeofizikte sinyaller genellikle zaman veya uzay ortamında elde edilirler. Dolayısı ile örnekleme bu ortamlarda yapılır (bkz bölüm 8.5). Zaman veya uzay ortamında yapılan örneklemenin etkileri frekans (veya dalga sayısı) ortamında görülür.

### 8.4 SİNYALLERDE ÖRNEKLEME

#### 8.4.1 Tarak işlevleri kullanılarak örnekleme

Sürekli bir işlev, “ $\Delta t$ ” aralıklı birim dürtülerden oluşmuş “n” boylu bir birim dürtü katarı ile (tarak işlevi) çarpılarak, ayrık duruma getirilir (şekil 8.3).

---

**Not:** Birim dürtü işlevi  $\delta(t)$ , tarak işlevi ise  $\hat{\delta}(t)$  simgeleri ile gösterilmiştir.

---

Tarak işlevi, “ $\Delta t$ ” kadar ötelenmiş birim dürtülerden oluşur (bkz. dürtü işlevleri). Bir işlevin herhangi bir koordinat noktasındaki sayısal değeri bulunmak istenirse, 5.13 bağıntısında, kayma miktarı “ $t_0$ ”, yerine örnekleme aralığı “ $\Delta t$ ” yazılır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t - t_0) dt = \phi(t = t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - \Delta t) = f(\Delta t) \quad (8.8)$$

Böylece, işlevin o noktadaki ayrık değeri elde edilir. (8.8) eşitliği, “ $\Delta t$ ” aralığında, tek bir dürtünün, “ $f(t)$ ” işlevi üzerinde aldığı değerdir. “ $f(t)$ ” işlevine ardışık olarak yapılacak bu uygulamanın anlamı, tarak ve “ $f(t)$ ” işlevlerinin bire bir çarpımıdır. “ $n$ ” adet dürtüden yararlanarak tarak işlevi,

$$\hat{\delta}(n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - (n\Delta t)] \quad (8.9)$$

olarak yazılır. Tarak işlevi kullanılarak örneklenmiş sinyal (şekil 8.3),

$$f(n\Delta t) = f(t) \hat{\delta}(n\Delta t) \quad (8.10)$$

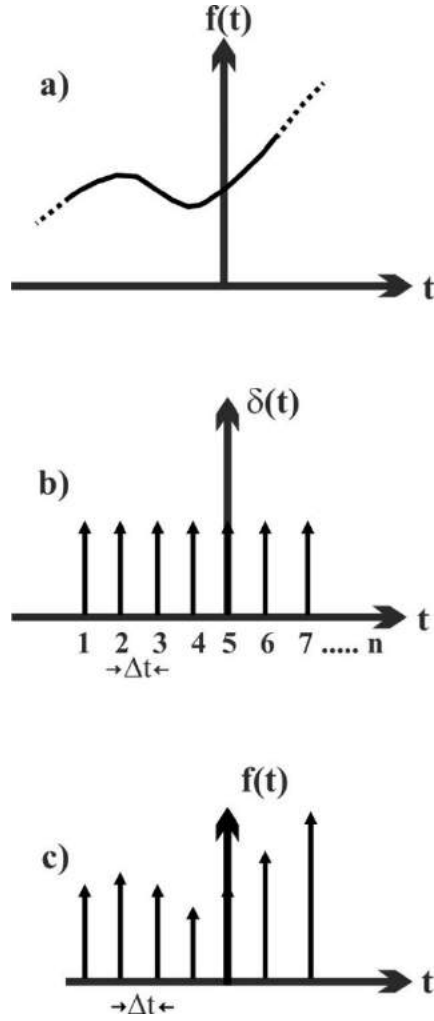
$$f(n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(n\Delta t) \delta[t - (n\Delta t)] \quad (8.11)$$

olarak elde edilir. “ $f_n(n.\Delta t)$ ”, “ $f(t)$ ” işlevinin “ $n.\Delta t$ ” noktasındaki ayrık (sayısal) değeridir.

#### 8.4.2 Uzay sinyallerinin örneklenmesi

Uzay sinyallerinde dönem tanımı yoktur (bkz. Bölüm 6.1.2). Bu nedenle zaman ve uzay sinyallerin benzeşimleri kurulmalıdır. Benzeşim, dönemsel sinyalin bir yarısının, uzay sinyalinin en kısa dalga boyu olarak eşlemesiyle kurulur (Şekil 8.4). Eşlemeye göre, zaman sinyalleri, dönemlerinin 1/4’ü, uzay sinyalleri ise en kısa dalga boylarının yarısı olacak biçimde örneklenmesi gerekliliğidir. Bu koşulda, örneklenmiş izler, Nyquist kuralına uyar (bölüm 8.6).





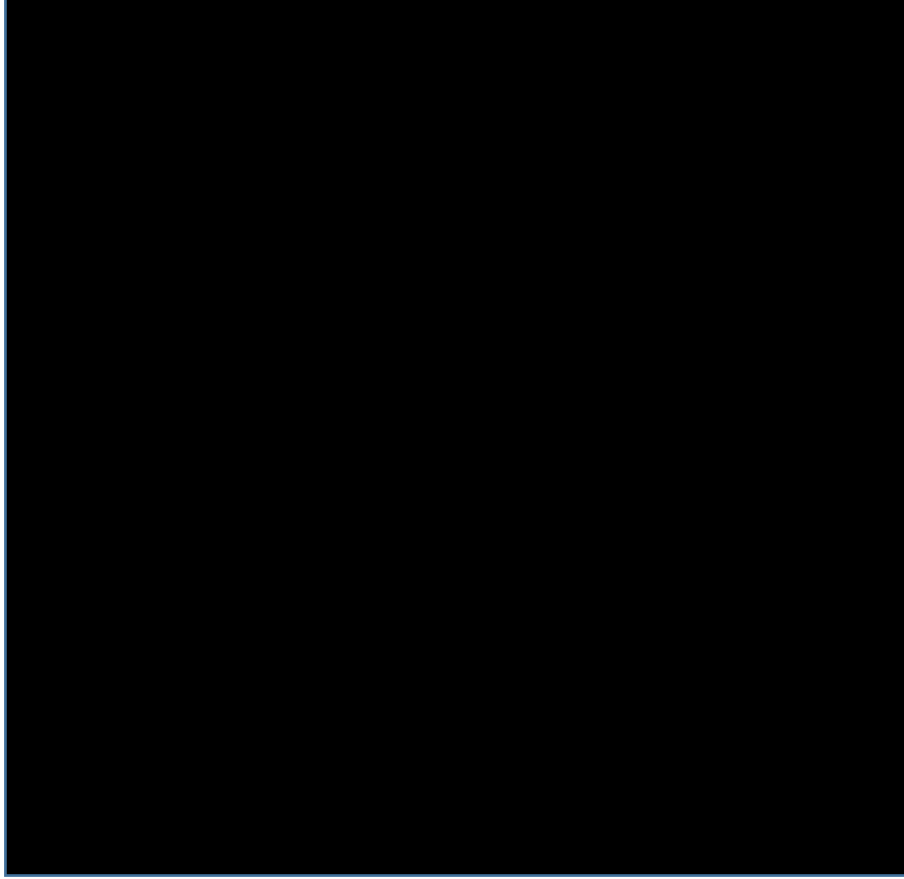
**Şekil 8.3** Tarak işlevi kullanılarak bir  $f(t)$  sinyalinin  $\Delta t$  aralıklarla örnekleme

### 8.5 ÖRNEKLEMENİN FREKANS ORTAMI DAVRANIŞI

(8.10) bağıntısı, zaman ortamında, tarak ve işlevin bire bir çarpımını gösterir. Söz konusu denklemin FD alınarak, örnekleme, frekans ortamındaki davranışı bulunur.

$$\mathfrak{F}[f(n \cdot \Delta t)] = \mathfrak{F}[f(t)] * \mathfrak{F}[\delta(n \cdot \Delta t)] \Rightarrow F(w) * D(w)$$

Bu bağıntıda,  $F(w) = \mathfrak{F}[f(t)]$  örneklenecek verinin spektrumu,  $D(w) = \mathfrak{F}[\delta(n.\Delta t)]$  ise tarak işlevinin FD dür.



**Şekil 8.4 a)** Zaman sinyalinde örnekleme **b)** Uzay sinyali olarak verilen bir gravite anomalisinde örnekleme. İzde, “ $\lambda_1$ ”, “ $\lambda_2$ ”, “ $\lambda_3$ ” ile gösterilen 3 adet dalga boyu vardır. Doğru örnekleme,  $\Delta x = \lambda_3/2$  dir (en kısa dalga boyunun yarısı).

#### TARAK İŞLEVİNİN FD

(8.11) bağıntısında ötelenmiş dürtü işlevi “ $\delta[t-(n.\Delta t)]$ ” dir. Ötelenmiş dürtü işlevinin FD. (5.23) eşitliği ile verilmektedir.

$$\mathfrak{F}[\delta(t-t_0)] = e^{-jw t_0} \quad (5.23)$$

Son denklemde “ $t_0 \rightarrow \Delta t$ ” konularak, örnekleme aralığı kadar ötelenmiş dürtü işlevinin FD,  $\mathfrak{F}[\delta(t-t_0)] e^{-jnw_0 t}$  olarak elde edilir.

Bu işlem “n” kez yinelendiğinde tarak işlevinin FD ne ulaşılır.

$$D(w) = \mathfrak{F}[\delta(t - n \cdot \Delta t)] \Rightarrow w_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - nw_0)$$

$$D(w) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - nw_0) \quad (8.12)$$

(8.12) eşitliği, tarak işlevinin FD dür. Denklem, tarak işlevinin frekans ortamında, “ $\Delta w$ ” aralıklarla ötelenmiş,  $\frac{2\pi}{\Delta t}$  genlikli dürtü işlevlerinden oluştuğunu gösterir. Aynı zamanda, “ $\Delta w$ ”, frekans ortamı örnekleme aralığıdır (Bkz bölüm 7.3.1).

(8.10-8.11-8.12) bağıntılarındaki tarak işlevi sonsuz uzunluktadır. Oysa, tarak işlevi, veri boyu ile sınırlıdır. Yani zaman ortamında sınırlı, bir diğer işlev tarafından kesilmektedir. Tanımlanan bu işlev, pencere işlevidir (bkz. bölüm 9). Kesilmiş yeni işlevi “=” olarak gösterelim.

$$\bar{f}(n \cdot \Delta t) = f(n \cdot \Delta t) \cdot p(n \cdot \Delta t) \quad (8.13)$$

Sınırlandırılmış tarak işlevinin spektrumu (8.13) eşitliğinin FD alınarak elde edilir.

$$\mathfrak{F}[\bar{f}(n \cdot \Delta t)] = \mathfrak{F}[f(n \cdot \Delta t)] * \mathfrak{F}[p(n \cdot \Delta t)]$$

$$F(w) = F(w) * P(w) \quad (8.14.a)$$

Her frekans için,

$$\bar{F}(n \cdot w_0) = F(n \cdot w_0) * P(n \cdot w_0) \quad (8.14.b)$$

yazılır. P(w), dikdörtgen işlevin FD dür. Dikdörtgen işlevinin FD nün “sinc” işlevi olduğu bölüm 3 ten bilinmektedir. (8.14) denklemlerinde,

F(n.w<sub>0</sub>) ⇒ sonsuz uzunluklu tarak işlevi,

P(w) ⇒ kesilmiş (sınırlanmış) dikdörtgen işlev,

$\bar{F}(w)$  ⇒ sınırlanmış (veri boyu kadar) tarak işlevidir. Son eşitlikler

tarak işlevinin sınırlanmasının, spektrum ortamında durmaksızın yinelenmelere neden olacağını gösterir. Yinelenmelerle, gerçek

spektrumun yanı sıra, görüntü spektrumları oluşur. Belirtilen olgu,

$$\bar{F}(n \cdot w_0) = \sum_{L=-\infty}^{\infty} [F(L \cdot w_0) * P(L - w_0)] \quad (8.15)$$

denklemleriyle verilir.

## 8.6 FREKANS KATLANMASI (ALIASING)

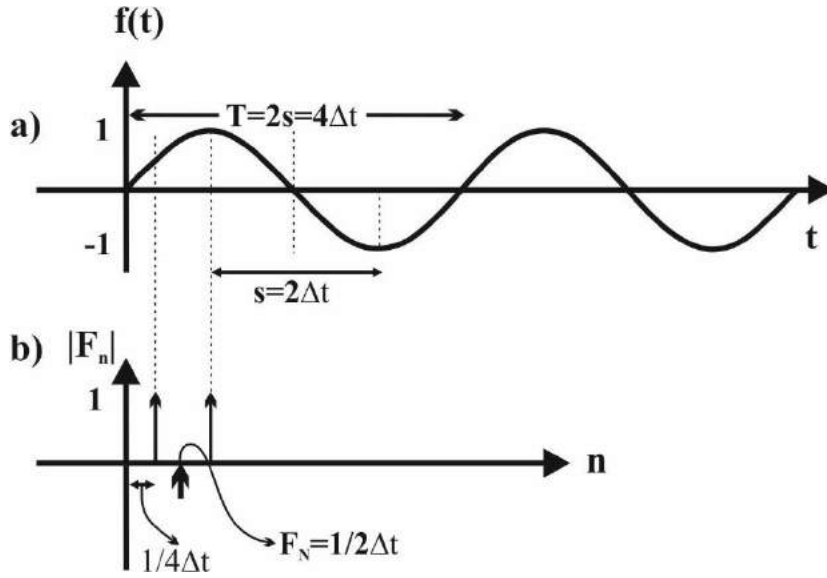
Sinüzoidal bir dalganın örnekleme için “+” ve “-“ en büyük değerleri simgeleyecek, 2 noktaya gereksinim duyulur. Şekil 8.5.a da genliği “1” olan sinüs izi verilmiştir. ”s” ile gösterilen uzunluk, örnekleme için yeterlidir. Bu koşulda, örneklenen noktalarının genlikleri “+1, 0.-1” dir. Bu noktalardan bir doğru geçer. Söz konusu 3 nokta, 2 adet örnekleme aralığını içerir. Şekil 8.5.a’ dan görüldüğü gibi “s=2Δt” dir. Sinyal böyle örneklenirse, sinüs, üçgen dalgaya döner. Böylesine küçük, şekilsel bozulma, sinyalin analizi açısından önemsizdir. Önemi olan, örneklendikten sonra, dönemde değişiklik olmamasıdır (şekil 8.6). Frekans ortamında bağımsız  $\frac{1}{s} = \frac{1}{2\Delta t}$  değişken olarak “s” uzunluğunun tersi kullanılır(şekil 8.5.b). Yani alınır. Bu durumda elde edilen frekans özel bir frekanstır ve Nyquist frekansı olarak tanımlanır. İz, spektral ortamda bu frekansta katlandığı için. “katlanma” frekansı isimi de kullanılır.

$$f_N=1/(2\Delta t) \quad (\text{çizgisel}) \quad (8.16.a)$$

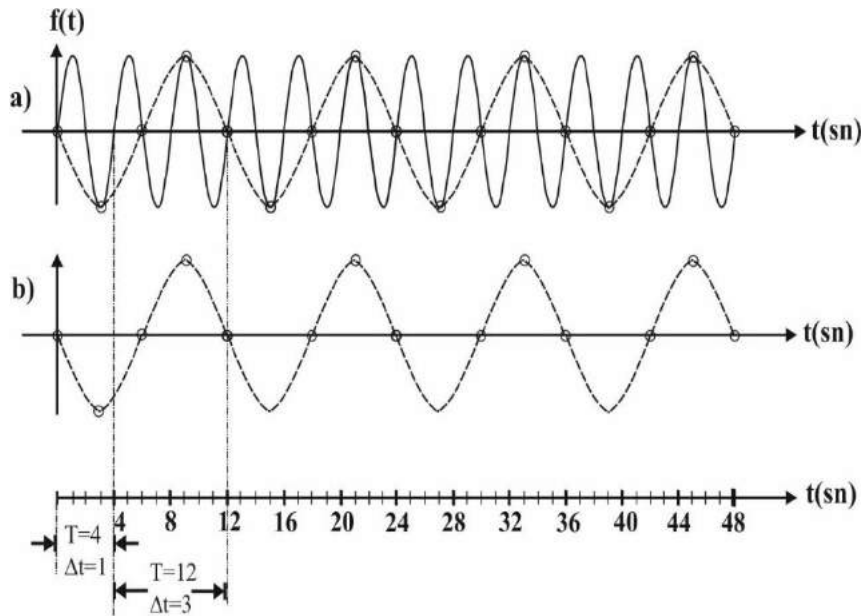
$$w_N=\pi/\Delta t \quad (\text{açısal}) \quad (8.16.b)$$

Örneklemede, sinüs dalgasının sıfır olduğu baş ve son noktaları da kullanılır. Bu koşulda sinyalin boyu  $2s=2.2.\Delta t=4\Delta t$  olur ve 4 adet örnekleme aralığına gereksinim duyulur. Yani bir sinüzoidal, Nyquist frekansına uygun olarak 5 nokta (0, +1, 0, -1, 0) ve 4 adet “Δt” kullanılarak örneklenir. Dolayısıyla örnekleme aralığı cinsinden dönem  $T=4\Delta t$  dir. Frekans ortamı örnekleme aralığı ise,  $\Delta f=1/T=1/(4\Delta t)$  dir. Katlanma frekansı ise (8.16.b) bağıntısından bulunur (şekil 8.5.b)

Örnekleme aralığının büyük seçilmesi koşulunda, karşılaşılabilecek bir diğer sorun, gerçekte olmayan dönem ve frekansların bulunmasıdır. Şekil 8.6.a da  $T=4$  sn dönemli ( $f=1/4$  Hz) bir sinüs dalgası, doğru örnekleme aralığıyla ( $\Delta t=1$  sn) örneklenmiştir (düz çizgi). Şekil 8.6.b de ise  $\Delta t=3$  sn alınarak yanlış örneklenmiştir. Yanlış örneklemeden dönem büyümüş ( $T=12$  sn) frekansı değişmiş ( $f=1/12$  Hz).



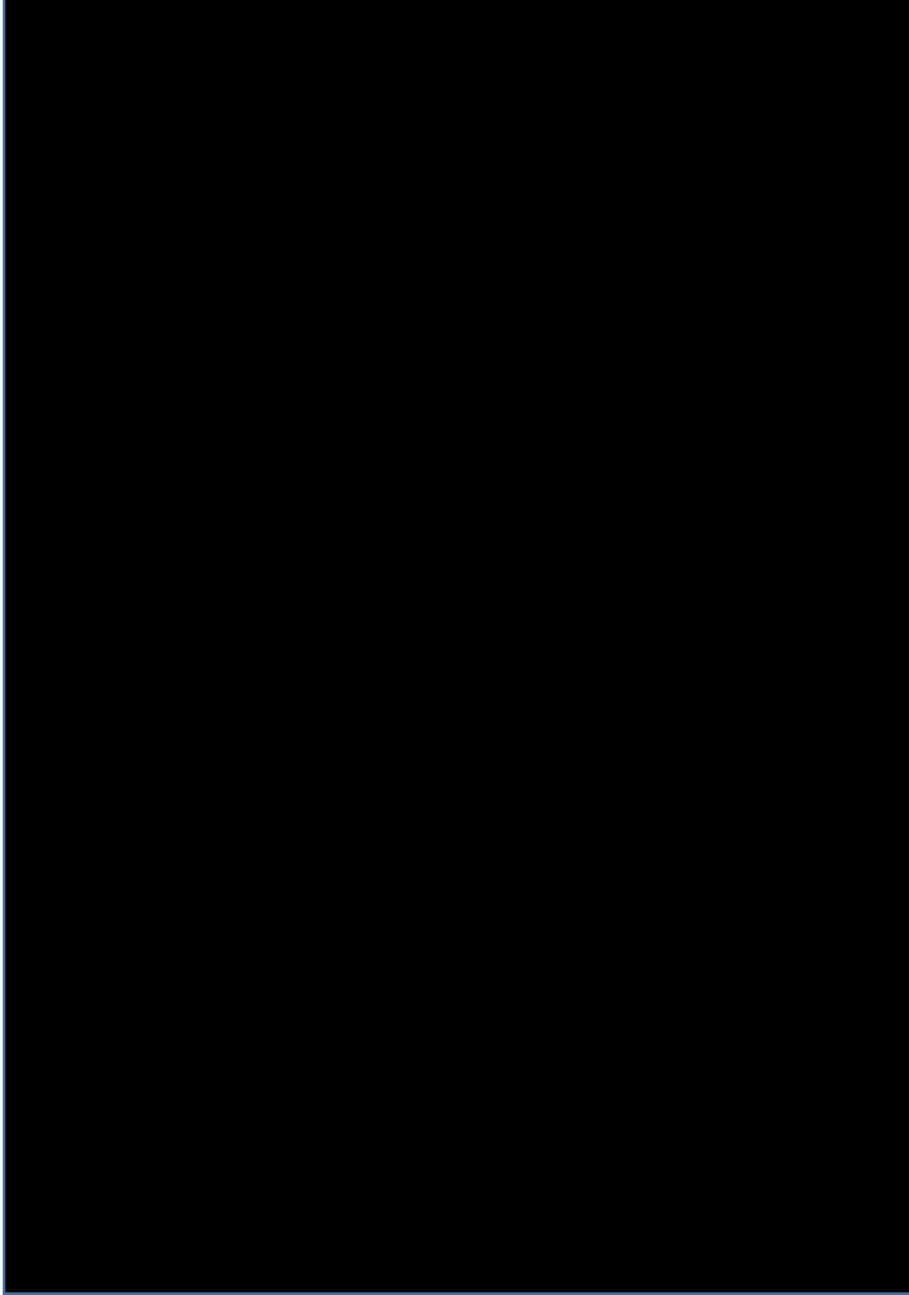
Şekil 8.5 Sinüs dalgasının Nyquist kuralına uygun örneklenmesi

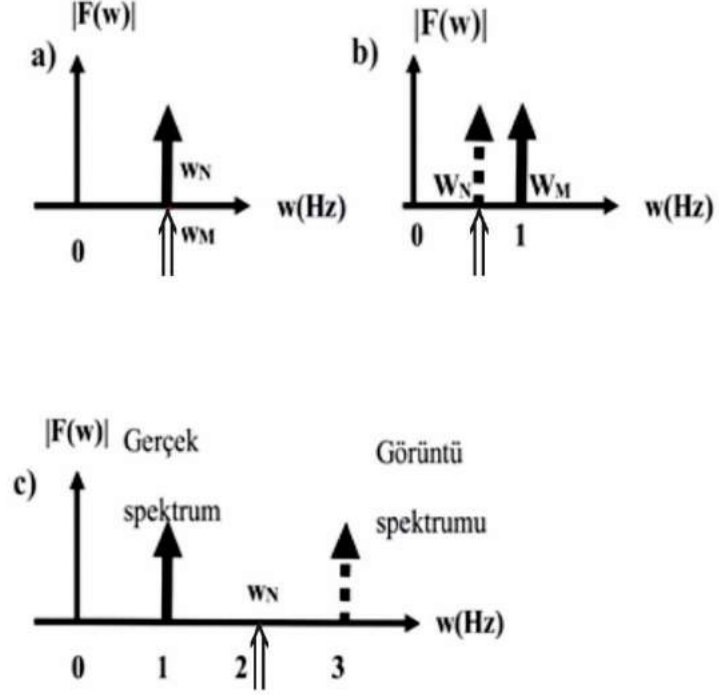


Şekil 8.6 Yanlış örnekleme ile dönemin değişmesi

**Örnek 8.1**

Sonsuz uzunlukta  $f(t)=\sin(\omega t)$  işlevi verilmektedir. En büyük (maksimum) " $\omega_M$ " ve Nyquist " $\omega_N$ " frekanslarını kullanarak, örnekleme aralığını, spektral ortamda, irdeleyiniz ( $\omega=1$  Hz dir).





**Şekil 8.7** 1 Hz lik dalganın spektral ortamda görünümü **a)** limit durumunda  $\Delta t = \pi$  sn seçilmesi koşulu **b)**  $\Delta t > \pi$  sn seçilmesi durumu (yanlış örnekleme) **c)**  $\Delta t = \pi/2$  sn seçilmesi durumu

## 8.7 BANT SINIRLI VERİLERDE KATLANMA

Önceki bölümlerde, sonsuz uzunluktaki verilerde Nyquist kuralı incelenmiştir. Oysa gerçekte, veriler, alındıkları ortamda (zaman veya uzay), sınırlıdır. Bilindiği gibi, verinin spektral ortamda bant genişliği, içerdiği en büyük frekansa “ $\omega_M$ ” kadardır. Örnek 8.1 de verilen basit sinüs dalgası yerine bant sınırlı ayrık bir verinin (çan eğrisi, gravitede küre anomalisi, vb) örneklenebilmesi ve spektral ortamdaki davranışı verilmektedir (şekil 8.8). Şekle ilişkin açıklamalar aşağıdadır.



**Şekil 8.8** Çan eğrisi örneklemesinin zaman ve spektral ortamda irdelenmesi



- Sol taraf zaman, sağ taraf frekans ortamlarıdır.
- 8.8.a' da veri (çan eğrisi) ve spektrumu (asıl spektrum) görülmektedir.
- 8.8.b' de " $\Delta t < \pi/w_N$ " örnekleme aralığına sahip tarak işlevi ve frekans ortamı görüntüsü verilmiştir. Tarak işlevi, " $t/\Delta t$ " adet noktadan oluşacağı için " $\gamma(t/\Delta t)$ " gösterilir. Spektral ortamda tarak işlevinin spektrumu  $\Delta w = \pi/\Delta t$  aralıkla görülecektir. Tarak işlevinin, veri ile evrişiminden ötürü, görüntü (yalancı) spektrum oluşur.
- 8.8.c' de zaman ortamında, "a" da verilen çan işlevi, tarakla çarpılarak sayısallaştırılmıştır. Örnekleme aralığı yeterince küçük olduğu için spektral ortamda, görüntü ve gerçek spektrumlar birbirilerinden yeterince uzaktırlar. Bu nedenle kesin bir ayırlıklık söz konusudur. Ancak, veri sayısındaki artış, işlem sayısı ve zamanda artmaya yol açar.
- 8.8.d' de örnekleme aralığı, sinyal içinde en yüksek frekanslı sinyalin ayırlıklığını, limitte, koruyacak biçimde,  $\Delta t = \pi/w_N$  olarak seçilmiştir. Bu durumda  $w_N = w_M$  koşulu oluşmuştur. Spektral ortamda, her bir frekansa ait ayırlıklık sağlanırken, veri sayısında da herhangi bir artma söz konusu değildir.
- 8.8.e' de örnekleme aralığı çok büyütülmüştür. Bu durumda (8.16) eşitliği gereğince " $w_N$ " küçülür.  $w_N < w_M$  durumu oluşur, " $w_N$ " alçak frekansa doğru kayarak, " $w_M$ " frekansı ile iç içe girer. Bu durumda, görüntü ve gerçek spektrum iç içe girerek ayırlıklık ortadan kalkar. Bu olay, "aliasing" olarak isimlendirilir.

### **Örnek 8.2**

" $-\infty, \infty$ " aralığında tanımlı,  $f(t) = \sin(0.1t) + 4\sin(0.2t) + 3.5\sin(0.5t)$  sinyali verilmektedir. Zaman birimini sn olarak alınız.  $\Delta t = \pi/4$  sn, izin boyunu da en büyük döneme eşit olacak biçimde, sinyali, Bl 1, Ek PR1 kullanarak, hesaplayınız ve çiziniz (şekil 8.9 a).

- a) Sinyalin örneklenebilmesi için, kullanacağınız doğru örnekleme aralığını bulunuz.
- b) Seçilen örnekleme aralığının doğruluğunu sınavınız.
- c) Toplamlardan oluşan  $f(t)$  işlevinin dönemini bulunuz (bkz örnek 2.1-2.1)
- d) Adım a'da bulduğunuz örnekleme aralığını kullanarak, izi yeniden hesaplayarak çiziniz.
- e)  $\Delta t=2.5\pi$  sn olarak verilen sinyali, yeniden hesaplayınız ve çiziniz.
- f) Örnekleme aralığını  $\Delta t=\pi$  ve  $\Delta t=2.5\pi$  sn olarak genlik spektrumunu, Nyquist frekansının ve gölge spektrumlarını gösteriniz (verilen izin sonsuz uzunlukta olduğunu varsayınız).

---

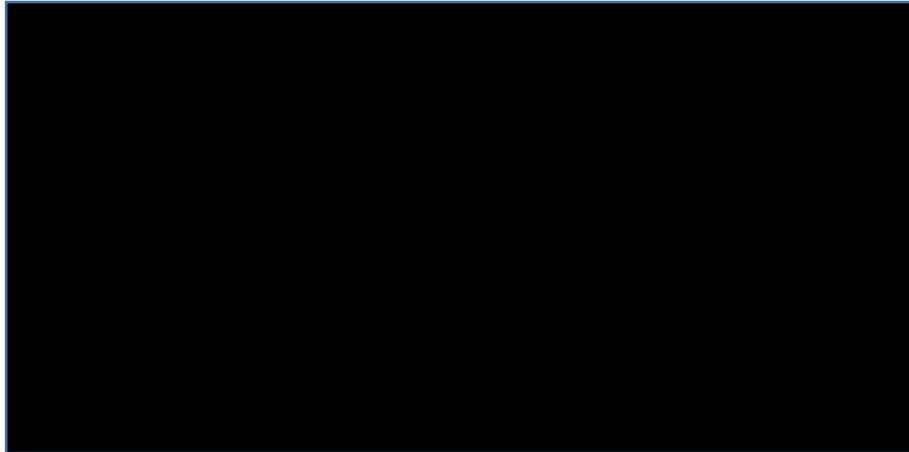
**Not:** Şekil 8.9' ait açıklamalar:

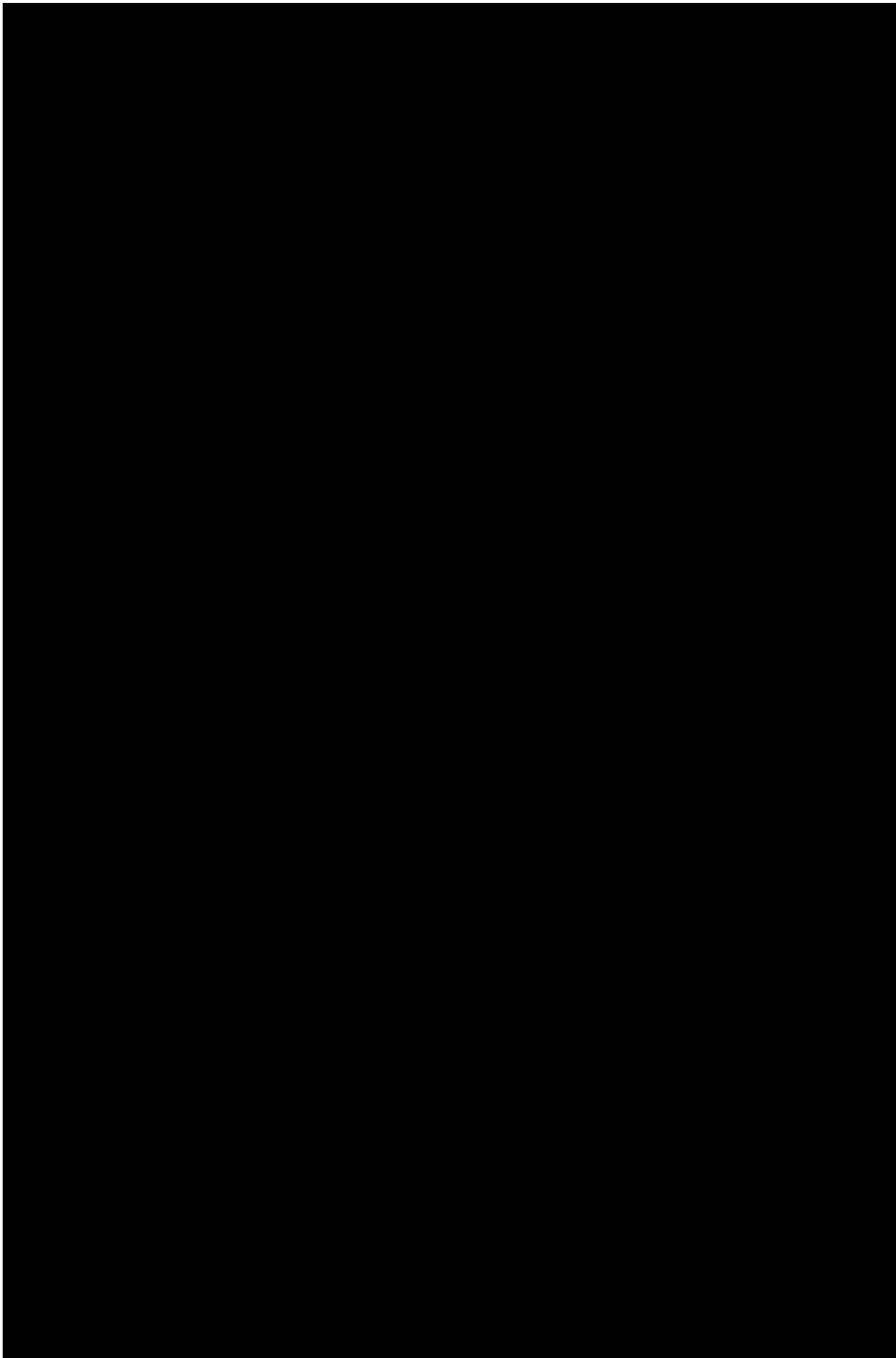
- Kırmızıyla gösterilen işlevler, doğru değişik örnekleme aralıkları kullanılarak örneklenen işlevleri
- Mavi renkli işlev, yanılılı örneklenmiş işlevi
- Kırmızı, aşağı doğru inen kesikli çizgi, doğru örnekleme aralığını
- Mavi, aşağı doğru inen kesikli çizgi, örnekleme aralığını gösterir.

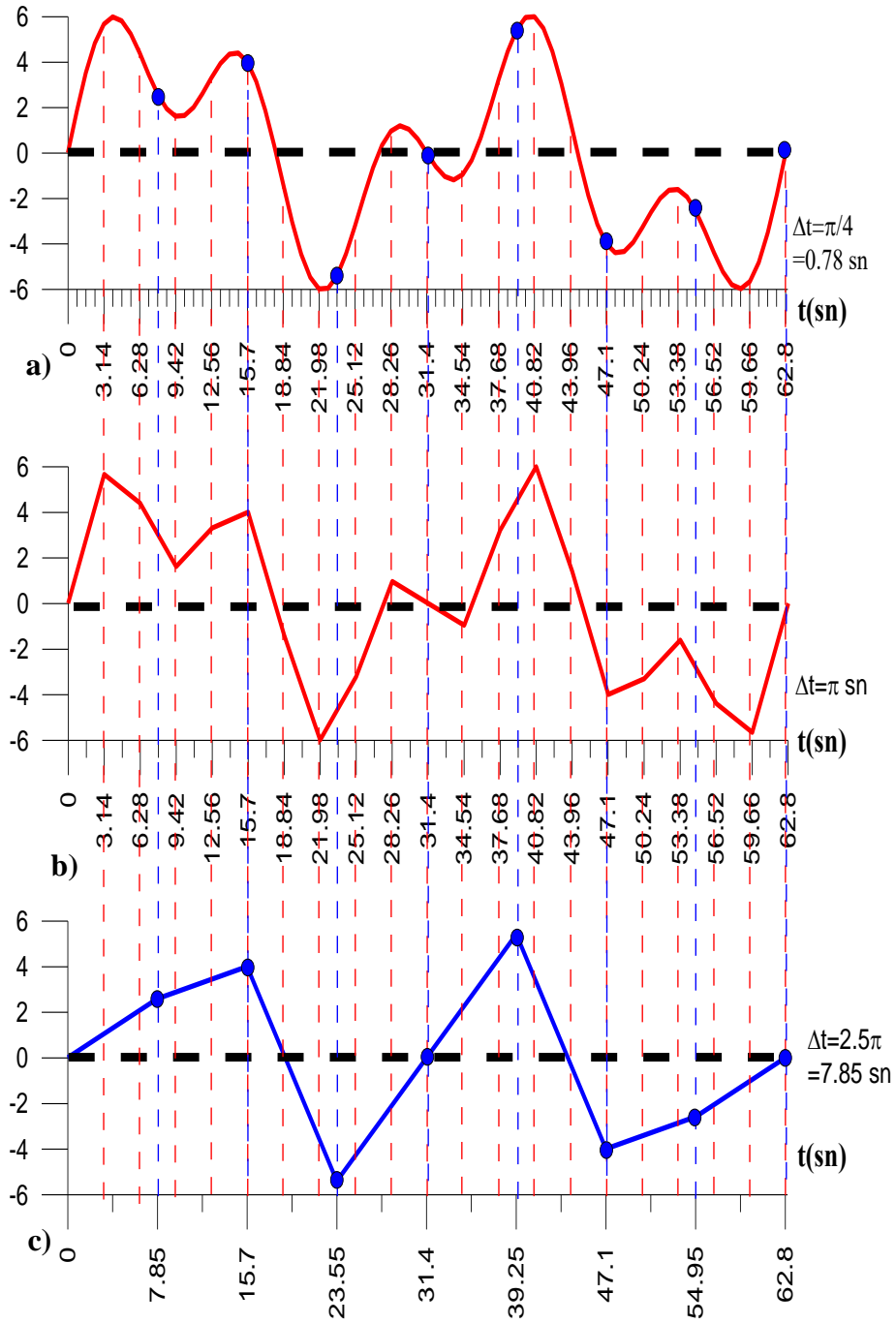
---

### **Çözüm**

- a) Sinyal 3 adet sinüzoidalın toplamından oluşmuştur. Bunların frekans ve dönemleri,







**Şekil 8.9** En kısa dönemli ( $T=4\pi$  sn) olan sinyalin örnekleme aralığı ( $\pi$  sn) kullanılarak yapılan örnekleme



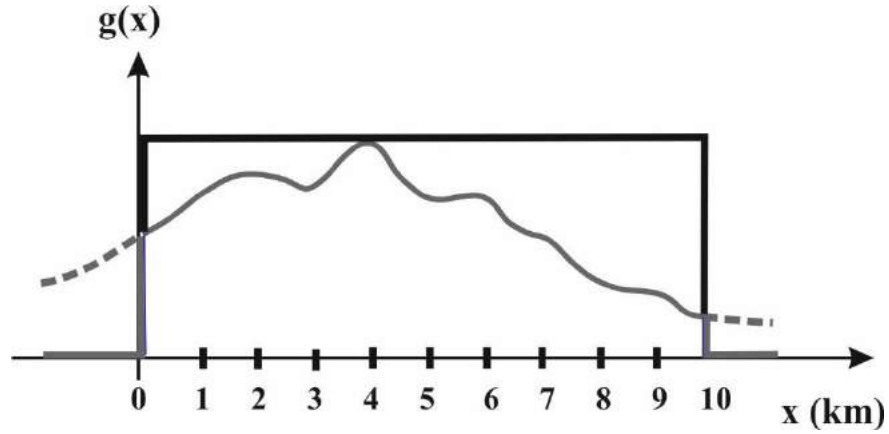
**Şekil 8.10 a)** Doğru örnekleme aralığı seçildiğinde, **b)** yanlış örnekleme aralığı seçildiğinde spektral ortam görüntüleri (N ve n birbirilerinden farklıdır. N: Nyquist frekansı, n: frekans ortamı sayıcısıdır)

## BÖLÜM 9

### *PENCERELER*

#### *9.1 GİRİŞ*

Mühendislik çalışmalarında toplanan veriler, yapılan gözlemlerle sınırlıdır. Veri toplanmanın bir başlangıcı ve sonu vardır. Başlangıç ve son denildiğinde, verinin sınırlanması (veya kesilmesi) anlamını taşır. Örneğin şekil 9.1 de 10 km boyunda alınmış bir gravite anomalisi verilmiştir. Kuşkusuz gravite alanı, belirtilen sınırların dışında da sürmektedir. Gözlemin 0-10 km arasında yapılması, gravite değişiminin, 0-10 km. lik sınır içinde olduğu, sınır dışında ise sıfır olması varsayımına götürür. Sınır dışında, kırmızı kesikli çizgili olarak sürmesi beklenen gravite izi, kesilme nedeniyle değiştirilmiş, kırmızı düz çizgi ile gösterilen biçime dönüşmüştür. Gravite sinyali, mavi düz çizgi ile gösterilen dikdörtgen pencere içinde vardır, dışında ise yoktur (dışında sıfır). Söz konusu mavi çizgili dikdörtgen, bir pencere görevi görmektedir. Dolayısıyla pencere işlevi olarak isimlendirilir. Herhangi bir sinyalin kuramsal olarak hesaplanmasında bile farkında olmaksızın, pencere kullanılır. Hesaplamanın başı ve sonunun bulunması, kuramsal verilerin, bu sınır içinde var, dışında ise yok varsayımıdır.

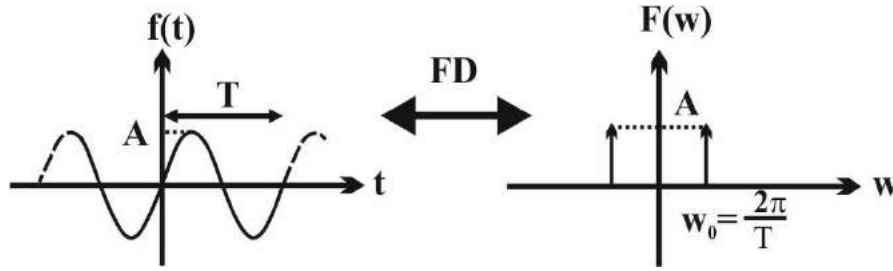


Şekil 9.1 Bir gravite izinde pencereleme

Pencere işlevleri değıştikçe, frekans ortamı bağıntıları değışir. Bu özelliklerden yararlanarak, kullanılacak pencere türü seçilir. Örneğin frekans ortamında yan salınımlar istenmiyorsa, kenarları yumuşak olarak sıfıra geçiş yapan bir pencere kullanılmalıdır. Ancak bu tür pencerelerin bant genişliği büyüktür. Bant genişliğinin çok olması, verileri aşırı yuvarlatır ve yüksek frekanslı bilgiler yitirilir. Bu durumda, pencere, alçak geçişli bir süzgeç gibi davranır (istenmeyen pencere etkisi).

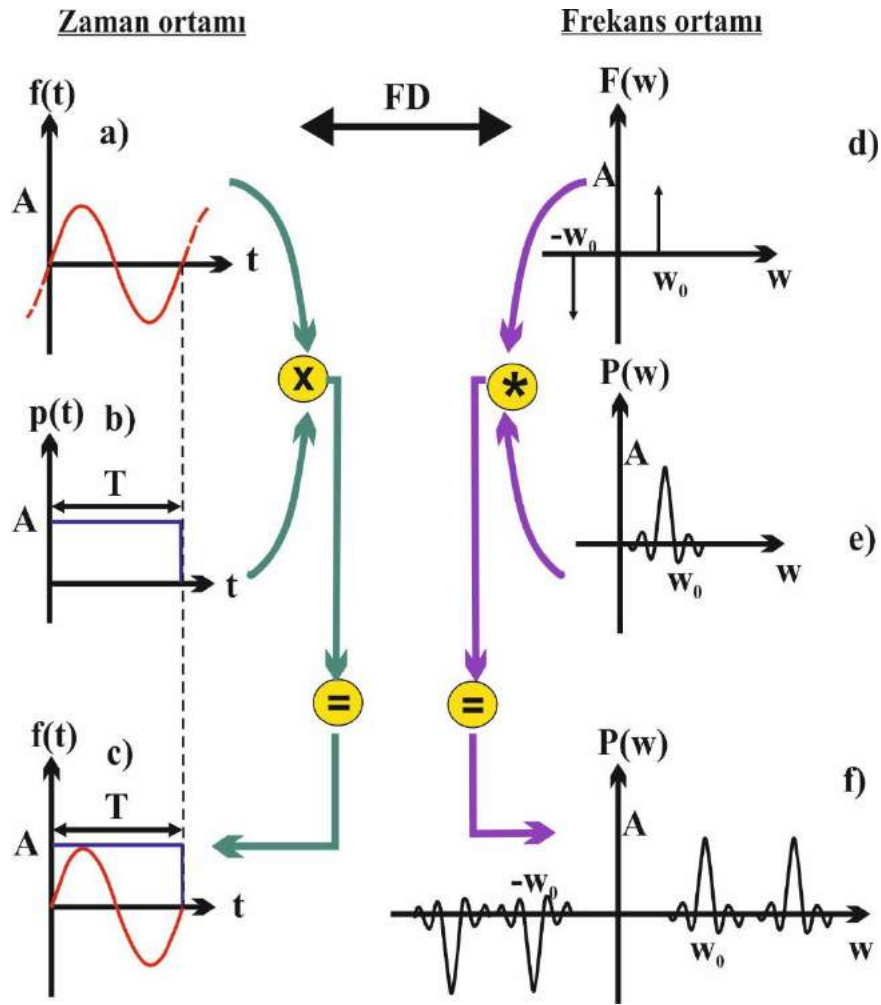
## 9.2 PENCERELEME ETKİSİ

Sonsuz uzunlukta bir sinüzoidal ve spektrumu şekil 9.2 de verilmiştir. Spektral ortamda, sonsuz uzunluklu sinüs izi,  $w_0=2\pi/T$  frekansında, bir çubuk olarak görülür (bkz bölüm 3 ek2).



Şekil 9.2 Sonsuz uzunluklu sinüs dalgası ve genlik spektrumu

“T” dönemli, sonsuz boylu bir sinüs dalgasının kendi dönemiyle sınırlandırılması, “T” boylu bir dörtgen pencere kullanıldığı anlamındadır (şekil 9.3). Zaman ortamında pencereleme, her iki işlevin bire bir çarpımı anlamındadır (şekil 9.3.c). Spektral ortamda pencereleme ise sonsuz uzunluklu sinüs işlevi (ters dönmüş birim dürtüler, şekil 9.3.d) ve “T” boylu dikdörtgen pencerenin spektrumlarının (sinc işlevi, şekil 9.3.e) evrişimidir (şekil 9.3.f) ( $w_0=2\pi/T$  dir).



**Şekil 9.3** Zaman ve frekans ortamlarında pencereleme **a)** “T” dönemli,  $\infty$  boylu sinüs işlevi **b)** “T” boylu dikdörtgen pencere **c)**  $\infty$  boylu sinüs işlevinin dikdörtgen pencere ile çarpılarak sınırlanması **d)** sinüs izinin spektrumu **e)** dikdörtgen pencerenin frekans ortamı görüntüsü (sinc) **f)** frekans ortamında pencereleme

Pencerelemeden kaynaklanan 2 önemli soruna aşağıda değinilmektedir.

### 9.2.1 Pencere nedeniyle sinyal şeklinin bozulması

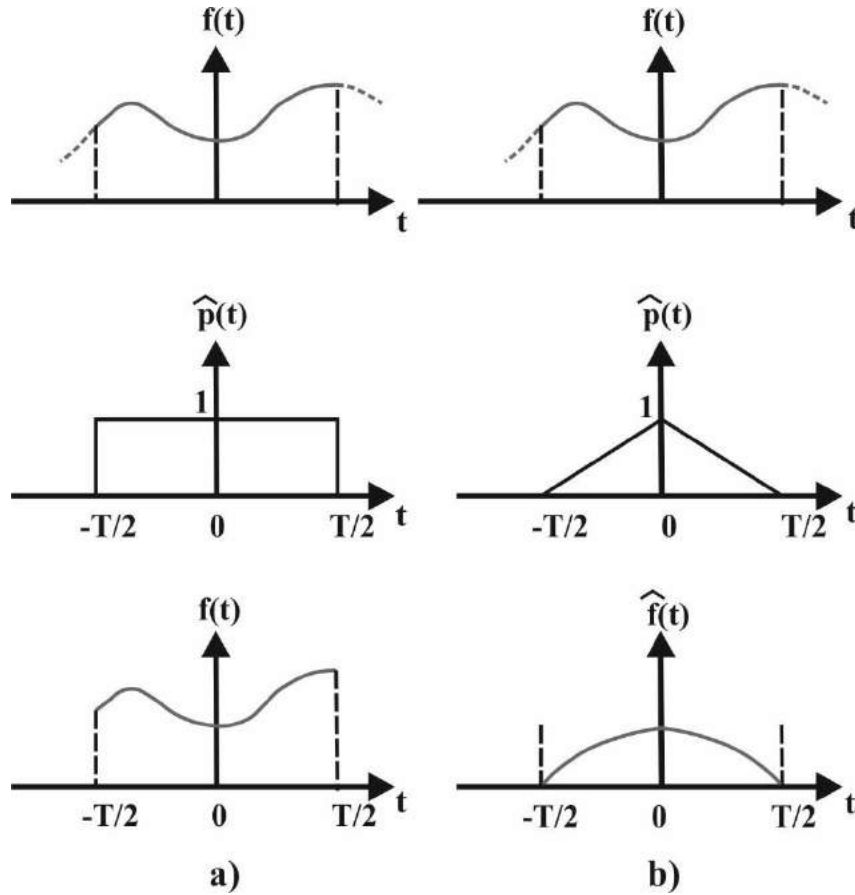
Veri biçimi, dikdörtgen pencere kullanılmasında değişikliğe uğramaz. Farklı pencereler verinin şeklini değiştirir. Şekil 9.4 te aynı verinin dikdörtgen ve üçgen pencere kullanılması durumları verilmiştir.



Dikdörtgen pencere kullanıldığında, sinyalde hiçbir şekil bozukluğu olmamıştır. Üçgen pencere ise sinyalin şeklinin değiştirmektedir. ancak uçlar düzgün olarak sıfırlanmaktadır. Buna karşılık, sinc işlevinin özelliğinden ötürü, dikdörtgen pencere kullanılması durumunda, yüksek genlikli Gibbs olayları, üçgen pencerede ise daha küçük genlikli Gibbs olayları oluşacaktır. Ancak dikdörtgen pencerenin bant genişliği en dar olanıdır. Bu nedenle ayırlılık diğer pencere türlerine göre en iyisidir.

Spektral ortamında ayırlığın azalması. İki nedenden kaynaklanır.

- Spektrum ortamındaki bant genişliği, pencerenin türüne bağlı olarak, değişebilir. Bant genişliği büyük olan pencerelerin yuvarlatma etkisi çok, ayırlığı ise azdır.



Şekil 9.4 a) Dikdörtgen pencere ile pencereleme b) üçgen pencere ile

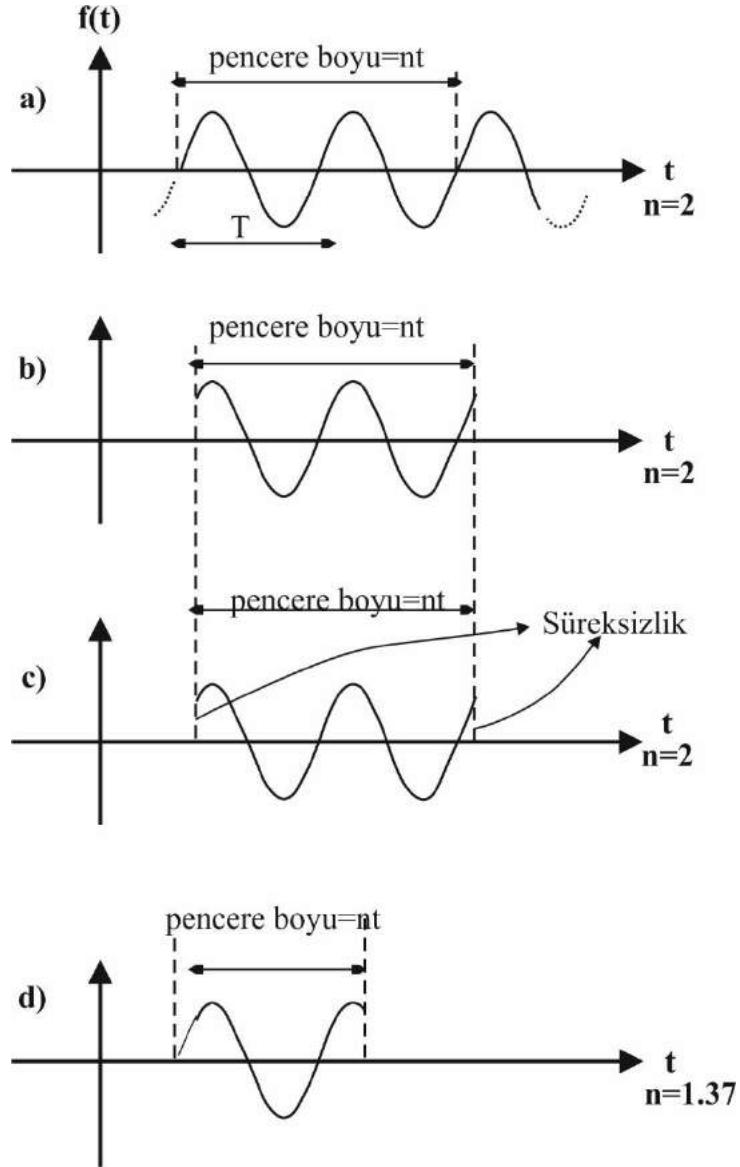
pencereleme

**b.** Pencere boyuna (dolayısı ile veri boyuna) bağı olarak, temel frekansın ( $w_0=2\pi/T$ ), orijine uzaklığı ve dolayısı ile " $\Delta w$ " ların önemi büyüktür. Bilindiği gibi frekans ortamı örnekleme aralığı doğrudan doğruya veri boyu ile ilişkilidir. Kısa pencere boylarında " $w_0$ " temel frekansı yüksek frekanslara kayar. " $\Delta w$ " lar büyür. " $\Delta w$ " arttıkça ayırlılık azalır.

### **9.2.2 Enerji sızması (leakage)**

Pencerelerin frekans ortamı bağıntılarının tümü, değişik parametrelili, birer sinc işlevidir. Sinc işlevinde, ana lobdan, yan loba enerji sızması olur. Bu olay, ana lobun genliğinde küçülme, yan lobların genliklerinde büyümelere yol açar. Zaman ortamında, pencerenin iki ucundaki süreksizliklerin genliği büyüdükçe, spektral ortamda enerji sızma miktarı artar. Spektrumun sağlığı azalır. Kenarları eğimli pencereler kullanılarak bu sorunun önüne belirli ölçülerde geçilebilir. Ancak pencerenin bant genişliğinden ötürü yuvarlatma etkisi artar. Bu olay, verinin başlangıç ve bitiş yerlerinin seçimiyle belirli ölçülerde önlenir.

Genelde başlangıç ve bitimde veri genliğinin azaldığı veya sıfıra asimptot olduğu yerler seçilerek enerji sızması azaltılabilir (şekil 9.5). Pencere boyunun dönem veya dönemin tam katları olarak seçilmesi sorundur. Aksi halde spektrum yanlış hesaplanır (şekil 9.5 - bkz bölüm 9.3, 9.9 bağıntıları)

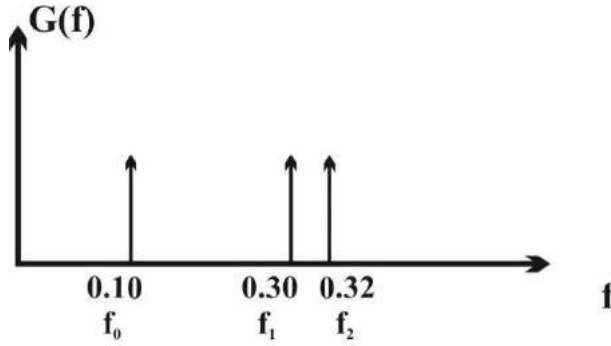


**Şekil 9.5** Zaman ortamındaki pencereleme yanlılgıları **a)** Doğru pencereleme (pencere boyu dönemin 2 katı seçilmiştir). **c)** "b" de yapılan yanlış pencereleme nedeniyle verinin başı ve sonunda oluşan süreksizlikler **d)** Pencerenin başlangıç yerinin doğru olmasına karşın dönemin tam katları seçilmediği için pencerenin bitiminde oluşan keskin süreksizlik.

### **Örnek 9.1**

Bir verinin spektrum ortamındaki görünümü şekil 9.6 da verilmektedir.

- Yalnızca ilk binin saptanabilmesi için pencere boyu ne olmalıdır?
- Tüm binlerin saptanması için gerekli pencere boyları ne olmalıdır?
- Sinyal uygun bir dikdörtgen pencere ile pencerelendikten sonra söz konusu binler kaçınca ayrık değerlerde görülür?



Şekil 9.6 Verilen örneğin spektrumu

### **Çözüm**



### **Örnek 9.2**

$T_1=5$  ve  $T_2=20$  sn dönemli iki adet sinüzoidal dalga verilmektedir. Bu dalgaları uzunluğu kendi dönemleri kadar olan bir dikdörtgen pencere ile pencereleyiniz. Söz konusu izlerin temel frekanslarını bulunuz. Spektral ortamda örnekleme aralığı nedir?

## **Çözüm**

1. iz:



2. iz:



Her iki izin zaman ve frekans ortamı görünümüleri Şekil 9.7 dedir. Şekil 9.7 incelendiğinde pencere boyu arttırıldıkça ilk “ $w_0$ ” temel frekansının alçak frekanslara doğru kaydığı, “ $\Delta w$ ” nın küçüldüğü, dolayısı ile frekans ayrımlılığın arttığı ve frekans ortamı örnekleme aralığının küçüldüğü görülmektedir. Zaman ortamındaki izin boyunu 4 kat arttırmakla frekans ortamındaki örnekleme aralığı 4 kat daha küçültülmüştür. Pencere boyu “ $\infty$ ” büyütüldüğünde frekans ortamı örnekleme aralığı “ $\Delta w$ ” lar çok küçülerek, ayırık spektrum, sürekli spektruma yaklaşacaktır.

### **9.3 ZAMAN VE FREKANS ORTAMINDA PENCERE İŞLEMİ**

Herhangi bir  $f(t)$  verisinin gelişigüzel bir  $p(t)$  penceresi ile zaman ortamında pencerelenmesi her iki işlevin bire bir çarpımı anlamındadır (şekil 9.3). Pencereleli  $\hat{f}(t)$  veri ile gösterilirse;

$$\hat{f}(t) = f(t) \cdot p(t) \quad (9.1)$$

olarak yazılır. Spektrum ortamında, bu denklem evrişime döner.

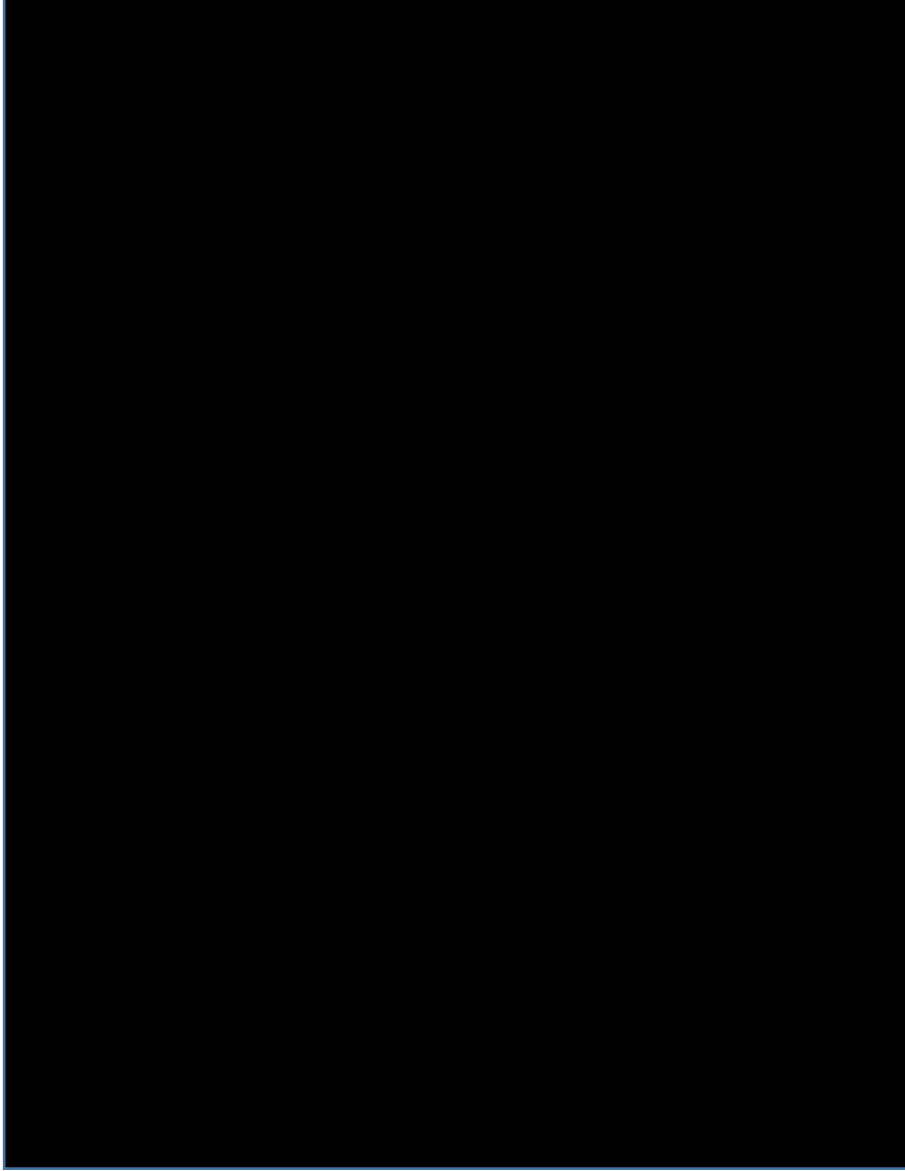
$$\hat{F}(w) = F(w) * P(w) \quad (9.2)$$

Burada “ $F(w)$ ” verinin, “ $P(w)$ ” da kullanılan pencerenin FD’leridir (bölüm 3, örnek 3.14). İstenen, veri spektrumunun, pencere etkisiyle bozulmamasıdır. Pencereleli verinin spektrumu ile penceresiz verinin spektrumlarının aynı olmalıdır. Dürtü işlevi kullanılarak (bkz denklem 5.18) pencere nedeni ile bozulmayacak spektrum,

$$\hat{F}(w) = F(w) * \Delta(w) \quad (9.3)$$

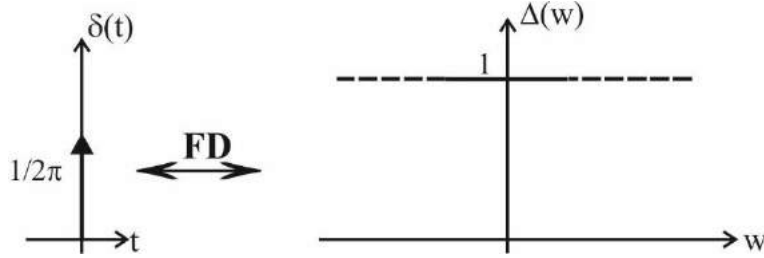
$$P(w) = \Delta(w) = 1 \quad (9.4)$$

$$\Delta(w) = \mathfrak{F}[\delta(t)] \text{dir.}$$



**Şekil 9.7** Dönemleri (T=5 sn ve T=20 sn) ve boyları eşit iki sinüs izinin spektral ortam davranışları **a)** 5 sn dönemli sinüs izi (pencere

boyu=5 sn) b) T=5 sn lik izin spektrmu c) 20 sn dönemli sinüs izi (pencere boyu=20 sn) d) T=20 sn lik izin spektrumu



Şekil 5.4 Birim dürtü işlevi ve Fourier dönüşümü

Bu durumda, veri spektrumunda, hiçbir bin etkilenmez. Çünkü her binin çarpılacağı katsayı "1" dir (şekil 5.4). Ancak pencere işlevleri bu koşulu sağlamazlar. Gerçekte,

$$P(w) \neq \Delta(w) \quad (9.5)$$

dır. Kullanılan pencerenin dikdörtgen pencere ise spektrumu,

$$P(w) = T \frac{\sin\left(\frac{wT}{2}\right)}{\frac{wT}{2}} \quad (9.6)$$

(9.6) denklemleri ile verilen "sinc" işlevidir (bkz bölüm 3 örnek 3.6). Burada "T", pencere boyudur. (9.6) denklemleri, örnek 3.6'daki gibi daha kısa olarak yazılabilir.

$$P(w) = T \operatorname{sinc}\left(\frac{wT}{2}\right) \quad (9.7)$$

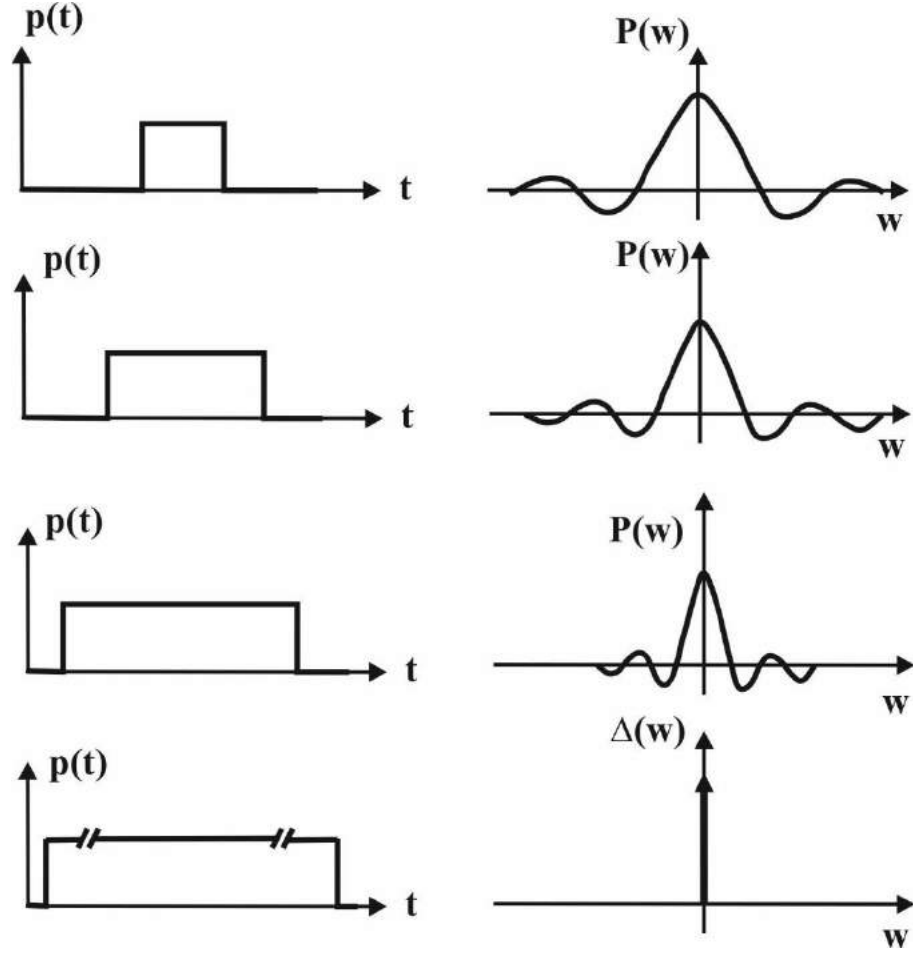
Dolayısıyla dikdörtgen işlevle pencerelenmiş  $\hat{f}(t)$  işlevinin spektrumu olan  $\hat{F}(w)$

$$\hat{F}(w) = F(w) * T \operatorname{sinc}\left(\frac{wT}{2}\right) \quad (9.8.a)$$

$$\hat{F}(w) = F(w) * T \frac{\sin\left(\frac{wT}{2}\right)}{\frac{wT}{2}} \quad (9.8.b)$$

bağıntılarıyla verilir. (9.8) denklemlerinden de anlaşılacağı gibi pencere boyu (dolayısıyla veri boyu) ne kadar uzun olursa "sinc"

işlevi, şekil 5.4 de görüldüğü gibi birim dürtü işlevinin spektrumuna yaklaşır. Bu nedenle pencere boyu uzadıkça, pencereden doğan etki en aza iner (şekil 9.8). Şekil 9.8 den pencere boyu ( $T$ ) artırıldıkça spektral ortamda, bant genişliğinde daralma olur. Kuşkusuz, bu özellik, pencere işlevinin analitik bağıntısına da bağlıdır.



**Şekil 9.8** Zaman ortamında dikdörtgen pencerenin boyunun artarak, spektral ortamda oluşan sinc işlevinin birim dürtüye yaklaşması

"sinc" işlevine ait bilgiler bölüm 3 te verilmiştir. "sinc" işlevin ilk sıfır noktası " $w=2\pi/T$ " dedir (bkz şekil 3.13). " $T$ " büyüdükçe bant genişliği daralır, limit durumunda birim dürtü işlevine yaklaşır. Dolayısıyla ana lob genişliği, pencere uzunluğu ile ters orantılıdır.



Pencereleme, spektral ortamda, evrişim işlemi olmasından ötürü spektrum ortamında yuvarlatmaya neden olur. Yuvarlatmanın derecesi ana lob bant genişliğine dolayısı ile pencerenin analitik denklemine (spektrum ortamında ana lobun bant genişliğine) ve pencere boyuna bağlıdır. Ancak dikdörtgen pencerenin ana lob genişliği, diğer pencerelere göre en dardır. Dolayısıyla, spektral ortamda, yuvarlatma etkisi en azdır.

FD tümlevinin sınırları dönem boyuyla sınırlıdır.

$$F(w) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jwt} dt \quad (9.9)$$

Son eşitlikte en önemli koşul; tümlevin bir tam dönem boyunca alınması gereğidir. Bu durumda, "w<sub>0</sub>" temel frekansları ve harmonikleri tüm frekanslarda, sıfırdan farklı bir genliğe sahip olarak görüleceklerdir. (9.9) denkleminde tümlevin başlangıcı önemsizdir. Önemli olan, tümlevin bir tam dönem boyunca alınmasıdır. Başka bir deyişle pencere boyu, temel dönem veya onun tam katları şeklinde seçilmezse spektrum yanlış hesaplanır.

#### 9.4 PENCERENİN ASİMPOTİK DEĞİŞİNTİSİ (VARYANS)

(a,b) aralığında tanımlı, bir f(t) işlevinin enerjisi bölüm 2.6, denklem (2.51) ile verilmiştir.

$$E = \int_a^b [\phi_m(t)]^2 dt \quad (2.51.a)$$

Şekil 9.9 da pencerenin parametrelerine göre (2.51.a) denklemi düzenlenerek pencere işlevi için yazılırsa,

$$E = \int_{-t_m}^{t_m} [p(t)]^2 dt \quad (9.10)$$

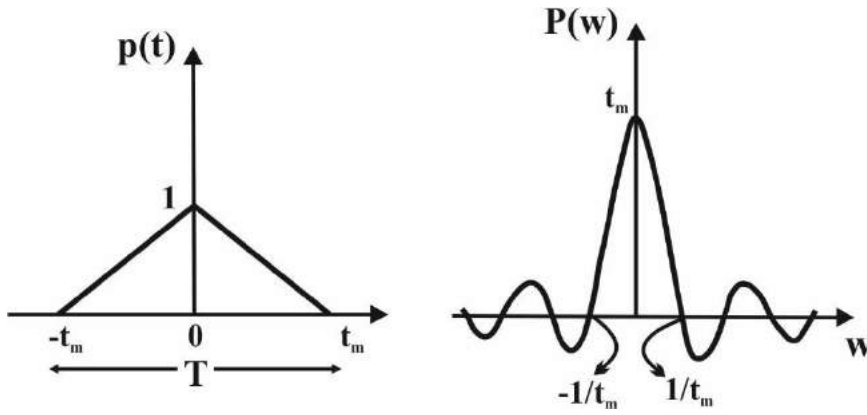
elde edilir. Güç ise, pencere boyuna bölünerek elde edilir. Elde edilen, aynı zamanda, asimptotik değişinti (varyans) olarak isimlendirilir. Araziden toplanan veri, değişik dönemli (veya dalga boyunda) birçok sinüzoidallerin toplamından oluşur. Dönemlerin bilinmemesinden ötürü, uygulamada, pencere boyunun nasıl seçileceği tartışmalıdır. Bu nedenle, profil boyunun (veya gözlemin yapıldığı sürecin) en büyük dalga boyunu (dönemi ) içerdiği varsayılır.

$$AD = \frac{1}{T} \int_{-t_m}^{t_m} [p(t)]^2 dt \quad (9.11)$$

(9.11) den anlaşılacağı gibi “T” küçüldükçe değışinti artacak ve dolayısıyla frekans ayrımlılık azalacaktır.

(9.11) bağıntısı kullanılarak tüm pencerelerin asimptotik değışintileri bulunabilir. Örneğin üçgen pencere için hesaplanan asimptotik

değışinti,  $AD = \frac{2 t_m}{3 T}$  dir.



**Şekil 9.9** Pencerelerin asimptotik değışintilerinin hesaplanmasında kullanılan parametreler

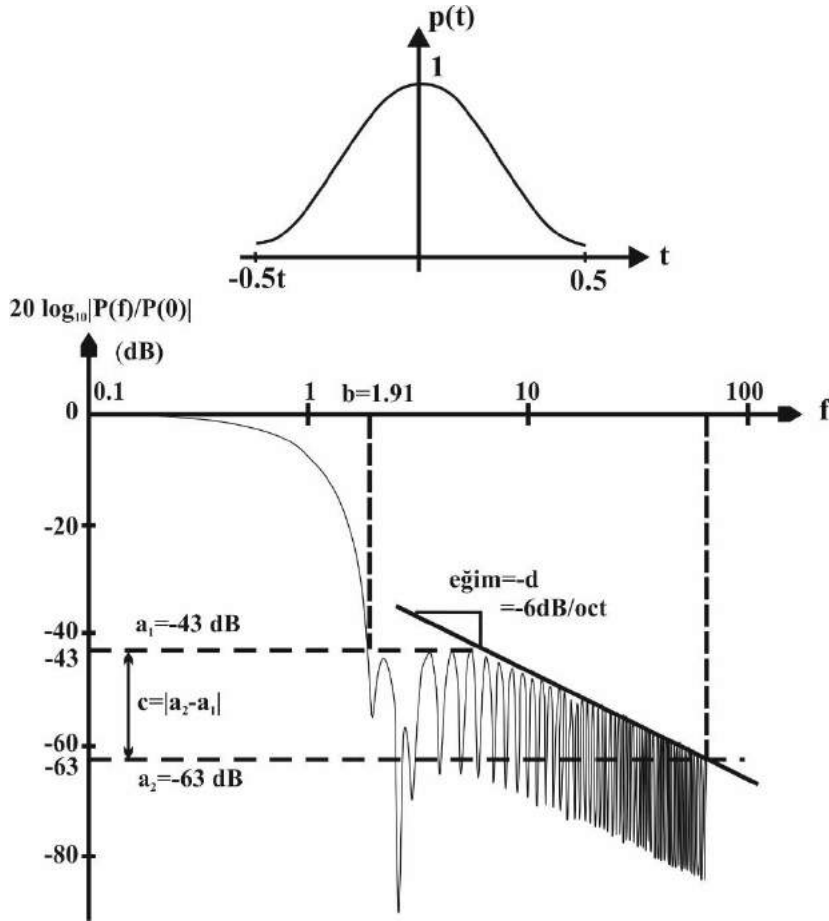
## 9.5 PENCERE TÜRLERİ

Uygulamada kullanılan çeşitli pencere türleri vardır. Pencerelerin seçiminde kullanılan parametreler aşağıda verilmiştir (şekil 9.10).

- 1) “c” parametresi: yan lobların en büyük ( $a_1$ ) ve en küçük ( $a_2$ ) değerleridir. Yan lobların genliklerini küçük olması istendiğinden  $A=|a_1-a_2|$  değerinin olabildiğince küçük olması yeğlenir.
- 2) “b” parametresi: pencerenin bant genişliğinin dar olması istenir. Dolayısıyla küçük “b” değerlerine sahip olan pencereler kullanılmak istenir.

- 3) “d” parametresi: yan lobların eğiminin çok olması, böylece spektrumda, etkisinin az olması ve hızlı sönümlenmesi istenir.

Şekil 9.10 da düşey eksen kazançtır (gain) birimi desibeldir (bkz bölüm10.7). Yukarıda verilen parametreler spektrum ortamında pencereleri karşılaştırmak için kullanılır. Ancak belirtilen üç koşulu sağlayan tek bir pencere yoktur. Bu nedenle birçok pencere türleri geliştirilmiştir. Uygulamada, amaca bağlı olarak seçilirler. Aşağıda tanıtılan pencere türleri Canitez ve diğ. (1977) den alınmıştır.



Şekil 9.10 Hamming penceresinin zaman ve spektral ortam görünüşleri (Geçkinli ve Yavuz 1977)

### 9.5.1 Dikdörtgen pencere (Daniell pencere)

$$p(t) = f(x) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{pencere dışı} \end{cases} \quad (9.12.a)$$

$$P(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \quad (9.12.b)$$

$$b = 0.81 \quad a_1 = -13 \text{ dB} \quad a_2 = -46 \text{ dB} \quad d = 6 \text{ dB/oct}$$

### 9.5.2 Kosinüs pencere

$$p(t) = \begin{cases} \cos(\pi t) & \leq 1/2 \\ 0, & \text{pencere dışı} \end{cases} \quad (9.13.a)$$

$$P(f) = \frac{2 \cos(\pi f)}{\pi(1-4f^2)} \quad (9.13.b)$$

$$b = 1.35 \quad a_1 = -23 \text{ dB} \quad a_2 = -84 \text{ dB} \quad d = 12 \text{ dB/oct}$$

### 9.5.3 Üçgen pencere (Bartlett)

$$p(t) = \begin{cases} 1 - 2|t| & \leq 1/2 \\ 0, & \text{pencere dışı} \end{cases} \quad (9.14.a)$$

$$P(f) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(\pi f / 2)}{\pi f / 2} \right]^2 \quad (9.14.b)$$

$$b = 1.63 \quad a_1 = -26 \text{ dB} \quad a_2 = -80 \text{ dB} \quad d = 12 \text{ dB/oct} \quad AD = \frac{2}{3} \frac{t_m}{T}$$

### 9.5.4 Hanning penceresi (geliştirilmiş kosinüs pencere)

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) & |t| \leq 1/2 \\ 0, & \text{pencere dışı} \end{cases} \quad (9.15.a)$$

$$P(f) = \frac{\sin(\pi f)}{2\pi f (1-f^2)} \quad (9.15.b)$$

$$b = 1.87 \quad a_1 = -32 \text{ dB} \quad a_2 = -118 \text{ dB} \quad d = 18 \text{ dB/oct} \quad AD = \frac{3}{4} \frac{t_m}{T}$$

### 9.5.5 Hamming pencere

$$p(t) = \begin{cases} 0.54 + 0.46\cos(2\pi t) & |t| \leq 1/2 \\ 0, & \text{pencere dışı} \end{cases} \quad (9.16.a)$$

$$P(f) = \frac{(1.08 - 0.16f^2)\sin(\pi f)}{2\pi f(1-f^2)} \quad (9.16.b)$$

$$b = 1.91 \quad a_1 = -43 \text{ dB} \quad a_2 = -63 \text{ dB} \quad d = 6 \text{ dB/oct}$$

### 9.5.6 Papoulis pencere

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} + \sin(2\pi t) + (1 - 2|t|)\cos(2\pi t) & |t| \leq 1/2 \\ 0, & \text{pencere dışı} \end{cases} \quad (9.17.a)$$

$$P(f) = \frac{2 + 2\cos(\pi f)}{\pi^2(1-f^2)^2} \quad (9.17.b)$$

$$b = 2.70 \quad a_1 = -46 \text{ dB} \quad a_2 = -145 \text{ dB} \quad d = 24 \text{ dB/oct}$$

### 9.5.7 Blackman pencere

$$p(t) = \begin{cases} 0.42 + 0.50\cos(2\pi t) + 0.08\cos(4\pi t) & |t| \leq 1/2 \\ 0, & \text{pencere dışı} \end{cases} \quad (9.18.a)$$

$$P(f) = \frac{(0.18f^2 - 1.68)\sin(\pi f)}{\pi f(1-f^2)(f^2-4)} \quad (9.18.b)$$

$$b = 2.82 \quad a_1 = -58 \text{ dB} \quad a_2 = -126 \text{ dB} \quad d = 18 \text{ dB/oct}$$

### 9.5.8 Parzen pencere

$$p(t) = \begin{cases} 1 - 24|t|^2(1 - 2|t|) & |t| < 1/4 \\ 2(1 - 2|t|)^3 & 1/4 \leq |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{pencere dışı} \end{cases} \quad (9.19.a)$$

$$P(f) = \frac{3}{8} \left[ \frac{\sin(\pi f / 4)}{\pi f / 4} \right]^4 \quad (9.19.b)$$

$$b = 3.25 \quad a_1 = -53 \text{ dB} \quad a_2 = -136 \text{ dB} \quad d = 24 \text{ dB/oct} \quad AD = 0.54 \frac{t_m}{T}$$

### 9.5.9 Tukey pencere

$0 \leq \beta \leq 1/2$  aralığında tanımlanır.

$$p(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left[ \frac{2\pi(t+\beta)}{1-2\beta} \right] & -1/2 \leq t \leq -\beta \\ 1 & -\beta \leq t \leq \beta \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left[ \frac{2\pi(t-\beta)}{1-2\beta} \right] & \beta \leq t \leq 1/2 \\ 0 & \text{pencere dışı} \end{cases} \quad (9.20.a)$$

$$P(f) = \frac{\sin \left[ \frac{\pi f(1+2\beta)}{2} \right] \cos \left[ \frac{\pi f(1-2\beta)}{2} \right]}{\pi f [1 - (1-2\beta)^2 f^2]} \quad (9.20.b)$$

$d=18 \text{ dB/oct}$

$a_1, a_2$  ve  $b; \beta$ 'nın bir işlevidir.

### 9.5.10 Üç katsayılı pencere

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1-4\beta}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + 2\beta \cos(4\pi t) & |t| \leq 1/2 \quad 0 \leq \beta \leq 0.45 \\ 0 & \text{pencere dışı} \end{cases} \quad (9.21.a)$$

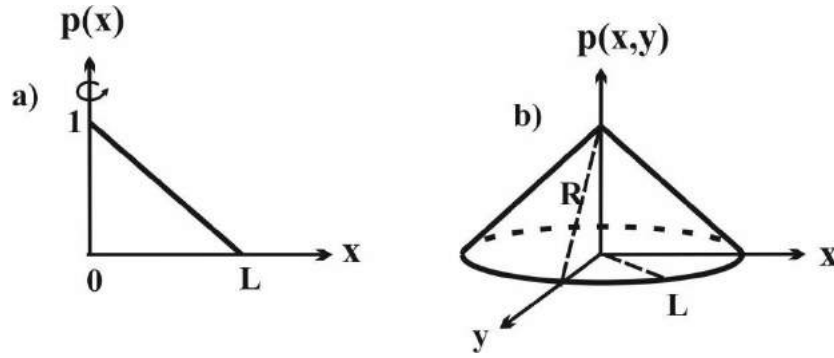
$$P(f) = \frac{[(1-16\beta)f^2 - (4-16\beta)] \sin(\pi f)}{2\pi f (1-f^2)(f^2-4)} \quad (9.21.b)$$

$d=18 \text{ dB/oct}$

$a_1, a_2$  ve  $b; \beta$ 'nın bir işlevidir.

## 9.6 İKİ BOYUTLU PENCERELER

Tüm tek boyutlu pencereler, düşey eksen boyunca çevrilerek iki boyutlu pencerelere dönüştürülebilir (bkz bölüm 2 ek1). Bu durumda, pencerelerin denklemlerinde basit geliştirmeler yapılarak iki boyutlu pencerelere ait bağıntılar elde edilir. Örneğin Şekil 9.9 da verilen bir boyutlu üçgen pencere, düşey ekseninde, çevrilerek, iki boyuta dönüştürülebilir (Şekil 9.11).



Şekil 9.11 a) Üçgen pencere (tek boyutlu) b) Konik pencere (çift boyutlu)

Bilgisayar çalışmalarına uygun olarak tek boyutlu üçgen pencerenin tanım aralığı

$$p(x_i) = \begin{cases} 1 - (x_i / L) & x_i < L \\ 0 & x_i > L \end{cases} \quad (9.22)$$

olarak verilir. (9.22) denklemi iki boyutlu olarak yazılırsa konik pencerenin tanım aralığı (Pınar 1983),

$$p(K, N) = \begin{cases} 1 - \frac{[(K-1)^2 + (N-1)^2]^{1/2}}{L-1} & R < L \\ 0 & R > L \end{cases} \quad (9.23)$$

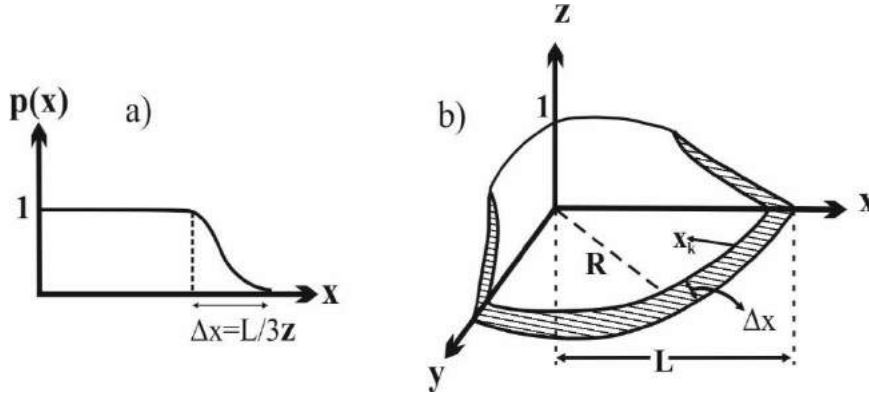
elde edilir. Benzer biçimde, denklemi (9.13.a) ile verilen kosinüs (geliştirilmiş) pencere için (Pınar 1983),

$$p(K, N) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos \left[ \frac{\pi(K^2 + N^2)^{1/2}}{(X^2 + Y^2)^{1/2}} \right] & K \leq X, \quad N \leq Y \\ 0 & K > X, N > Y \end{cases} \quad (9.24)$$

yazılabilir. Son olarak dikdörtgen pencere ile, kosinüs pencerenin birlikte kullanılmasından elde edilen törpülenmiş kosinüs çanı ve onun iki boyutlu görünümü Şekil 9.12.a-b de verilmektedir.

Törpülenmiş kosinüs çanının zaman (uzay) ortamı tanım bağıntısı;

$$p(K, N) = \begin{cases} 1 & R \leq X_k \\ 0.5 + 0.5 \cos \left\{ \frac{\pi \left[ (K - X_k - 1)^2 + (N - X_k - 1)^2 \right]^{1/2}}{\left[ (L - X_k - 1)^2 + (L - X_k - 1)^2 \right]^{1/2}} \right\} & X_k \leq R \leq L \\ 0 & R \geq L \end{cases} \quad (9.25)$$



**Şekil 9.12 a)** Törpülenmiş kosinüs çanı **b)** İki boyutlu törpülenmiş kosinüs çanı

olarak verilir (Pınar 1983). Bu denklemlerde:

K : x eksenli sayıdır.

N : y eksenli sayıdır.

$$R = \sqrt{K^2 + N^2}$$

X : Pencere x eksenli boyu.

Y : Pencere y eksenli boyu.



$X_k$ : Geometrik yerleri 1 olan noktaları içeren çemberin yarıçapı  
L : Pencerenin yarı boyu.  
 $\Delta x$  : L- $X_k$  Törpülenmiş kosinüs çanının yan kanatlarının eğimi.

### **Örnek 9.3**

Dikdörtgen pencere ile pencereli bir sinyalin frekans ortamı bağıntısı

$$F(\omega) = 4 \frac{\sin(2\omega)}{2\omega} 4\pi e^{\omega/2}$$
 olarak verilmektedir. Bu denklemde, ilk

terim pencerenin, 2. terim ise sinyalin spektrumuna aittir. Zaman ortamında, pencere,  $t=0$  noktası etrafında bakışık olarak yer almaktadır. Zaman ortamı pencere ve sinyali bulunuz.

### **Çözüm**

Verilen bağıntının 1. terimi sinc işlevidir.



<b>T</b>	<b>-2</b>	<b>-1</b>	<b>-0.5</b>	<b>0</b>	<b>0.5</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>f(t)</b>	0.24	0.8	2	4	2	0.8	0.24

**Çizelge 1** Çözüm sonuçları

### **Örnek 9.4**

“T” dönemli bir kosinüs izinin, “τ” uzunluklu, Hanning pencere ile pencerelenmesinden sonra elde edilen sinyalin, spektral ortam ifadesini bulunuz.

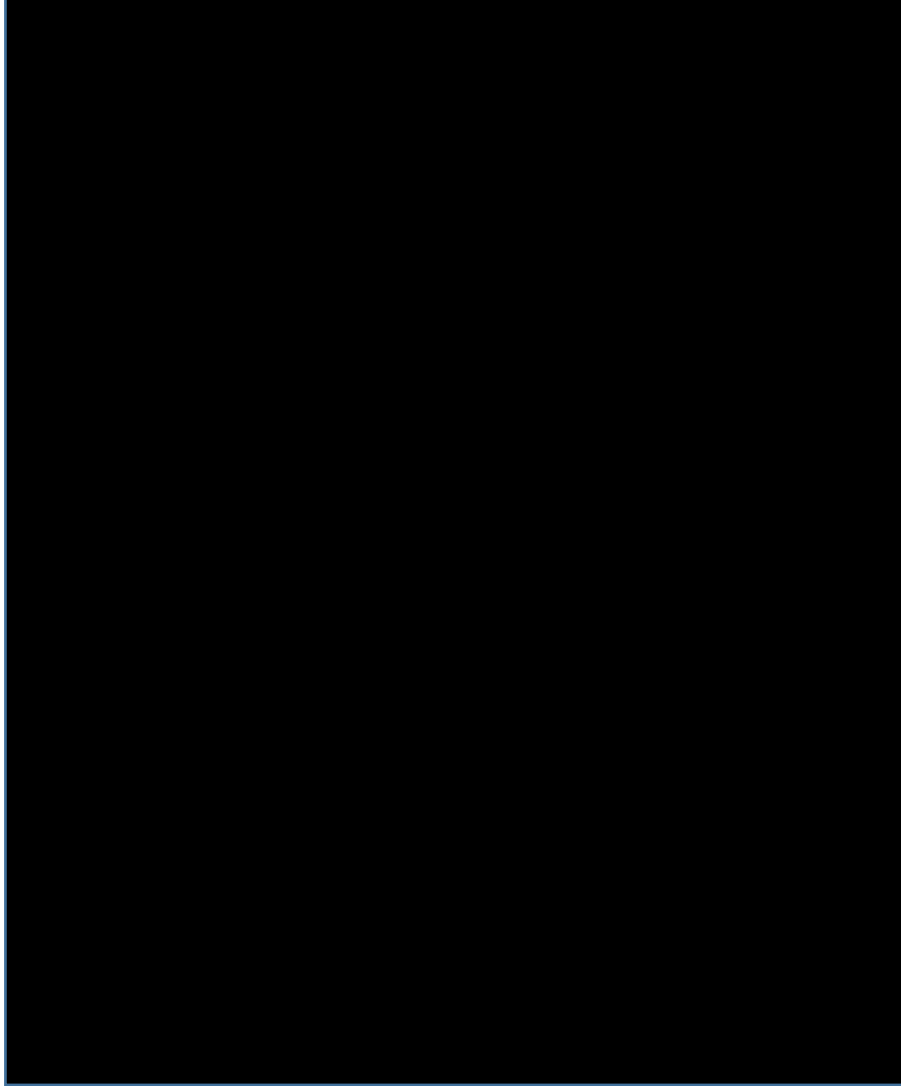
---

**Not:** Hamming pencerenin frekans ortamı bağıntısı

$$P(f) = \frac{\sin(\pi f)}{2\pi f(1-f^2)} \text{ dır.}$$

---

***Çözüm***

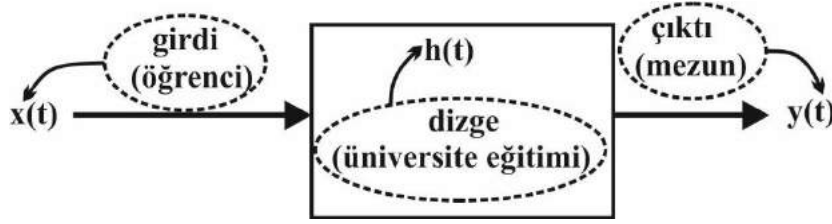


## BÖLÜM 10

### *DİZGELER*

#### *10.1 GİRİŞ*

Belirli bir düzen içinde, bir bütün oluşturmak üzere bir araya getirilmiş olan ve aralarında ilişkiler bulunan elemanlar topluluğu, dizge (düzenek, sistem) olarak isimlendirilir. Örneğin eğitim almak için üniversiteye giren öğrenci, girdikleri üniversite ve üniversiteyi bitirdikten sonra aldığı eğitim nedeniyle, birey (öğrenci) artık değişikliğe uğramıştır (şekil 10.1).



Şekil 10.1 Öğrenci, üniversite, mezun ilişkisi

Birey, girdiği bölümün özelliklerine uygun olarak eğitim alır, mezun olur. Üniversite; kuralları, öğretim üyeleri, laboratuvarları, idarecileri ve diğer olanakları ile bir bütündür. Burada, üniversite bir dizgedir (sistem). Çünkü belirli bir amaç çerçevesinde (eğitim verme) birleşmiş, değişmeyen birçok elemandan oluşmuştur. Bu elemanlar, bir bütün olarak davranır, gelen öğrenciyi bilgi ile donatarak mezun eder. Bu örnekte, dizgeye giren, birbirinden bağımsız elemanlar (öğrenciler) girer. Üniversiteyi bitirerek mezun olanlar ise dizge çıktısıdır. Giren bireyler, aldıkları üniversite eğitimlerinden etkilenerek mezun olmuşlardır. Dizgeye giren öğrencilerin nitelikleri değişiktir ve üniversite eğitiminden farklı etkilenerek, farklı donanımlarda mezun olmuşlardır. Dizge (üniversite), tüm giriş elemanlarına aynı eğitimi vermesine karşın, mezun olan bireylerde farklılıklar olacaktır. Tüm bu olgu; giriş, dizge ve çıkış ilişkisidir. Örnekten de anlaşılacağı gibi, dizge çıkışı, dizgeyi oluşturan

elemanların ve dizgeye giren bireylerin özelliklerine doğrudan bağlıdır.

Dizge sözcüğüne ait kesin bir matematiksel tanım verilemez. Ancak verilen her dizgeye ait bir matematiksel model geliştirilerek gerekli bağıntılar elde edilebilir. Örneğin şekil 10.1 de verilen dizgenin matematiksel olarak belirlenmesi; girdi ve çıktı toplulukları arasında, dizgenin davranışı ile tam uyum sağlayan bir dönüşümün bulunmasıdır.

Jeofizikte, doğrusal veya doğrusal duruma getirilebilen düzenekler (bkz Canitez 1984) kullanılır. Bir dizgenin doğrusal olabilmesi için FD ne ait olan aşağıdaki üç koşulun tümünü sağlaması gerekir. Herhangi bir tanesinin gerçekleşmemesi durumunda, dizge doğrusal değildir. Bu koşulları sağlayan dizgelere “doğrusal, zamanla değişmeyen dizgeler” adı verilir.

- FD’ nün doğrusallık özelliği (bkz bölüm 3.7.1)

$$\mathfrak{I}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(w) + a_2 F_2(w)$$

- FD’ nün zaman ölçekleme özeliği (bkz bölüm 3.7.2)

$$\mathfrak{I}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right)$$

- FD’ nün zaman kayma (öteleme) özeliği (bkz bölüm 3.7.4)

$$\mathfrak{I}[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(w)$$

Matematiksel olarak şekil 10.1 deki dizgenin giriş ve çıkış ilişkisi, evrişim (bkz bölüm 4.2) bağıntısıyla bilinir.

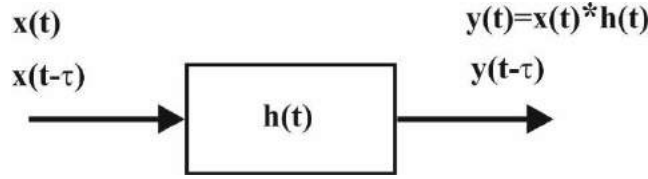
$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (10.1)$$

“y(t)” ve “x(t)” arasındaki ilişki, doğrudan doğruya “h(t)” işlevinin özelliklerine bağlıdır (bkz bölüm 10.2.4). Çıktının hangi özelliklere sahip olması isteniyorsa, “h(t)” dizgesi öyle düzenlenir. Örneğin bir sinyalin 0.3, 0.4 Hz frekanslarının giderilmesi istenirse, bu frekansları geçirmeyecek, diğerlerini geçirecek bir dizge düzenlenir. Çıktı izinde, 0.3, 0.4 Hz. frekansları bulunmaz. Aynı zamanda “h(t)”, kutu işlevi olarak isimlendirilir.

## 10.2 DİZGE

### 10.2.1 Tanım

Dizge işlevi, durağan ve zamandan bağımsızdır.  $x(t-\tau)$  girdisini,  $y(t-\tau)$  çıkışına dönüştürür (şekil 10.2). Bu işlem, zaman evrişim tümlevi (denklem 4.1) ile bilinir.



Şekil 10.2 Dizge giriş çıkış ilişkisi

Dizge, zaman ortamında evrişim tümlevi, frekans ortamında ise girişin spektrumu ve dönüşüm işlevlerinin bire bir çarpımı olarak bilinir. Evrişim tümlevi,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t \pm \tau) d\tau \quad (4.1)$$

verilmiştir. (4.1) süzgeç kuramında, yazım kolaylığı olması için,

$$x(t)=f_1(t), \quad h(t)=f_2(t), \quad y(t)=f(t)$$

olarak gösterilirse (şekil 10.2), (4.1) denklemi

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t \pm \tau) d\tau$$

durumuna gelir. Frekans ortamında (evrişim kuramlarından).

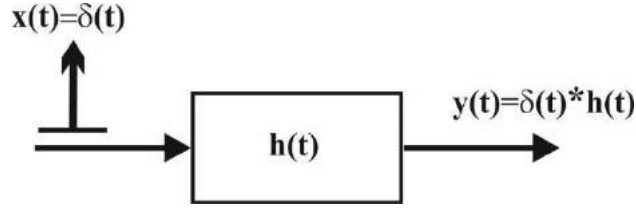
$$\mathfrak{F}[y(t) = x(t) * h(t)] \Rightarrow Y(w) = X(w).H(w) \quad (10.3)$$

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} \quad (10.4)$$

dır Son bağıntı dizgenin “dönüşüm işlevi” dir (transfer function - transfer fonksiyonu).

### 10.2.2 Dizgenin dürtü tepkisi (birim dürtüye verdiği yanıt)

Dizgeye giriş olarak birim dürtü işlevinin “ $\delta(t)$ ” kullanılmasında, doğrusal dizgenin "t" anında gösterdiği tepki, doğrusal dizgenin "dürtü tepkisidir (birim dürtüye verdiği yanıt)" (şekil 10.3).



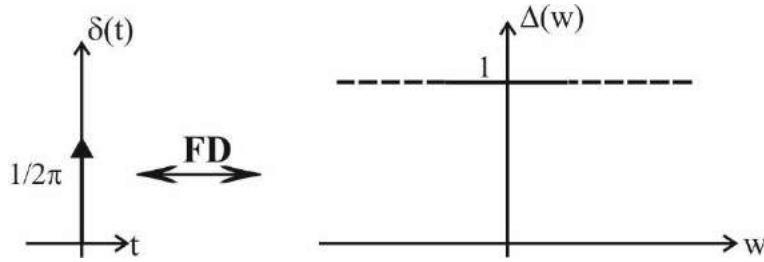
**Şekil 10.3** Dizgenin dürtü tepkisi

(10.1) bağıntısının FD alınarak (bkz zaman ve frekans evrişim kuramları, bölüm 4.2.1 - 4.2.2) frekans ortamında “dönüşüm işlevi” olan “ $H(w)$ ” elde edilir.

$$\mathfrak{F}[y(t) = \delta(t) * h(t)] \Rightarrow Y(w) = \Delta(w).H(w) \quad (10.5)$$

$$H(w) = \frac{Y(w)}{\Delta(w)} \quad (10.6)$$

Birim dürtü ve FD’ ü şekil 5.4 te verilmektedir (bölüm 5).



**Şekil 5.4** Birim dürtü işlevi ve Fourier dönüşümü

(10.5-10.6) eşitliklerinde  $\Delta(w)=1$  yazıldığında  $H(w)=Y(w)$  bulunur. Girdi olarak birim dürtünün kullanılması durumunda, spektral ortamda, doğrudan, dönüşüm işlevi elde edilir.

“ $H(w)$ ” nın TFD alınarak dürtü tepkisi (dizgenin birim dürtüye verdiği yanıt, tepki) bulunur.

$$h(t) = \mathfrak{F}^{-1}[H(w)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(w)e^{j\omega t} dw \quad (3.9)$$

Doğrusal dizgede kullanılan işlevlerin zaman ve frekans ortamı bağıntıları, çizelge 10.1 de toplu olarak verilmektedir.

GİRİŞ		ÇIKIŞ	
$t \leftarrow \text{FD} \Rightarrow$		$t \leftarrow \text{FD} \Rightarrow w$	
$x(t)$	$X(w)$	$y(t)$	$Y(w)$
$\delta(t)$	1	$h(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{ H(w) }{\cos[wt - \Phi(w)]} dw$	$Y(w) =  Y(w)  e^{j\Phi(w)}$
$u(t)$	$U(w) = \pi \Delta w = -1/j$	$s(t) = \frac{H(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{ H(w) }{w} \sin[wt - \Phi(w)] dw$	$S(w) = \pi  H(0)  \cdot \Delta(w) + \frac{ H(w) }{w} + e^{-j[\Phi(w) + \pi]}$

**Çizelge 10.1** Dizgede kullanılan işlevlerin zaman ve frekans ortamı bağıntıları  $h(t)$ : dizge işlevi,  $H(w)$ : dönüşüm işlevi (birim dürtüye verdiği yanıt),  $u(t)$ : birim basamak işlevi,  $s(t)$ : dizgenin birim basamak işlevine yanıtı

### 10.2.3 Dizge işlevine ait bağıntıların geliştirilmesi

Dizge, spektral ortamda, genlik (dönüşüm işlevi) ve evre spektrumları ile belirlenir. Genlik spektrumu (10.4), evre spektrumu ise (10.7) bağıntılarıyla verilir.

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} \quad (10.4)$$

$$\Phi_Y(w) = \Phi_X(w) + \Phi_H(w) + 2n\pi \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (10.7)$$

$\Phi_Y(w)$ : çıktının evre spektrumu

$\Phi_X(w)$ : girdinin evre spektrumu

$\Phi_H(w)$ : dönüşüm işlevinin evre spektrumudur.

Dizgeye ait giriş ve çıkış güçleri için

$$|Y(w)|^2 = |X(w)|^2 \cdot |H(w)|^2 \quad (10.8)$$

yazılır.  $|Y(w)|^2$ : dönüşüm işlevinin gücüdür ve çift işlev olduğundan evresi yoktur.

Girdi olarak, karmaşık işlevlerin  $[x(t)=e^{j\omega t}]$  kullanılması durumunda, (10.2) eşitliği,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jw\tau} h(t-\tau) d\tau \quad (10.9)$$

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jw(t-r)} h(-r) dr$ dır. Eğer “ $\tau=t-r$ ” ile gösterilirse, elde edilir. Dizge işlevi çifttir. Dolayısıyla  $h(-r)=h(r)$  dir.

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jw(t-r)} h(r) dr \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwt} e^{-jwr} h(r) dr \\ &= e^{jwt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwr} h(r) dr = e^{jwt} H(w) \end{aligned}$$

(3.38), (3.39) bağıntıları kullanılarak,

$$F(w) = G(w) - j S(w) \quad (3.38)$$

$$F(w) = |F(w)| e^{j\phi(w)} \quad (3.39)$$

$$y(t) = e^{jwt} \cdot H(w) = |H(w)| e^{j[wt - \Phi(w)]} \quad (10.10)$$

bulunur. Bu durumda (3.39) dan yararlanarak,

$$|H(w)| e^{-j\Phi(w)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(r) e^{-jwr} dr \quad (10.11)$$

gerçel ve sanal kısımları için,

$$|H(w)| \cos[\Phi(w)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(r) \cos(wr) dr \quad (10.12.a)$$

$$|H(w)| \sin[\Phi(w)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(r) \sin(wr) dr \quad (10.12.b)$$

eşitliklerine ulaşılır. (10.12) bağıntılarından, çıkış ve giriş sinyallerinin, aynı frekansta, farklı evre değerlerine sahip olduğu görülür.

(10.12) eşitliğinde, zaman (veya evre, grup) gecikmesi olarak,

$$\tau = \frac{\Phi(w)}{w} \quad (10.13.a)$$

evre hızı

$$\frac{1}{\tau} = \frac{w}{\Phi(w)} \quad (10.13.b)$$

tanımlanır. Sismik yöntemler, sığ derinliklerde (yüzey) uygulanır. Dalgalar, ortama, katar biçiminde yayılır. Sığ derinlikler, tektonik, vb nedenlerden ötürü karmaşa içerir. Dolayısıyla yayılan dalgaların frekansları, ortam nedeniyle değişikliğe uğrar. Değişen frekanslar,



hızları değiştirir. İlerleyen dalga katarının zarfı hızı (bkz bölüm 6.3.5), grup hızıdır. Grup hızı, evre hızının türevinden bulunur (10.14) denklemi). Böylece hız saçılım eğrileri elde edilir (velocity dispersion  $\left[\frac{1}{\tau}\right]' = \frac{dw}{d\phi(w)}$  curves). (10.14)

Evre kayması, evre – hız spektrumundan elde edilir. Söz konusu ilke, tüm dalga yayılımları için geçerlidir. Örnek olarak sismik dalgalar, radyo dalgaları, jeomanyetik yayılımlar (pulsasyon), atmosferik olaylar, deniz dalgaları yayılımı vb. verilebilir.

#### 10.2.4 Dizge dönüşüm işlevi ve özellikleri

1) “H(w)”, “h(t)” işlevinin FD dür. Kutupsal koordinatlarda, FD

$$H(w) = |H(w)|e^{j\phi(w)} \quad (3.39)$$

(3.39) eşitliği ile verilmiştir. (3.39) eşitliğinde, doğrusal dizgeyi belirleyen iki önemli büyüklük vardır.

|H(w)|: Doğrusal dizgenin genlik yanıtıdır.

$\phi(w)$ : Doğrusal dizgenin evre yanıtıdır.

Dizge çıkışının genlik ve evre spektrumları;

$$Y(w) = |H(w)| \cdot |X(w)| \quad (10.15)$$

$$\arg Y(w) = \phi(w) + \arg X(w) \quad (10.16)$$

olarak yazılır. Burada, x(t) dizgeye giriş işlevi ve  $X(w) = \mathfrak{F}[x(t)]$  dır.

2) Dizgenin genlik yanıtı daima “+” dır.

$$H(-w) = H(w) \rightarrow |H(-w)| = |H(w)|$$

Son eşitlik, dizge genlik yanıtının çift bakışık olduğunu belirtir.

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{F}[x(t)] = X(w) \\ \mathfrak{F}[y(t)] = Y(w) \end{array} \right\} \text{ ise daima } \left\{ \begin{array}{l} X(-w) = X^*(w) \\ Y(-w) = Y^*(w) \end{array} \right. \quad (10.17)$$

ve

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} \rightarrow H(-w) = \frac{Y(-w)}{X(-w)} = H(w) = \frac{Y^*(w)}{X^*(w)} = H^*(w) \quad (10.18)$$

yazılır. Yani

$$|H(-w)| = |H^*(w)| = |H(w)| |e^{j\phi(w)}| = |H(w)| \quad (10.19)$$

dır. Dolayısı ile,

$$|H(-w)| = |H(w)| \quad (10.20)$$

dır. Dizgenin evresi,

$$\phi(w) = \phi(-w) \quad (10.21)$$

sürekli tek bakışıktır. (10.21) bağıntısından

$$\phi(w) = \arg Y(w) - \arg X(w) \quad (10.22)$$

yazılır. Buradan,

$$\phi(-w) = \arg Y(-w) - \arg X(-w)$$

$$\phi(-w) = -\arg Y(w) + \arg X(w)$$

$$\phi(-w) = -[\arg Y(w) - \arg X(w)]$$

$$\phi(w) = \phi(-w) \quad (10.23)$$

elde edilir (bkz 3.47 denklemleri).

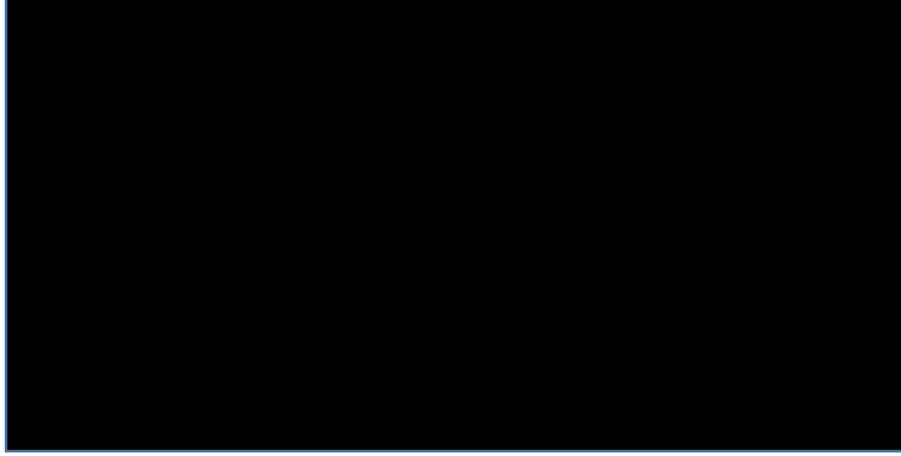
### **Örnek 10.1**

Türev alabilen bir dizgeyi, analitik olarak hesaplayınız.

#### ***Çözüm***

Dizgenin birim dürtüye verdiği tepkiden yararlanılarak çözüm yapılır (şekil 10.2). Birim dürtü,  $t=0$  da  $\delta(t)=1$  dir (bkz bölüm 5). Bu durumda girdi olarak dürtü işlevi,





### 10.2.5 Sayısal süzgeç düzenlemede karşılaşılan sorunlar

(10.28) ve (10.29) bağıntıları türev alan bir doğrusal dizgenin genlik (dönüşüm işlevi) ve evre yanıtlarıdır. Dizgenin dürtü tepkisi (10.27) bağıntısının TFD alınarak bulunur.

Kuramsal olarak kolayca düzenlenen süzgeçlerin, sayısal olarak düzenlenmesinde sorunlar vardır. Karşılaşılan zorluklar aşağıda sıralanmıştır:

- Bir dizgenin böyle gerçek izlere uygulanabilir olması için öncelikle doğrusal ve zamanla değişmeyen dizge özelliklerini içermesi gerekir.

$$y(t) = \int_{t=0}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (10.30)$$

- (10.2) tümleminde, dizge tek yanlıdır. Bu nedenle, tümlemin alt sınırı sıfırdır.
- Evrişim tümleminin bilindiği gibi sınırları “ $\pm\infty$ ” dur. Bunun için evrişim tümleminin üst sınırının da “ $\infty$ ” olmaktan kurtarılması gerekir (pencereleme). Üst sınırın saptanması için frekans ortamında tanımlanan kesme frekansından yararlanılır (bkz bölüm 10.3.2.1).
- Dizge, Dirichlet koşullarına uymalıdır. Yani

$$\int_{-T/2}^{T/2} |h(t)| dt < \infty \quad (10.31)$$

olmalıdır. Son eşitliğin bir diğer anlamı, dizgenin sonlu enerjiye sahip olmasıdır (dizgenin pencereleme gerekliliği).

Örnek 10.1 de türev alan bir dizgenin hesaplanması verilmiştir. Jeofizik uygulamalarda dönüşüm işlevi, amaca göre seçilir. Böylece farklı işlemler yaptırılacak çeşitli süzgeçler düzenlenebilir. Örnek olarak; alçak-yüksek-bant geçişli süzgeçler, analitik uzanımlar, türev, vb. (örnek 10.4-10.5) verilebilir. Jeofizikte 1. türev yerine çoğunlukla 2. türevler ile uğraşılır. (10.27) bağıntısı bir kez daha uygulanırsa 2. türev elde edilir. 1. türev katsayılarının ardışık olarak uygulanmasından diğer derecelerden türevler bulunur. Örneğin 1. türev katsayısı "n" kez uygulanırsa n. dereceden türev elde edilir. Ancak böyle ardışık kullanma yerine doğrudan doğruya hesaplama yolu ile 2. türev alabilecek süzgeç düzenlenebilir.

### ***10.3 ÖZELLİKLERİNE GÖRE DİZGELERİN SINIFLAMASI***

Dizgeler kullanımları ve özelliklerine bağlı olarak sınıflanabilir.

- 1) Doğal süzgeçler: Veri toplanırken, insanın kontrolünde olan dizgelerdir. Veri toplanırken, belirli bir amaçla yönelik yararlı bilgilerin ayıklanarak toplanmasında önemlidir. Örneğin hız dispersiyon ve sönüm (attenuation) bilgilerinin elde edilmesinde bu tip düzenekler kullanılır.
- 2) Aletsel süzgeçler: Aletlerin yapımında kullanılan elektronik elemanlardır. Söz konusu dizgeler üretilebilir.
- 3) Sayısal (matematiksel) süzgeçler: Kayıt edilmiş sayısal verilere uygulanır. Kayıtlı veriler üzerinde matematiksel işlemlerin yapılması için, öncelikle, veriler sayısallaştırılır. Dolayısıyla, bu tip uygulamalarda sayısal süzgeçler geliştirilir ve kullanılır (bkz. bölüm 10.6).

Dizgeler kullanılarak, sinyal içindeki bileşenler kolaylıkla ayrılabilir. Bunun için Jeofizikte, çeşitli süzgeçler oluşturulmuştur (bkz bölüm 10.5).

- 1) Frekans süzgeçleri: Bu tip süzgeçler, frekans bileşenlerin ayrılmasında kullanılır. Sinyali oluşturan bileşenlerin frekans ayırımı ne kadar çoksa, süzgeç o kadar başarılıdır. Sinyallere

ait temel frekansların çok yakın olması durumunda başarı ortadan kalkar.

- 2) Hız süzgeçleri: Frekans dizgelerinden farklı olarak, farklı dalga hızları, bileşenlerinden ayrılabilir. Bu yöntem, özellikle sismikte, veri toplarken, veri dizilimiyle ilgi uygulamalarda kullanılır.
- 3) Polarizasyon (veya mod) süzgeçleri: Bu tip dizgeler, sinyal ve gürültü içindeki parçacık hareketliliği farklılığı temeline dayanır.
- 4) Genlik süzgeçleri: Genelde, bir sinyal içinde, sinyal ve gürültünün genlikleri farklıdır. Gürültü genliği, sinyalin genliğine göre çok küçüktür. Bu tip süzgeçler, farklı genlikleri süzer. Bu yöntem kullanılarak, bir depremin yıkıcı olup olmadığına karar verecek sistemler kurulur. Buna göre, otomatik olarak uyarı yapılır veya yapılmaz.

Dizgeler, özelliklerine bağlı olarak, giriş sinyalini değiştirirler. Bu sınıfa giren çok sayıda dizge türü aşağıda verilmiştir.

### 10.3.1 Bozulmasız dizgeler

Girdi “ $x(t)$ ” izini, “ $y(t)=K.x(t-\tau)$ ” çıktısına dönüştüren düzeneklerdir. Burada,

$K$  : giriş izinin çarpanı olan bir sabit,

$\tau$ : kaymadır. Zaman öteleme özeliği, dizge için kullanılırsa,

$$Y(w) = K \cdot e^{-jw\tau} \cdot X(w) \quad (10.32)$$

yazılır. (10.31) denkleminde

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = \frac{K \cdot e^{-jw\tau} \cdot X(w)}{X(w)} \Rightarrow H(w) = K \cdot e^{-jw\tau}$$

(10.33)

bulunur. Son eşitlikten genlik ve evre spektrumları,

$$|H(w)|=K \quad (10.34)$$

$$\Phi(w)=-w\tau \quad (10.35)$$

elde edilir.

### 10.3.2 Genliği değiştiren dizgeler

$|H(w)| \neq K$ ,  $\Phi(w)=-w\tau$  koşulunu sağlayan dizgelerdir. “ $|H(w)|$ ”nın aldığı değerlere göre bant geçişli ideal süzgeçleri oluşturur.

### 10.3.2.1 İdeal alçak geçişli dizgeler

$$|H(w)| = \begin{cases} K & |w| < w_c \\ 0 & |w| > w_c \end{cases} \quad (10.36)$$

Son eşitlikte “ $w_c$ ” kesme frekansıdır. Dizge, kesme frekansına kadar olan frekansları geçirir, daha yükseklerini süzer (şekil 10.4).

Şekil 10.4 ten süzgeç, frekans ortamında tanımlı, “ $w_c$ ” genişlikli, birim basamak (10.4.a) işlevidir. Kesme frekansı kullanıldığında

$$H(w) = K \cdot P_d\left(\frac{w}{2w_c}\right) e^{-jwz} \quad (10.37)$$

elde edilir. “ $P_d(w)$ ”, dikdörtgen işlevidir (çizelge 10.1). İki basamak işlevinden, dikdörtgen işlevin elde edilmesi ile ilgili örnekler 3.2, 3.10, 3.11, 4.6 de ve bağıntıları çizelge 10.1 dedir. Şekil 10. 4 a’ da frekans ortamında tanımlanmış iki birim basamak işlevinden (kırmızı ve mavi kesikli çizgiler), ideal alçak geçiş dizgesinin (kırmızı düz dikdörtgen çizgi) elde edilmesi verilmiştir. “ $w_c$ ” kesme frekansıdır. “ $w_c$ ” den daha büyük frekanslar (kısa dönemler) geçirilmez. Mavi düz çizgi alçak geçişli düzeneğin evre spektrumudur. Şekil 10. 4 b’ de frekans ortamında tanımlı alçak geçişli dizgenin, TFD alınarak zaman ortamındaki biçimi görülmektedir. Frekans ortamı dikdörtgen işlevi zaman ortamında sinc’e dönüşür (bkz bölüm 3, şekil 3.14). Şekil 10. 4 c’ de spektral ortamda tanımlanmış basamak işlevinin, TFD alınarak, zaman ortamındaki, birim basamak işlevine yanıtı verilmiştir.

### 10.3.2.2 Genliğinin bölünmesiyle elde edilen bant geçişli dizgeler

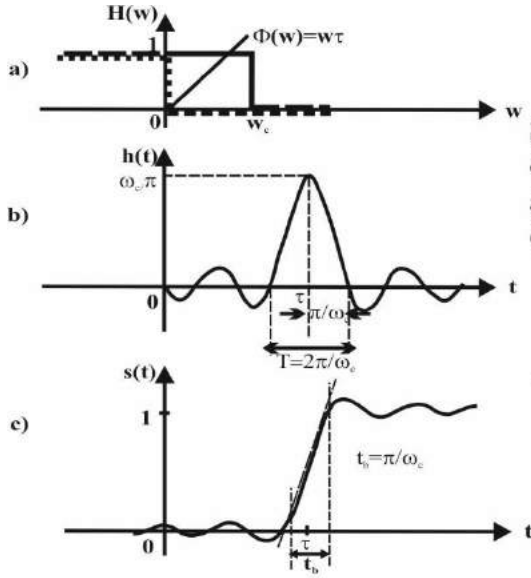
Alçak geçişli süzgeç genliğinin yarısı kullanılarak çeşitli bant geçişli süzgeçler elde edilir. (şekil 10. 5).

### 10.3.2.3 Yüksek geçişli dizgeler

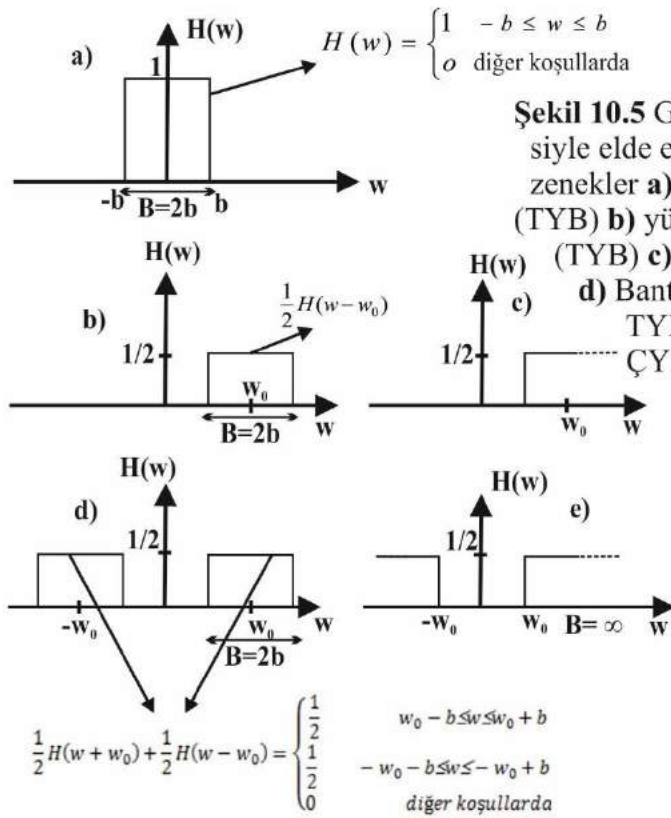
Bant geçişli dizgelerin birer kenarları sonsuza atılarak elde edilir. Söz konusu dizgeler tek yan bantlı (şekil 10.5 c) ve çift yan bantlı olarak (şekil 10.5 e) düzenlenebilir. İlgili bağıntılar çift yan bant içindir.

$$H(w) = H_1(w) + H_2(w) = |H_1(w)|e^{-j\phi_1(w)} + |H_2(w)|e^{-j\phi_2(w)} \quad (10.38)$$

(10.38) eşitliğinde  $H_1(w)$  ve  $H_2(w)$  işlevleri, düşey eksene göre bakışıktır. Dolayısıyla alçak geçişli dizge için,



**Şekil 10.4 a)** Frekans ortamı tanımlı ideal alçak geçişli dizge (dizgenin genlik/dönüşüm işlevi ve evre spektrumları **b)** dizgenin birim dürtüye yanıtı **c)** dizgenin basamak işlevine yanıtı



**Şekil 10.5** Genlik bölünmesiyle elde edilen ideal düzenekler **a)** bant geçişli (TYB) **b)** yüksek geçişli (TYB) **c)** yüksek geçişli (TYB) **d)** Bant geçişli (ÇYB) TYB: tek yan bant ÇYB: çift yan bant

$$H_1(w) = H_1(w_0 + w) + H_2(-w_0 + w)$$

yazılır. Frekans öteleme kuramından,

$$h_1(t)e^{jw_0t} \Leftarrow FD \Rightarrow H_1(w - w_0) = H_1(w)$$

$$h_1(t)e^{-jw_0t} \Leftarrow FD \Rightarrow H_1(w + w_0) = H_2(w)$$

elde edilir. Euler kuramı kullanılarak

$$2h_1(t)\cos w_0t \Leftrightarrow H(w) \text{ veya } h(t) = 2h_1(t)\cos w_0t$$

bulunur. Bu denklemlerden, alçak geçişli bir dizgenin, birim dürtüye yanıtlarına ulaşılır.

### **Örnek 10.2**

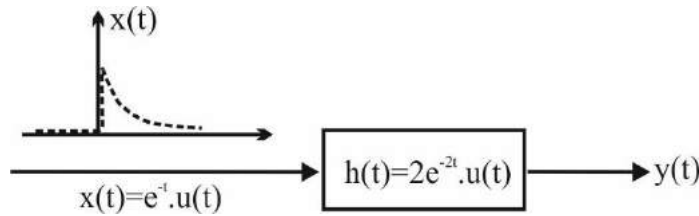
Bir doğrusal dizgeye giriş ve çıkış şekil 10.2 de verilmiştir. Dizge çıkışının genlik ve evre spektrumlarını bulunuz.

#### ***Çözüm***



### **Örnek 10.3**

Bir dizgeye giriş işlevi şekil 10.6 da verilmiştir. Birim basamak işlevi tanımını kullanarak dizge çıktısını bulunuz.

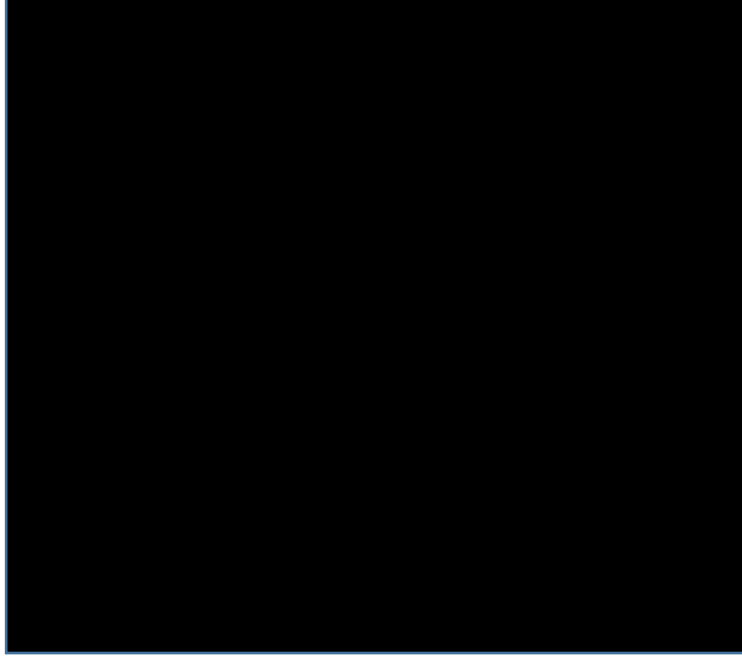


**Şekil 10.6** Örnekte verilen dizge



### **Çözüm**

Birim basamak işlevi bölüm 4 te verilmiştir.



Birim basamak işlevi tanımı kullanılarak tümlev sınırlanır.



$$y(t) = 2e^{2t}(e^{-t} - 1) \Rightarrow y(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t})$$

#### **10.3.2.4 Evre bozan dizgeler**

“H(w)” sabit, “φ(w)” doğrusal değildir. “Tüm geçirgen süzgeçler” olarak isimlendirilir. Bu tip süzgeçler, dizge giriş ve çıkış sinyallerinin enerjilerinin karşılaştırılması amacıyla (10.38 denklemi) kullanılır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Y(w)|^2 dw = \int_{-\infty}^{\infty} |X(w)|^2 dw \quad (10.39)$$

#### 10.4 GÜRÜLTÜLÜ SİNYALLER

Gözlem sonucu elde edilen verilerin iki bileşeni vardır. Bunlar, sinyalin bilgi içeren “s(t)” kısmı ve “g(t)” ile gösterilen gürültüdür. Bu koşulda, gürültülü iz aşağıdaki gibi yazılır.

$$f(t)=s(t)+g(t) \quad (10.40.a)$$

İm içinde istenmeyen frekanslar **gürültü** olarak tanımlanır. Genelde, sinyal içindeki en büyük frekanslı (en kısa dönemli) olaylardır (bkz. örnek 8.1).

Jeofizik gözlemler, yere ait fiziksel büyüklüklerin ölçülmesi için yerden alınan ölçülerdir. Mühendislik alanlarında en çok gürültü ve saçılmalar Jeofizik gözlemlerde bulunmaktadır. Saçılmalar, yeraltı düzensizliklerden ve uygulanan yöntemin doğasından kaynaklanabilir. Örneğin elektrik yöntemlerde, yere karışan kaçak akımlar, elektromanyetikte atmosferik olaylardan oluşan yüksek frekanslı değişimler, gravite ve manyetikte yüzeye yakın kütleler, vb. gürültü olarak nitelendirilebilirler.

En genel anlamda, istenen sinyal (bilgi içeren im) ile üzerindeki gürültünün oranına sinyal/gürültü oranı denilir (R).

$$R= s(t)/g(t) \quad (10.40.b)$$

veya desibel olarak sinyal/ gürültü,

$$R = 10 \log_{10} \frac{s(t)}{g(t)} \quad (10.40.c)$$

olarak tanımlanır. Burada “s(t)” ve “g(t)” sinyale ait fiziksel büyüklüklerdir. Örneğin, fiziksel büyüklük için enerji ve güç tanımları kullanılabilir.

Gürültü için yukarıda yapılan tanımlar, sayısal verilerin işlenmesinde yetersizdir. Her olayda, gürültü, bazı varsayımlarla simgeleştirilir. En genel durumda, gürültü tanımı için bölüm 4.4, (4.71) bağıntısıyla verilen tutarlılık spektrumu (coherente spektrum) kullanılabilir. Tutarlılık spektrumu izleyen bağıntıyla verilir.

$$|K_{12}(w)| = \frac{|S_{12}(w)|}{\sqrt{S_{11}(w)S_{22}(w)}} = \sqrt{\frac{\Gamma_{12}^2(w)+Q_{12}^2(w)}{\Gamma_{11}(w) \cdot \Gamma(w)}} \quad (4.71)$$

S<sub>11</sub>: f<sub>1</sub>(t) işlevinin güç spektrumu,

S<sub>22</sub>: f<sub>2</sub>(t) işlevinin güç spektrumu,

S<sub>12</sub>: f<sub>1</sub>(t) ve f<sub>2</sub>(t) işlevlerinin çapraz güç spektrumu,

Γ (w) ve Q(w): (4.66-4.67) denklemlerinde tanımlanmıştır.

(4.71) bağıntısını ilk kısmı kullanılarak,

$$[K_{12}(w)]^2 = \frac{[S_{12}(w)]^2}{S_{11}(w) \cdot S_{22}(w)} \quad (10.41)$$

yazılabilir. Son eşitlik, “f<sub>1</sub>(t)” ve “f<sub>2</sub>(t)” işlevleri cinsinden,

$$[K_{12}(w)]^2 = \frac{[F_{12}(w)]^2}{F_{11}(w) \cdot F_{22}(w)} \quad (10.42)$$

gösterilebilir. Son denklemdeki işlevlerin anlamları, bölüm 4 te verilmiştir.

$$F_{12}(w) = F_1^*(w) \cdot F_2(w) = |F_1(w)| \cdot |F_2(w)|$$

$$|F_{12}(w)|^2 = |F_1(w)|^2 |F_2(w)|^2$$

(10.43)

$$F_{11}(w) = |F_1(w)|^2 \quad (10.44.a)$$

$$F_{22}(w) = |F_2(w)|^2 \quad (10.44.b)$$

$$|F_{12}(w)|^2 = F_{11}(w) F_{22}(w) \quad (10.44.c)$$

(10.41) bağıntısında, “F<sub>S</sub>(w)=F<sub>11</sub>(w)” bilgi sinyali, “F<sub>G</sub>(w)=F<sub>11</sub>(w)” gürültü sinyali olarak alınırsa,

$$[K_{SG}(w)]^2 = \frac{[F_{SG}(w)]^2}{F_S(w) \cdot F_G(w)} \quad (10.45)$$

elde edilir.

Farklı kayıtların karşıt ilişkileri kullanılarak, sinyalin gürültü düzeyi için karar verilebilir.

4 adet gürültülü sinyalin analizi şekil 10.7 de gösterildiği gibi ayrılabilir.



Şekil 10.7 Sinyallerin gürültü analizleri

Şekil 10.7 de, 4 sinyal olması nedeniyle, “i”, 1-4 aralığındadır.

$|\sum_{i=1}^4 F_{SGi}|$  : “F<sub>S</sub>” ve “F<sub>G</sub>” dizilerinin çarpımlarının toplamının mutlak değeri,

$\sum_{i=1}^4 |F_{SGi}|$  : “F<sub>S</sub>” ve “F<sub>G</sub>” dizilerinin çarpımlarının mutlak değerlerinin toplamıdır.

- sinyalin gürültülü olması durumunda  $K_{SG} < 1$
- sinyalin gürültüsüz olması koşulunda  $K_{SG} = 1$  dir (Randall, R. B., Tech, B. A., 1977).

#### **10.4.2 Gürültülü sinyallerin süzülmesi**

Zaman ve spektral ortamda gürültü içeren bir iz, (10.40.a) bağıntısıyla verilmiştir. Frekans ortamında

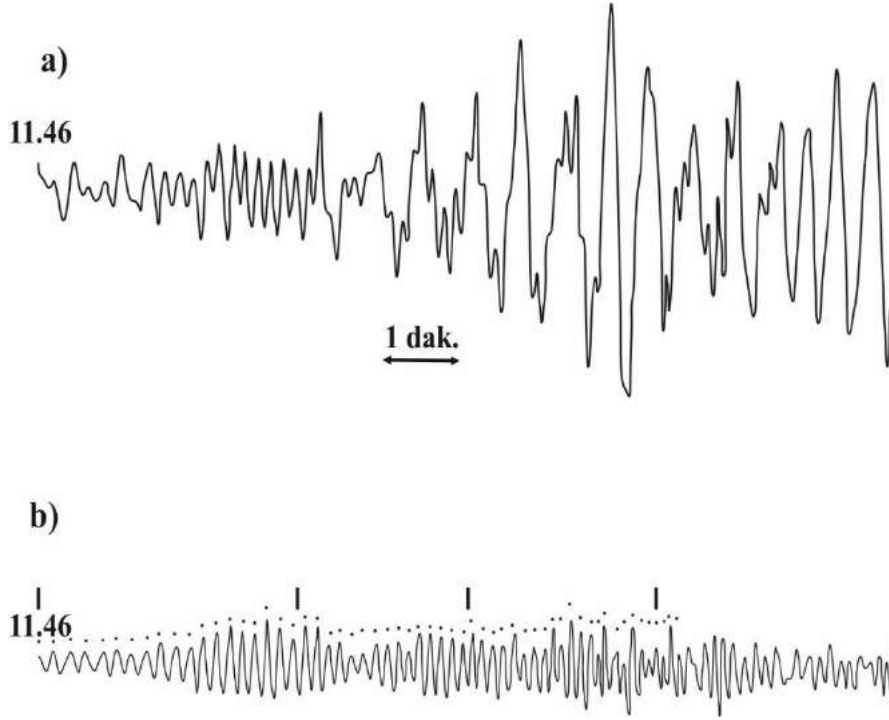
$$F(w) = S(w) + G(w) \quad (10.46)$$

olarak tanımlanır. (10.46) bağıntısında, “S(w)”, sinyalin, “G(w)”, gürültünün spektrumudur. Gürültü ayıklanmak istenirse, gürültü frekansının yok edileceği bir alçak geçişli süzgeç uygulanır.

$$[S(w) + G(w)].H(w) = S(w) \Rightarrow H(w) = \frac{S(w)}{S(w) + G(w)}$$

(10.47)

Şekil 10.8 de 17.08.1963 te Ryukyu adasında oluşan bir depremin, Upsala gözlem evinde kaydedilmiş sinyali görülmektedir (Bath, M., 1974). 11.46 da kayıt edilen bu izden 6-15 saniyelik dönemleri geçirilerek, diğer dönemlerin süzülmesinden sonra Rayleigh dalgası elde edilebilir.



**Şekil 10.8** a) Upsala deprem istasyonu tarafından 17.08.1963 tarihinde saat 11.46 da kayıt edilen Ryukyu adası depremi b) Deprem sinyaline uygulanan 6-15 sn dönemli sinyalleri geçiren bant geçişli süzgeçten sonra elde edilen iz, Rayleigh dalgalarının yüksek modlarını açıkça göstermektedir.

### 10.5 DİZGELERİN JEOFİZİKTE KULLANILMASI

Jeofizikte, 1 veya 2 bağımsız değişken kullanılmasına göre 1 veya 2 boyutlu dizgeler uygulanır.

#### 10.5.1 Tek boyutlu dizgeler

##### 10.5.1.1 Kuram

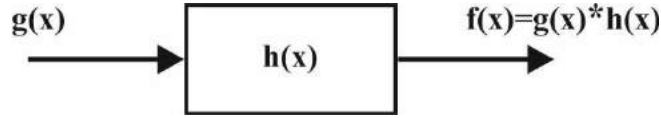
Bir dizgenin girdisi “ $x(t)$ ”, dizge işlevi “ $h(t)$ ” ve çıktısı ise “ $y(t)$ ” ile gösterilirse, süzgeçleme

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (10.2)$$

evrişim tümleviyle bilinir (bölüm 10.2). Şekil 10.9 da verilen parametreler giriş, çıkış ve dizge işlevlerinin elde edilmesinde kullanılır.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) h(x-\alpha) du \quad (10.48)$$

Son denklemde “ $\alpha$ ” kaymadır.



Şekil 10.9 Sayısal dizgelerde kullanılan gösterimler.

(10.48) denkleminde dizgenin birim dürtüye verdiği tepki (kısaca dizge işlevi),  $|x| \geq X$  sınırları dışında  $h(x) = 0$  dır.

$$f(x) = \int_{-x}^x g(\alpha) h(x-\alpha) du \quad (10.49)$$

$G(u) = F(u) \cdot H(u)$  Dalga sayısı ortamında evrişim, çarpıma döner.

$u$ :  $x$  bağımsız değişkenine karşılık gelen frekans ortamı değişkendir. Açısal frekans cinsinden kullanılmaktadır.

Dizge işlevi,  $|x| \geq X$  sınırları içinde tanımlı, dışında  $h(x) = 0$  dır.

$$H(u) = \mathfrak{F}[h(x)] = \int_{-X}^X h(x) e^{-jux} dx \quad (10.50)$$

Euler bağıntısı kullanılarak

$$H(u) = \int_{-X}^X h(x) [\cos(ux) - j \sin(ux)] dx$$

yazılır. Dönüşüm işlevi düşey eksene göre bakışıktır (bkz şekil 10.5). Bu nedenle yukarıdaki eşitlikte, sanal kısım ortadan kalkar. Dizge işlevi, sıfırdan başlatılır (nedensellik ilişkisi). Böylece FD eşitliği kosinüs dönüşümüne döner.

$$H(u) = 2 \int_0^X h(x) \cos(ux) dx \quad (10.51)$$

(10.51) bağıntısı, düzenlenmesi istenen dizgenin dönüşüm işlevidir. Bu dizgenin birim dürtüye yanıtı, son bağıntının iki tarafının TFD alınarak bulunur.

$$h(x) = \mathfrak{F}^{-1}[H(u)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-u_c}^{u_c} H(u) e^{jux} du \quad (10.52)$$

Son eşitlikte,

$u_c$ : kesme frekansdır (veya kesme dalga sayısı). Kesme frekansı, geçirilmemesi istenen frekans olarak seçilir.

### 10.5.1.2 Tek boyutlu dizgenin sayısallaştırılması

Şekil 10. 9 daki gösterimler kullanılarak sayısal evrişim,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k \Delta x) g(x - k) \quad (10.53)$$

Sınırlar “ $\infty$ ” dan kurtarılarak, dizge çıkışı

$$f(x) = \sum_{k=-X/\Delta x}^{X/\Delta x} h(k \Delta x) g(x - k) \quad (10.54)$$

(10.54) eşitliğinde  $\Delta x=1$  alınarak (bölüm 10.5.1.3 te verildiği gibi  $F_{Nyq}=0.5$  devir/veri aralığını karşılar)

$$f(x) = \sum_{k=-X/\Delta x}^{X/\Delta x} h(k) g(x - k) \quad (10.55)$$

$\Delta x$  :  $x$  bağımsız değişkenine ait örnekleme aralığı, örnekleme aralığı “1” olarak alındığı için “ $k$ ” zaman ortamı eksen sayıcısıdır.

“ $h(x)$ ” işlevinin FD alınarak dönüşüm işlevi

ile verilmiştir. (10.51) eşitliği sayısal olarak yazılırsa

$$H(u) = 2 \sum_{k=0}^X h(k) \cos(ku) \quad (10.56)$$

dizge dönüşüm işlevi elde edilir. (10.56), frekans ortamında, dizge düzenlenirken kullanılacak temel denklemdir. “ $h(k)$ ” sayısal değerleri ise birim dürtüye yanıttır. Son bağıntının TCD alınarak bulunur. Zaman ortamında elde edilen bu işlev sayısal olacağından “dizge ağırlık işlevi” olarak isimlendirilebilir.

$$h(k) = 2 \sum_{\ell=0}^{u_c = F_{Nyq}/\Delta u} H(\ell, \Delta u) \cdot \cos(\ell \cdot \Delta u \cdot k)$$

(10.57)

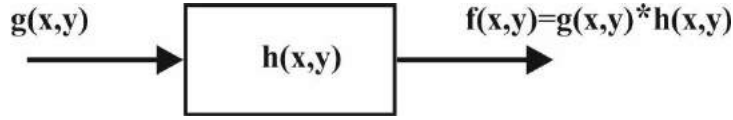
Son eşitlikte, “ $\ell$ ” eksen sayıcısıdır (tam sayı).

Ağırlık işlevi, frekans ortamında sayısal olarak düzenlenir, ters kosinüs dönüşümüyle zaman (uzay) ortamına geçilerek elde edilir. Ağırlık katsayı dizeyini oluşturan işleç sayısı tek sayıda seçilerek evre kaymasının önüne geçilir ve dizey bir pencere kullanılarak sınırlandırılır.

### 10.5.2 İki boyutlu dizgeler

Bu tip dizgeler daha çok potansiyel alan verilerinde (gravite, manyetik, doğal potansiyel), sismolojide (alan istasyon analizleri), vb, kullanılır. Potansiyel alanlarda ilk uygulamaları Dean 1958 ile başlamış, gelişimi Fuller (1967) ile sürmüştür.

En genel durumda 2B bir dizgeye giriş ve çıkış simgeleri şekil (10.14) de verilmiştir.



Şekil 10.10 İki boyutlu dizge ve giriş, çıkış ilişkileri

$x, y$ : gözlem değerlerinin, o yönlerdeki bağımsız değişkenleridir. Potansiyel alanlarda birimi, uzunluk birimleridir (cm, m, km, vb).

$g(x, y)$ : Arazide, 2B' lu olarak ( $x$  ve  $y$  yönlerinde) toplanan verilerdir.

$h(x, y)$ : Amaca uygun olarak (alçak, yüksek, bant geçişli süzgeçler, analitik uzanımlar, türev süzgeçleri, vb) düzenlenmek istenen süzgeçlerdir. Bu süzgeçlerin sayısal düzenlenmesi bölüm (10.6) da verilmektedir.

$f(x, y)$ : İstenen çıktıdır (türev alınmış veya analitik uzanım yapılmış).

#### 10.5.2.1 Kuram

Bölüm 10.2.1 de tek boyutlu olarak verilen dizge kuramı, 2B lu olarak aşağıda verildiği gibi geliştirilebilir.

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha, \beta) f(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (10.58)$$

$$f(x, y) = \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y h(\alpha, \beta) f(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (10.59)$$

(10.59) denkleminde, dizge işlevi  $|x| \geq X$  ve  $|y| \leq X$ , için,  $h(x, y) = 0$  dır.

Dalga sayısı ortamında evrişim, çarpıma döner.

$$G(u, v) = F(u, v) \cdot H(u, v) \quad (10.60)$$

$u$ :  $x$  eksenine karşılık gelen dalga sayısı ortamı değişkeni,

$v$ :  $y$  eksenine karşılık gelen dalga sayısı ortamı değişkenidir.

“ $u$ ” ve “ $v$ ” açısal frekans cinsinden kullanılmaktadır.



Dizge işlevi,

$$H(u, v) = \mathfrak{F}[h(x, y)] = \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y h(x, y) \cdot e^{-j(ux,vy)} dx dy$$

dır. Uygulamada, veri gözlemlerinin başlangıcı, sıfır koordinat noktası olarak alınır. Bu nedenle dizge başlangıcı da sıfır olmalıdır.

$$H(u, v) = 4 \int_0^X \int_0^Y h(x, y) \cdot e^{-j(ux,vy)} dx dy$$

Euler eşitliği kullanılarak üstteki bağıntı trigonometrik olarak yazılır.

$$H(u, v) = 4 \int_0^X \int_0^Y h(x, y) \cdot \begin{Bmatrix} [\cos(ux) - j\sin(ux)] \\ [\cos(vy) - j\sin(vy)] \end{Bmatrix} dx dy$$

Dalga sayısı ortamında oluşturulan tüm dizgeler bakışıktırlar. Bu nedenle sanal kısımlar düşer.

$$H(u, v) = 4 \int_0^X \int_0^Y h(x, y) \cos(ux) \cos(vy) dx dy \quad (10.61)$$

(10.61) bağıntısı, düzenlenmesi istenen dizgenin dönüşüm işlevidir.

Bu dizgenin birim dürtüye yanıtı, son bağıntının iki tarafının TFD alınarak bulunur.

$$h(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}[H(u, v)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-u_c}^{u_c} \int_{-v_c}^{v_c} H(u, v) e^{j(ux,vy)} du dv \quad (10.62)$$

denkleminde dizgenin dönüşüm işlevi,  $|u_c| \geq u_0$ ,  $|v_c| \geq v_0$  sınırları dışında  $h(x,y)=0$  dır. (10.62) bağıntısında,

$u_c$  : "u" eksenine ait kesme dalga sayısı (veya frekans),

$v_c$  : "v" eksenine ait kesme dalga sayısıdır (veya frekans).

Kesme frekansı, istenen frekans olarak seçilir (bkz bölüm 10.6).

Bölüm 7 den Nyquist frekansı,

$F_{Nyq} = \frac{1}{2\Delta t}$  devir/veri aralığıdır. Bu bağıntıda veri aralığının birim (1) seçilmesi durumunda  $F_{Nyq} = 0.5$  devir/veri aralığı bulunur. Bu koşulda, frekans ortamında, kesme frekansının 0.5 devir/veri aralığı seçilmesi, Nyquist frekansını karşılar.

$$H(u, v) = 4 \int_0^X \int_0^Y h(x, y) \cos(ux) \cos(vy) dx dy \quad (10.63)$$

(10.63) bağıntısı, düzenlenmesi istenen dizgenin dönüşüm işlevidir

### 10.5.2.2 İki boyutlu dizgenin sayısallaştırılması

Şekil (10.14) te verilen parametreler kullanılarak ve (10.61), (10.62) bağıntıları sayısal yazılarak iki boyutlu sayısal dizge elde edilir.

$$g(x, y) = \sum_{m=-\frac{x}{\Delta x}}^{\frac{x}{\Delta x}} \sum_{n=-\frac{y}{\Delta y}}^{\frac{y}{\Delta y}} f(x - \Delta x m, y - \Delta y n) \cdot h(m \Delta x, n \Delta y) \Delta x \Delta y \quad (10.64)$$

$\Delta x = \Delta y = 1$  alınarak

$$g(x, y) = \sum_{m=-x}^x \sum_{n=-y}^y f(x - m, y - n) \cdot h(m, n) \quad (10.65)$$

bulunur. (10.65) eşitliği, uzay ortamında, süzgeçlenmiş verinin bağıntısıdır. Dizgenin dönüşüm işlevi (10.66) ve ağırlık katsayı dizeyi (veya birim dürtüye yanıt) (10.67) de verilmiştir.

$$H(u, v) = 4 \sum_{m=0}^x \sum_{n=0}^y h(m, n) \cos(um) \cos(vn) \quad (10.66)$$

$$h(n, m) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{\ell=0}^{F_{Nyq}/\Delta u} \sum_{k=0}^{F_{Nyq}/\Delta v} H(\ell, \Delta u, k, \Delta v) \frac{[\cos(\ell, \Delta u, m)]}{[\cos(k, \Delta v, n)]} \Delta u, \Delta v \quad (10.67)$$

Son eşitlikte,  $m, n, \ell, k$  uzay ve dalga sayısı ortamlarının eksen sayıcılarıdır (tamsayı).

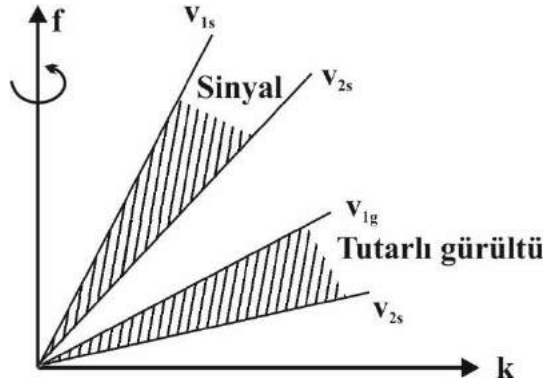
(10.66, 10.67), eşitlikleri dizge düzenlenmesinde kullanılan temel bağıntıdır.  $H(\ell, \Delta u, k, \Delta v)$  sayısal işlevi, dalga sayısı ortamında düzenlenir. 2B, TCD ile uzay ortamına dönülerek ağırlık katsayı dizeyi bulunur (10.67).

### 10.5.3 Frekans-dalga sayısı (f-k) veya hız dizgeleri

Sinyal ve gürültü frekanslarının yakın olması durumunda, frekans ortamı dizgelerle, süzme işlemi yapılamaz. Örneğin sismik yansıma çalışmalarında durum böyledir. Kayıtlar, genelde, yeryüzünün sığ kısmında alınır. Yüzeyden toplanan yansıma verilerine, yüzey dalgaları karışır. Ground roll ismi verilen bu dalgalar düşük hızlı, yüksek genlikli ve frekansları yansıma sinyallerinin frekanslarına yakındır, yansıma sinyallerini maskeleyebilir. Bu sorunun giderilmesi için arazide jefon dizilimlerinden yararlanılabilir, yığma işlemleri yapılabilir veya f-k dizgeleri kullanılır. Yüzey dalgaları ile birlikte, rüzgar, kaynak nedeniyle oluşan gürültüler de benzer özellikler taşır. Bunlar kolaylıkla kolayca saçılabilen dalgalardır. Evreleri benzerlik gösterebilir. Dolayısıyla tutarlı gürültü (coherent noise) olarak isimlendirilir. Böyle olaylarda frekans süzgeçleri yerine (f-k)

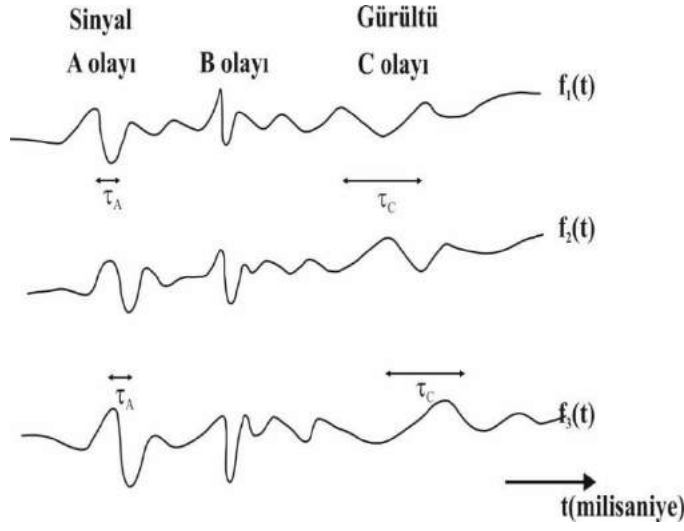
süzgeçleri kullanılarak gürültü bastırılır, sinyalin etkisi artırılır. Ayırmalık, görünür hızlar ve dolayısıyla eğim farklılığından oluşur. Bu nedenlerden ötürü (f-k) dizgeleri; “hız”, “fan” veya “moveout” süzgeçleri olarak da isimlendirilir.

Şeki A da sinyal ve gürültünün frekansları yakın, hızlarının ise farklı olması hız süzgeçlerinin uygulanmasındaki temeli oluşturur. Şekilden, sinyal ve gürültünün buldukları alanlara ait hızların alt ve üst sınırları  $v_{1s}$ ,  $v_{2s}$  ve  $v_{1g}$ ,  $v_{2g}$  dir. Şekil 10.11 dan görüldüğü gibi f-k ortamında, sinyal ve gürültü, hız farklılığından dolayı farklı bölgelerde yer almaktadır.

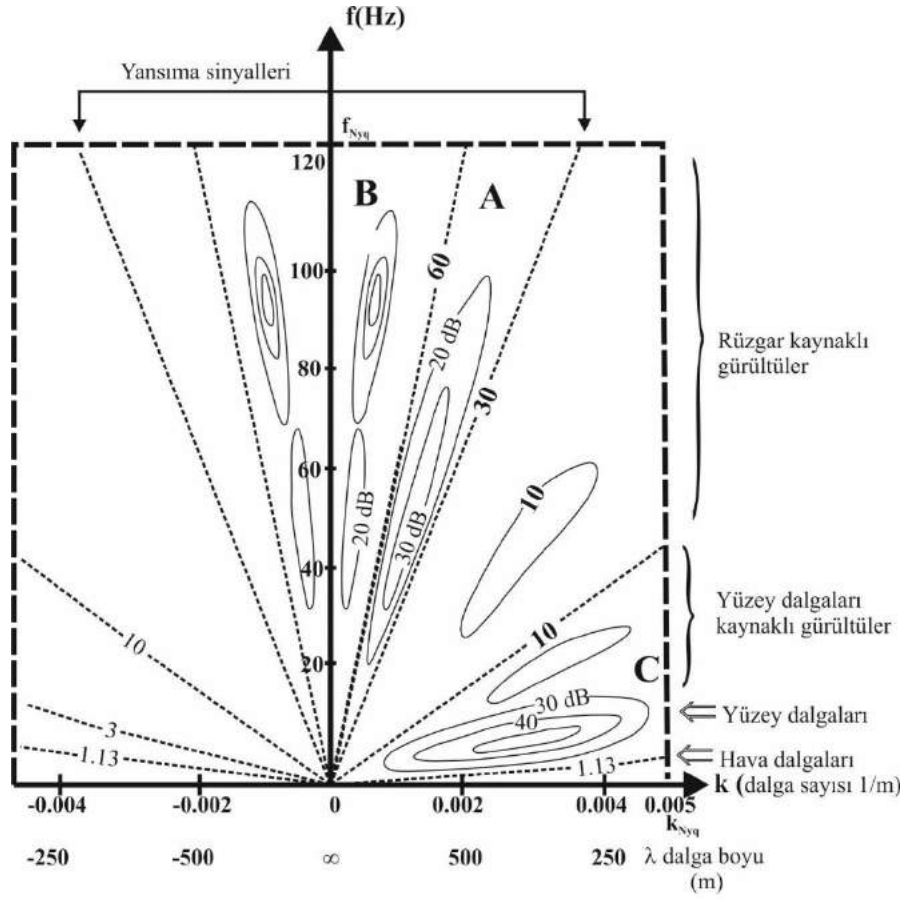


**Şekil 10.11** Sinyal ve gürültünün hız farklılığının f-k ortamında gösterilmesi.

3 profil boyunca, bir sismik sinyalin kaydı şekil 10.12 de verilmiştir. Kayıtlar, eşit aralıklı dizilmiş jeofonlar tarafından alınmıştır. İzler 0.4 milisaniye ile örneklenmiştir. Jeofonlar arası uzaklık  $\approx 300$  m dir. Sinyaller kayıtçılara “ $\tau$ ” zaman farklılığıyla gelir. Şekilden de görüldüğü gibi “A” ve “B” olayları sinyal, “C” olayı da gürültüdür. Söz konusu sinyalin tutarlılık spektrumu (f-k ortamı) şekil (10.12) de verilmiştir (bölüm 4, 4.69 bağıntısı). Şekilden, “A-B-C” olayları net olarak ayrılmaktadır. Bu koşulda, ”A” olayının öne çıkartılabilmesi için dönüşüm işlevinin denklemi (10.47) ile verilen biçimde bir süzgeç düzenlenir. En genel durumda, diğer farklı evre hızların söndürülerek, istenilen olayın ön plana çıkartılması için, hız dizgelerinin dönüşüm işlevleri, şekil (10.12, 10-13) deki gibi düzenlenir.



Şekil 10.12 Üç profil boyunca alınmış sismik yansıma kaydı



Şekil 10.13 Bir yansıma kaydının tutarlılık spektrumu

Şekil 10. 13 de  $\lambda=1/k$  dır. Sinyallerde bulunan “A”, “B”, “C” olayları net olarak ayrılmaktadır. “A, B” asıl sinyal, “C” gürültüdür. Gürültü rüzgardan, yüzey dalgalarının saçılımından, havadan vb. kaynaklanabilir.



**Şekil 10.14** Merkeze yerleştirilmiş hız ( $v_A=\Delta x/\tau_A$ ) olaylarını çıkartacak (“A” olayına ait), hız dizgesinin düzenlenmesi



**Şekil 10.15**  $|v|>f/k$  görünür hızlarını öne çıkartan hız süzgeçlerinin düzenlenmesi.

### ***10.5.3.1 Hız dizgelerine ait bağıntuların geliştirilmesi***

Sismik (sismoloji) verileri zaman ve uzay ortamında (t-x) toplanır. Toplanan 2 boyutlu veri, spektral ortama, 2B FD ile aktarılır. Bu durumda bağımsız değişkenler, frekans ve dalga sayısıdır (f-k). f-k ortamında tanımlı hız dizgesi,

$$H ( f , k ) = \begin{cases} 1 & -\frac{|f|}{v} < k < \frac{|f|}{v} \\ 0 & \text{diğer koşullarda} \end{cases}$$

(10.68)

dır (şekil 10.15). Son bağıntıda “k” dalga sayısıdır.

$$k = \frac{|f|}{v} = \frac{K}{2\pi} = \frac{1}{\lambda} \quad (10.69)$$

“K” dalga sayısı, “λ” görünür dalga boyudur. Süzgecin sınır frekansları, Nyquist frekanslarıdır.

$$f_{Nyq} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (10.70)$$

$$k_{Nyq} = \frac{1}{2\Delta x} \quad (10.71)$$

Son eşitliklerde; Δt, örnekleme aralığı, Δx, uzay ortamı örnekleme aralığıdır (sismikte, jeofon aralıkları). (10.63) denklemlerle verilen dizgenin, birim dürtüye verdiği yanıt, 2B TFD denklemleriyle verilir.

$$h(t, x) = \mathfrak{F}^{-1}[H(f, k)] = \iint_{-\infty}^{\infty} H(f, k) \cdot e^{2j\pi(ft-kx)} dk df \quad (10.72)$$

(10.63) bağıntısının iki tarafı “Δt.Δx” ile çarpılır (sürekli işlevlerde, ayrık olarak örneklenmiş sayısal değerler, sürekli biçime dönüşür).

Kayıttaki “n.” örnekleme noktası “T<sub>N</sub>=nΔt” ve başlangıçtan sonraki “m.” gözlem noktası (sismikte m. Jeofon) “X<sub>M</sub>=mΔx” ile gösterilerek, (10.52) denklemi yeniden yazılırsa,

$$h(T_n, X_m) = \Delta t \Delta x \int_{-f_{Nyq}}^{f_{Nyq}} \int_{-k}^k e^{2j\pi(ft_n - kx_m)} dk df \quad (10.73)$$

(10.64) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\frac{1}{-2j\pi X_m} \int_{-\frac{|f|}{v}}^{\frac{|f|}{v}} (-2j\pi X_m) e^{-2j\pi X_m k} dk = \frac{e^{2j\pi X_m} - e^{-2j\pi X_m}}{2j\pi X_m} = \frac{\text{Sin}(2\pi X_m)}{\pi X_m} \quad (10.74)$$

bulunur. (10.74) eşitliği (10.73) de yerine yazılarak,

$$h(T_n, X_m) = \Delta x \Delta t \int_{-f_{Nyq}}^{f_{Nyq}} \frac{\text{Sin}(2\pi X_m) \frac{|f|}{v}}{\pi X_m} e^{-2j\pi T_n f} df \quad (10.75)$$

elde edilir. FD lerinin bakışım özelliğinden ötürü, sanal kısım ortadan kalkar, geriye FD nün gerçel kısmı, yani kosinüs dönüşümü kalır.

$$h(T_n, X_m) = \frac{2\Delta t \Delta x}{\pi X_m} \int_0^{\frac{1}{2\Delta t}} \cos(2\pi f n \Delta t) \cdot \sin\left(2\pi f \frac{\Delta t}{\Delta x} X_m\right) df \quad (10.76)$$

Tümlev tablolarından,

$$\int \sin(mx) \cdot \cos(nx) dx = -\frac{\cos(mx+nx)}{2(m+n)} - \frac{\cos(mx-nx)}{2(m-n)} \quad (10.77)$$

olarak verilmektedir.

$$h(T_n, X_m) = \frac{2\Delta t \Delta x}{\pi X_m} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos \frac{2\pi\Delta t}{2\Delta t} \left(\frac{X_m}{\Delta x} + n\right)}{4\pi\Delta t \left(\frac{X_m}{\Delta x} + n\right)} - \frac{\cos \frac{2\pi\Delta t}{2\Delta t} \left(\frac{X_m}{\Delta x} - n\right)}{4\pi\Delta t \left(\frac{X_m}{\Delta x} - n\right)} \\ -\frac{1}{4\pi\Delta t} \left[ \frac{1}{\left(\frac{X_m}{\Delta x} + n\right)} + \frac{1}{\left(\frac{X_m}{\Delta x} - n\right)} \right] \end{array} \right\} \quad (10.78)$$

Son denklemde, kosinüs terimleri birbirilerini götürür. Bu koşulda “f-k” dizgesinin zaman ortamında (birim dürtüye verdiği tepki),

$$h(T_n, X_m) = \frac{1}{\pi^2 \left\{ \left(\frac{X_m}{\Delta x}\right)^2 - n^2 \right\}} \quad (10.79)$$

elde edilir. (10.79) bağıntısı, hız dizgesinin zaman ortamı ifadesidir. Yapılan tanımlara göre “Δx” ve “n” değerleri, birer tamsayıdır. Böylece, zaman ortamında, istenilen sinyalin öne çıkartılması için, araziden alınan kayıt ile son bağıntıdan bulunan dizge katsayılarını evriştirilmesi yeterlidir.

#### **Örnek 10.4**

Tek boyutlu, bir alçak geçişli dizge düzenleyiniz.

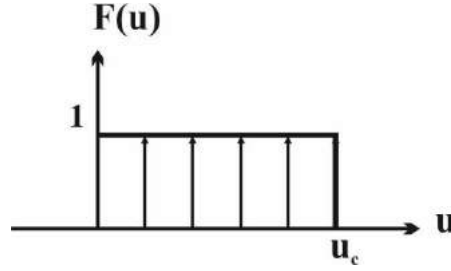
#### **Çözüm**

1. (10.75) bağıntısı kullanılarak dönüşüm işlevi hesaplanır veya sayısal olarak verilir. Alçak geçişli bir dizgenin frekans ortamı görüntüsü şekil 10.15 te verilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi,

kesme frekansına kadar, dizge “1” değerini almaktadır. Bu koşulda, öncelikle kesme frekansı bulunur. Örneğin; uzay ortamı örnekleme aralığı  $\Delta x=2.5$  km ve 50 km den uzun dalga boylarını geçirip, daha kısa dalga boylarının süzülmesi isteniyorsa kesme frekansı,  $U_c=\Delta x/\lambda=2.5/50=0.05$  devir / veri aralığı olmalıdır.

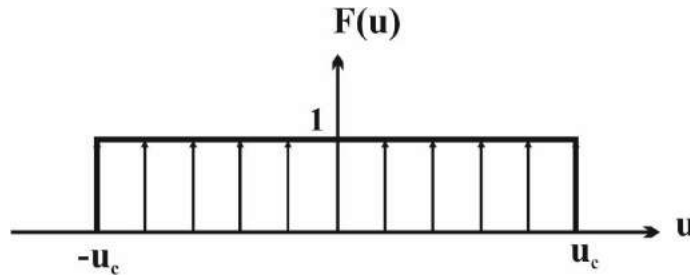
2. Kesme frekansı saptanan dönüşüm işlevi frekans ortamında uygun örnekleme aralıkları ile örneklenerek (Şekil 10.15) frekans ortamı ayırık dizisi oluşturulur ( $\Delta u=0.01$  seçilmiştir).

$$F(u) = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots$$



Şekil 10.16 Alçak geçişli dizgenin, sayısal dönüşüm işlevi

3. 2. adımda elde edilen dönüşüm işlevi bakışık duruma sokulur (Şekil 10.17).



Şekil 10.17 Bakışık alçak geçişli dizgenin dönüşüm işlevi



4. Elde edilen bakışık dönüşüm işlevinin, (10.57) denkleminde yararlanılarak ayırık ters kosinüs dönüşümü alınarak uzay (zaman) ortamına geçilir (Şekil 10.18) (bir ortamdaki dikdörtgen işlevinin, diğer ortamdaki görüntüsü “sinc” dir).
5. Elde edilen diziler pencereleştirilerek sınırlanır. Burada üçgen pencere kullanılmıştır (Şekil 10.19).
6. Son olarak katsayı dengelemesi yapılır. Bu dengeleme ise tüm alçak geçişlilerde ve yukarı uzanımda, katsayılar toplamının 1'e, yüksek geçişlilerde ise 0'a eşitlenmesi şeklindedir.

Böylece alçak geçişli süzgeç için ağırlık katsayı dizeleri oluşturulur. Eğer veri, bu ağırlık katsayı dizeleri ile evriştirilirse, alçak geçiş katsayılarıyla süzgeçlenmiş veri grubu elde edilir (katsayıların sinc işlevi olduğuna dikkat ediniz).



**Şekil 10.18** Alçak geçişli dizgenin birim dürtüye yanıtı (ağırlık katsayı dizgesi)



**Şekil 10.19** Uzay ortamında, üçgen pencere ile pencerelenmiş ağırlık katsayı dizgesi **a)** üçgen pencere **b)** ağırlık katsayı dizeyi **c)** pencerelenmiş ağırlık katsayı dizeyi

### **Örnek 10.5**

Yukarı doğru analitik uzanım yapan, tek boyutlu, bir dizge düzenleyiniz.

#### ***Çözüm***

Ne tür bir dizge düzenlenecekse, yalnız örnek 10.3 te verilen 2. adımda değişiklik yapılarak diğer aşamalar uygulanır. Uzay ve dalga sayısı ortamlarında analitik uzanım (şekil 10.20) denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$f(x, h) = \frac{h}{2\pi(x^2 + h^2)^{3/2}} \quad (10.80)$$

$$F(u, h) = \mathfrak{F}^{-1}[f(x, h)] = e^{-2\pi hu} \quad (10.81)$$

h: analitik uzanımın yapılacağı düzlemdir. Örnekleme aralığı cinsinden verilir. Örneğin  $\Delta x=100$  m. ise,  $h=3$  seçilmesi koşulunda, veriler, 300 m. yukarı doğru analitik uzatılmış olur. Yani yeryüzünden 300m.yüksekte bir düzlemde, sanal gözlem yapılmış olarak düşünülür.



**Şekil 10.20** Analitik uzanım ağırlık katsayı dizisinin elde edilmesi

- a) Analitik uzanım dönüşüm işlevi b) Bakışık dönüşüm işlevi  
c) Ağırlık kat sayı dizisinin, üçgen pencere (kesik çizgi) ile pencerelemesi

Kesme frekansı, Analitik uzanımlarda, uygulamacı tarafından seçilecek bir kesme frekansı olamaz. Ancak, (10.81) bağıntısı, sonsuzda sıfırdır. Verilen bağıntı sonsuz uzunlukta hesaplanamayacağı için herhangi bir frekansta kesilmek zorundadır. Söz konusu bu frekans “ $F_{Nyq}=0.5$  devir/veri aralığı” olarak alınır.

### **Örnek 10.6**

Uzay ortamında  $g(x) = e^{-ax^2}$  olarak verilen işlev

- a) 1. Türev
- b) 1 birim yukarı doğru analitik uzanım
- c) Türev ve analitik uzanım dizgelerinin ardışık uygulanmasından elde edilen dizgeden geçirilmektedir.

Sinyal, yukarıda verilen dizgelerden geçirildikten sonra elde edilen spektral ortam bağıntısını bulunuz.

### **Çözüm**

Uzay ortamı sinyalin, frekans ortamı bağıntısının bulunması için FD alınmalıdır. Verilen işlev çift olduğundan, kosinüs dönüşümünün alınması yeterlidir.



### **Örnek 10.7**

Gravite yönteminde, silindirin çekim kuvvetinin, analitik bağıntısı

$$g(x) = \frac{mz}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

dır. Bu bağıntıda, “z” kürenin derinliğidir. z=10 m., m=100 biri m olarak alınız. Çözümde kolaylık olması amacıyla, verilen bağıntıyı,  $g(x) = \frac{mz}{x^2+z^2}$  olarak kullanınız.

- a) Sinyali, en büyük genliğinin 1/10’ una düştüğü “x” uzaklığına dek bulunuz.
- b) Verilen sinyale  $\lambda=20$  m. dalga boylu bir sinüzoidal gürültü bindiriniz. Gürültülü sinyali örnekleyecek, doğru “ $\Delta x$ ” bulunuz. Gürültülü sinyali çiziniz.
- c) Gürültülü sinyalin bağıntısını, spektral ortamda elde ediniz. Spektrumunu çiziniz.
- d) Gürültüyü süzebilecek bir alçak geçişli süzgecin kesme frekansını bulunuz. Düzenlenecek süzgeci, şekil üzerinde gösteriniz.

**Not:** Tümlev çözümünde  $G(y) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(xy)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2} a^{-1} e^{-ay}$   
Erdelyi, 1954 kalıbından yararlanınız.

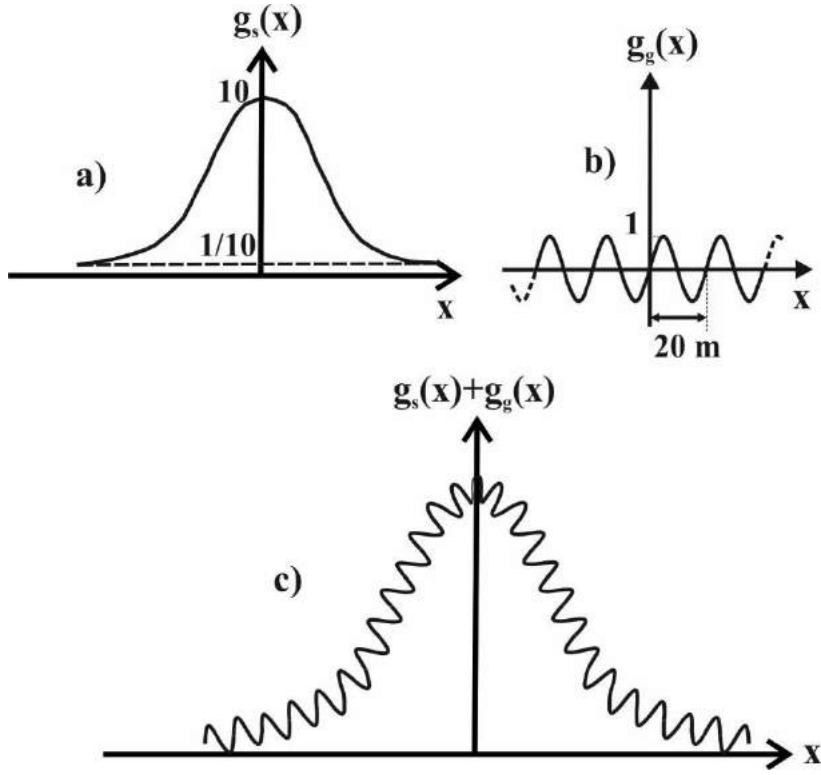
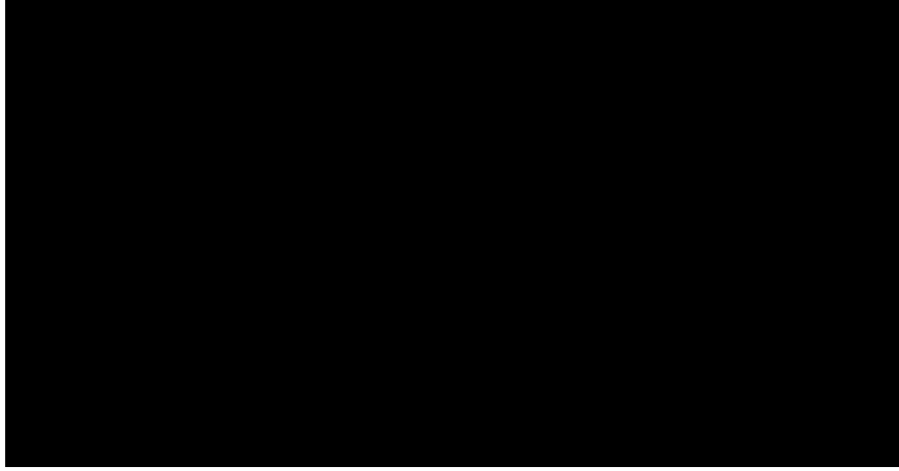
### **Çözüm**

---

Çözümde, alt indislerde kullanılan kısaltmalar

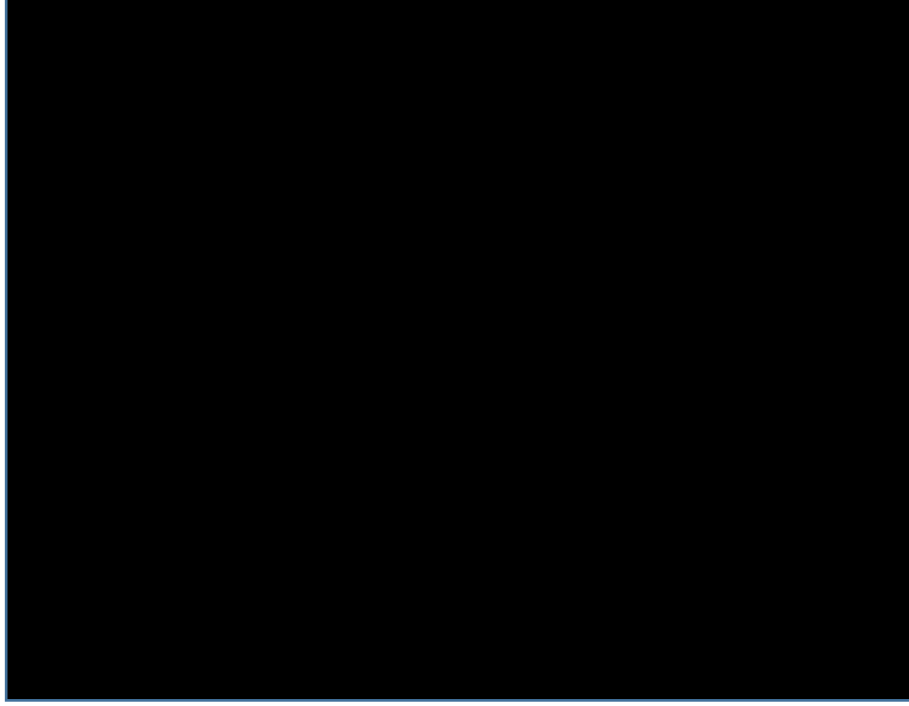
**eb:** en büyük, **s :** sinyal, **gs:** gürültülü sinyaldir. Çözümde verilen tüm şekiller niceldir.

---



**Şekil 10.21** a) Silindir sinyali b) sinüzoidal gürültü c) gürültü bindirilmiş sinyal





**Şekil 10.22 a)** Sinyalin spektrumu **b)** gürültünün spektrumu **c)** gürültülü spektrum ve kullanılması gereken alçak geçişli dizge (kesik çizgi)

Kesik çizgi ile gösterilen alçak geçişli dizgenin gürültülü sinyale uygulanması (şekil 10.22.c) sonucunda, şekil 10.21.a da verilen gravite sinyaline ulaşılır.

### **Örnek 10.8**

Aşağı - yukarı doğru analitik uzanım yapan, iki boyutlu, bir dizge düzenleyiniz.

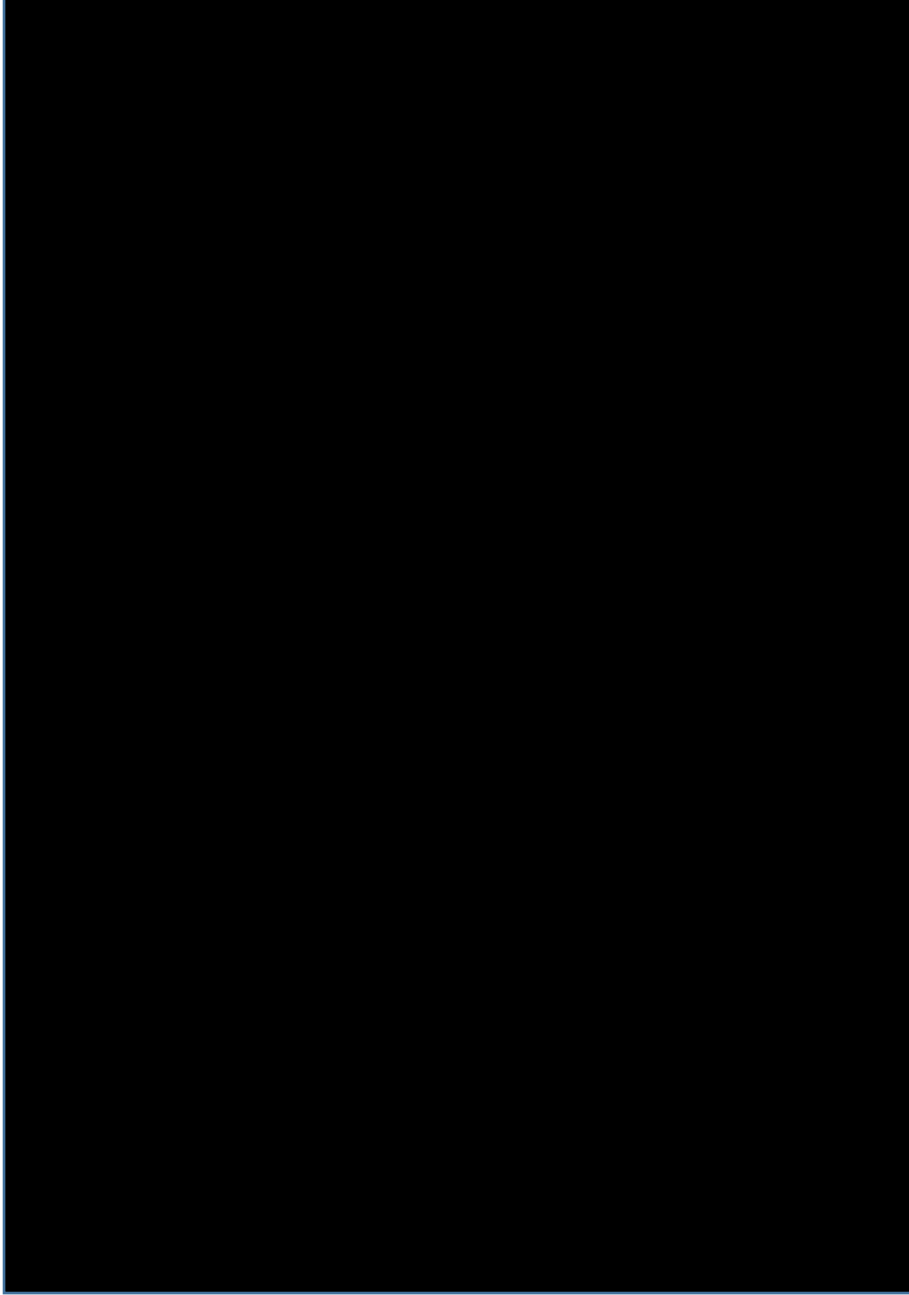
### ***Çözüm***

Söz konusu süzgeçlerin düzenlenmesi, 10.3 örneğinde verildiği gibi yapılır. Ancak frekans ortamında çift boyutlu yukarı uzanım analitik denklemi elde edilmelidir.



Potansiyel kuramda "0" düzleminde "z" kadar yukarıdaki bir düzlemde potansiyel:

$$g(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zg(\alpha, \beta, 0)}{2\pi [(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + h^2]^{3/2}} d\alpha d\beta \quad (10.82)$$





dır. Bu yöntemle, frekans ortamında, analitik bağıntı ile tanımlanan, veya sayısal olarak gösterilen her türlü süzgeci oluşturmak çok kolaydır.

### **10.6 DESİBEL ÖLÇEKLEMESİ**

Bir dizgenin giriş ve çıkışına ait kazanç (gain) veya yitimin (loss) gösterilmesinde kullanılan bir ölçektir. Dizge girişi “x(t)”, çıkışı “y(t)” ile gösterilirse (şekil 10.3),

$$G(dB) = 20 \cdot \text{Log}_{10} \frac{y(t)}{x(t)}$$

(10.91)

olarak verilir. Son eşitlikte,

G: desibel cinsinden kazançtır (veya kayıp). Eğer sonuç “-“ çıkarsa, süzgecin yitimi söz konusudur. Logaritmanın başında bulunan “20” çarpanı, bazı tanımlarda “10” olarak alınır. Örneğin, çıkışın, girişe eşit olması durumunda, kazanç yoktur. Bu durumda,

$$y(t)=x(t) \rightarrow G=20 \log(1) \rightarrow \log 1=0 \rightarrow G=0 \text{ dır.}$$

Çıkış, girişin 3 katı olsaydı, desibel cinsinden kazanç,  
 $y(t)=3x(t) \rightarrow G=20 \log(3) \rightarrow \log 3 \approx 0.48 \rightarrow G=20 \cdot 0.48 \approx 10 \text{ dB}$   
elde edilir. Girişin çıkışa eşit olması durumunda, işlevin dB  
ölçeklemesindeki bağıntısı elde edilir (10.90 bağıntısı).  
 $G(\text{dB})=-20\text{Log}|H(f)|$  (10.92)

$$H(f) = \frac{2 \cos(\pi f)}{\pi(1 - 4f^2)}$$

### **Örnek 10.9**

Kosinüs pencerenin spektral ortam bağıntısı

dır. Yitim etmenini,  $\Delta f=0.1$  devir/veri aralıklarıyla hesaplayınız.

### ***Çözüm***

Yitim/kazanç etmeni (10.91) bağıntısıyla verilmektedir. Herhangi bir dizgeye giriş ve çıkış yoktur Dolayısıyla (10.92) eşitliği kullanılır.



**Çizelge 10.2** Kosinüs pencerenin yitim etmeninin sayısal değerleri

## 10.7 BUTTERWORTH DİZGELERİ

Bölüm 10.3.2.1 de alçak geçişli bir dizgenin dönüşüm işlevinin tanım aralığı verilmiştir. Söz konusu dizge sayısal olarak kolaylıkla düzenlenebilir (dikdörtgen işlev). Ancak matematiksel bağıntı olarak uygulamada, dikdörtgen işlevin sınırındaki süreksizlik nedeniyle, diğer ortamda dalgalanmalara yol açar. Ayrıca, sınırdaki dik çizginin eldesi olanaksızdır (şekil 10.23 siyah çizgi). Bu nedenle matematik bağıntıları bilinen dizgelerin kullanılması yeğlenir.

Matematik denklemleri bilinen birçok dizge frekans ortamında düzenlenebilir. Böylece, geçiş zonunun eğimi ve dalgalanmalar kontrol edilebilir. Bu tip düzeneklere örnek olarak eliptik, Butterworth, Chebyshev, Bessel, Cauer dizgeleri verilebilir.

Alçak geçişli Butterworth dizgeleri dalgalanmaları ve geçiş zonunun dikleştirilmesi için kullanılır. “n” inci dereceden bir alçak geçişli Butterworth dizgesinin dönüşüm işlevi aşağıdaki bağıntıyla verilmiştir (şekil 10.23).

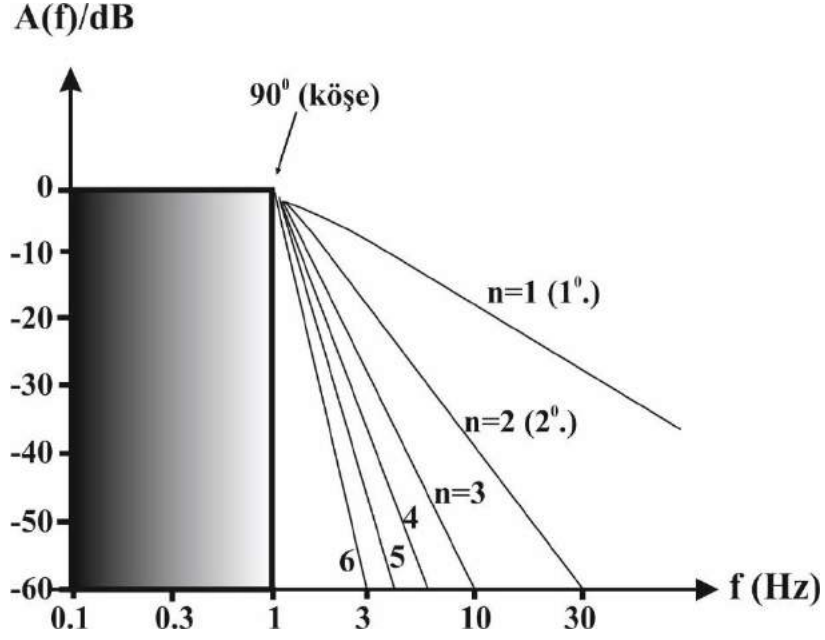
$$H(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\omega}{\omega_c}\right]^{2n}}} \quad (10.93)$$

(10.93) eşitliğinden yararlanarak kazancı

$$G(\omega)^2 = |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left[\frac{\omega}{\omega_c}\right]^{2n}} \Rightarrow G(\omega)^2 = \frac{G_0^2}{1 + \left[\frac{\omega}{\omega_c}\right]^{2n}} \quad (10.94)$$

olarak yazılır. Bu bağıntılarda,

n: dizgenin derecesi,  $\omega_c$ : kesme frekansı,  $G_0$ : sıfır frekansındaki (doğru akım) kazançtır.



Şekil 10.23 Butterworth dizgesinin dönüşüm işlevinin kazancı (normalleştirilmiş).

Dizgenin  $G=1$  dB deki en büyük kazancı ("A<sub>eb</sub>" en büyük kazanç), (10.92) eşitliğinden

$$G = -20 \text{Log}(A_{eb})$$

$$A_{eb} = \text{Log}^{-1} \frac{1}{20} = \text{Log}^{-1}(0.05) = 1.1220 \text{ dB}$$

(10.93) eşitliğinin paydası sıfıra eşitlenerek Butterworth dizgesinin kutupları elde edilir.

$$H(jw) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{w}{w_c}\right]^{2n}}} = \frac{1}{1 + w^{2n} w_c^{-2n}} = \frac{1}{1 + (-1)^n w^{2n}}$$

$1 + (-1)^n w^{2n} = 0$  her iki taraf  $(-1)^n$  ile çarpılarak,

$$(-1)^n [1 + (-1)^n w^{2n}] = (-1)^n + (-1)^n (-1)^n w^{2n}$$

$$= (-1)^n + (1)^n w^{2n}$$

$(1)^n=1$  olması nedeniyle kutuplar

$(-1)^n + w^{2n}$  elde edilir.

(jw), Laplace dönüşümü kullanılarak “s” ortamında yazılır. Böylece “n” e bağlı olarak  $w_c=1$  devir/sn frekansında normalleştirilmiş alçak geçişli Butterworth dizge katsayıları elde edilir (çizelge 3)

n	Normalleştirilmiş Butterworth polinomu
1	$(1+s)$
2	$(1+1.414s+s^2)$
3	$(1+s)(1+s+s^2)$
4	$(1+0.765s+s^2)(1+1.848s+s^2)$
5	$(1+s)(1+0.618s+s^2)(1+1.618s+s^2)$
6	$(1+0.518s+s^2)(1+1.414s+s^2)(1+1.932s+s^2)$
7	$(1+s)(1+0.445s+s^2)(1+1.247s+s^2)(1+1.802s+s^2)$
8	$(1+0.390s+s^2)(1+1.111s+s^2)(1+1.663s+s^2)$ $(1+1.962s+s^2)$
9	$(1+s)(1+0.347s+s^2)(1+s+s^2)(1+1.532s+s^2)$ $(1+1.897s+s^2)$
10	$(1+0.347s+s^2)(1+0.908s+s^2)(1+1.414s+s^2)$ $(1+1.782s+s^2)(1+1.975s+s^2)$

**Çizelge 3** Normalleştirilmiş Butterworth polinomu

#### Yararlanılan kaynaklar

Canitez, N.,1984, Jeofizikte Veri – İşlem, Cilt 1, İ.T.Ü. yayınları, İstanbul.

Dean, 1958,W.C.,Frequency analysis for gravity and magnetic interpretation, Geophysics, 23, 97-127.

Randall, R. B., Tech, B. A., (1977), Application of B&K equipment to Frequency Analysis, Brüel & Kjaer.

## **BÖLÜM 11**

### ***TERS SÜZGEÇLEME (DEKONVOLUSYON)***

#### ***11.1 GİRİŞ***

Arazi çalışmalarından toplanan izler, çeşitli etkiler nedenlerle, istenmeyen birçok etkileri taşırlar. Örneğin, kullanılan her aletin bir tepki işlevi vardır. Ayrıca, yer içindeki jeolojik yapılar da toplanan izi etkilerler. Tüm etkileri, “sinyali bozucular” olarak isimlendirilebilir. Sinyalin değişikliğe uğraması, sinyale, sinyal bozucuların, evrişimlerinin katkısı nedeniyle oluşur. Tüm bu etkiler ters süzgeçlemelerle (TS) giderilir.

TS iki ana gruba ayrılır.

1. Deterministik TS.
2. İstatistiksel TS.

#### ***11.2 DETERMİNİSTİK TS***

Deterministik TS’ in uygulanabilmesi için evrişime giren tüm terimlerin analitik veya sayısal olarak tanımlanmış olması gerekir.

Örneğin zaman ortamında algılanan bir deprem verisinin analitik denklemi yaklaşık olarak

$$s(t) = K [u(t)] * e(t) * i(t) * \phi(t) \quad (11.1)$$

bağıntısı ile verilir. Bu bağıntıda:

s(t) : Algılanan kaynak dalgacığı.

K : Kaynağın ilerlemesi, sönüm faktörünü içeren bir katsayı.

u(t) : Kaynak-zaman işlevi (depreme neden olan kuvvetler).

$\phi(t)$  : İncelenen dalgaının görünüm-yayınım işlevi (doğrudan doğruya hareketin geometrisi ile ilgilidir. Örneğin faylanma sırasında fayın hareketinin oluşturduğu dalgaının bir işlevidir.

e(t) : Ortamın fiziksel özelliklerine bağlı bir işlev.

i(t) : Kullanılan aletin özelliklerini içeren işlev.

Deterministik ters evrişimin uygulanabilmesi için (11.1) denkleminin her terimi, matematiksel veya sayısal olarak tanımlanmış olmalıdır.

(11.1) denkleminde, sismogramdaki alet etkisi giderilmek istenirse, denklemin FD alınarak dönüşüm işlevi bulunur.

$$S(w) = K.U(w).E(w).I(w).Φ(w) \quad (11.2)$$

Daha sonra (11.2) denkleminde her iki taraf aletin dönüşüm işlevi olan "I(w)" ya bölünerek alet etkisi giderilir. Buradan TFD ile zaman ortamına geçilerek, alet etkisi giderilmiş kayıt elde edilir. Yapılan, işlem deterministik ters evrişimdir. Buraya dek, aletin dönüşüm işlevinin (veya başka herhangi bir parametre) bilindiği varsayılmaktadır. Eğer dönüşüm işlevi bilinmiyorsa, bunun saptanması için Thomson-Haskell yöntemi kullanılır.

Deterministik TS' leme çok iyi bilinen ve tanımlanan sorunlarda kullanılır.

### ***11.3 İSTATİSTİKSEL TERS SÜZGEÇLEME***

İstatistiksel yöntemler (EKK, özilişki, z dönüşümleri vd.) kullanılarak yapılan ters evrişimlerdir. Yaygın olarak kullanılır. Özellikle sismik yansımada, geniş uygulama alanları vardır. Bunun yanı sıra potansiyel alanlarda da uygulanmaktadır.

İstatistiksel TS' leme üç gruba ayrılır.

1. Dalga biçimli TS.
2. Ön kestirmeli TS.
3. İğnecikleştirme TS.

### ***11.4 TERS SÜZGEÇLEME İÇİN FARKLI YÖNTEMLER***

TS' lemede önce en küçük kareler (EKK) ve daha sonra ilişkili olarak özilişki yöntemi verilecektir. İkinci aşamada ise soruna "z" dönüşümü yöntemi ile yaklaşılacaktır.

Evrişim ters evrişim şekli 11.1 ve 11.2 de verilmektedir. Şekildeki üç bilinmeyenden ikisinin bilinmesi durumunda üçüncü bulunabilir. Eğer x ve w biliniyorsa çıkış sinyali

$$y = x * w \quad (11.3)$$

evrişim işlemi ile tanımlanır (Bkz Bölüm 4.2). (11.3) bağıntısında bilinmeyenlerin "w" veya "x" olması durumunda, ters evrişim



yöntemiyle bulunurlar. Örneğin “w” bulunmak isteniyorsa, saptanmak istenen “ $\bar{w}$ ” ile gösterilirse (şekil 11.2).

$$x=y*w \quad (11.4)$$

yazılır. Bu bağıntıda  $\bar{w}$  ters süzgeç katsayılarıdır. Son iki denklem birlikte kullanılarak

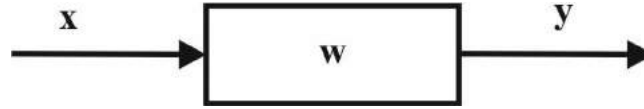
$$x = \bar{w} * w * x \quad (11.5)$$

Elde edilir. Herhangi bir işlevin birim dürtü ile evrişimi yine kendisini (şekil 11.3) verir. (11.5) denkleminde (11.6) yerine yazılarak,

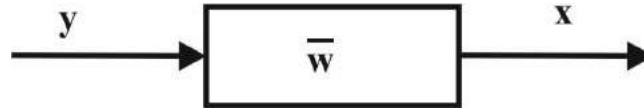
$$\delta * x = \bar{w} * w * x \quad (11.6)$$

$$\delta = \bar{w} * w \quad (11.7)$$

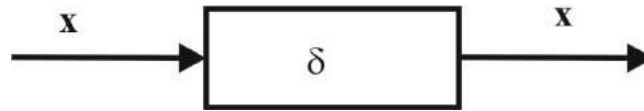
elde edilir (iğnecik süzgeci). Evrişim işleci ile onun tersi olan, ters evrişim işlecinin evrişimi birim dürtüdür. (11.7) denkleminde ters evrişim işlecinin en kolay yoldan bulunması için, bu eşitliğin "z" dönüşümünün alınması yeterlidir.



Şekil 11.1 Evrişim



Şekil 11.2 Ters evrişim



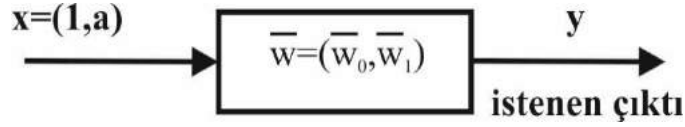
Şekil 11.3 Dürtü ile evrişim

#### 11.4.1 EKK yöntemi ile ters süzgeç katsayılarının oluşturulması

EKK yöntemi ile hesaplanacak ters evrişim süzgeç katsayılarının uzunluğu önem taşır. Eğer çok kısa katsayı kullanılırsa yanılğı; uzun katsayı kullanılırsa veri yitimi ve işlem sayısı çok olur.

Örneğin iki terimli en küçük gecikmeli (1,a) dalgacığını iğneciğe dönüştüren 2 boylu TS katsayılarını bulalım (Şekil 11.4).

$$y = x * \bar{w} \cong \delta(t) \quad (11.8)$$




---

**Not:** w, x in tersini oluşturacak süzgeç katsayılarıdır. Bir dalgacık en küçük gecikmeli olması için  $|a| < 1$  koşulunu sağlamalıdır.

---

“z” dönüşümleri kullanılarak (bkz bölüm 6.4)

$$x(z) = 1 + az$$

yazılır. x in tersi olan  $\bar{w}(z)$  ise

$$\bar{W}(z) = \frac{1}{x(z)} = \frac{1}{1 + az} \quad (11.9)$$

dir. "z" dönüşümü özellikleri kullanılarak

$$\bar{W}(z) = 1 - az + a^2 z^2 - \dots - a^n z^n$$

$$\bar{W}(z) = 1, -a, +a^2, \dots, -a^n \quad (11.10)$$

elde edilir. İlk iki terim alınarak

$$\bar{W} = (\bar{W}_0, \bar{W}_1) = (1, -a) \quad (11.11)$$

bulunur. (11.11) denklemi ile bulunan TS katsayıları  $x=(1,a)$  olan giriş dalgacığını "iğne" yapmaya çalışan iki elemanlı süzgeçtir. Gerçekten de süzgeç katsayıları, (11.11) denklemi ile verilen (şekil 11.4) süzgecin çıktısı, evrişimden yararlanılarak

$$y = (1,a) * (1,-a) = 1, 0, -a^2 \quad (11.12)$$

olarak yazılır. Oysa istenen gerçek çıktı iğneciktir. Dolayısı ile yanılğı

$$e = \delta - y = [1,0,0] - [1,0,-a^2] = 0,0,a^2$$

dır. İki işlev arasındaki yanılğı ise

$$E = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \quad i = 1,2,\dots,n \quad (11.13.a)$$

şeklinde verilir. Bu problemde ise

$$E = \sum_{i=1}^n (\delta_i - y_i)^2 \quad (11.13.b)$$

dir. Son denklemde:

n : toplam eleman sayısı,

i : sayıcıdır.

$$E = \left[ (\delta_1 - y_1)^2 + (\delta_2 - y_2)^2 + (\delta_3 - y_3)^2 \right]$$

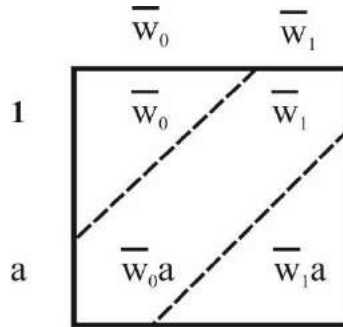
$$E = (1-1)^2 + (0-0)^2 + (0-a^2)^2 = a^4$$

$$E = \sum_{i=1}^n (\delta_i - y_i)^2 = a^4 \quad (11.14)$$

Böyle bir süzgeç düzenlemedeki yanılğı “a<sup>4</sup>” tür. Bu yanılğı en küçük yaparak, düzenlenen süzgeç optimuma yaklaştırılır. Kullanılan yöntem, EKK den başka bir şey değildir. Şekil 11.4 te verilen (1,a) girişinden oluşmuş bir dalgacığı "δ" işlevine çevirecek iki elemanlı dizgenin katsayıları “  $\bar{w}_1$  ” ve “ ” ise, gerçek çıktı

$$y = \bar{W} * x = (\bar{W}_0, \bar{W}_1) * (1, a)$$

dir. Evrişim z dönüşümü alınarak veya evrişim özellikleri (şekil 11.5) kullanılarak bulunabilir.



Şekil 11.5 ikişer terimin evrişimi

$$y = \bar{W}_0, (\bar{W}_1 + \bar{W}_0 a), \bar{W}_1 a \quad (11.15)$$

İstenen çıktı birim dürtüdür; öyleyse yanılığı,

$$e_i = \delta_i - y_i = [1,0,0] - [\bar{W}_0, (\bar{W}_1 + \bar{W}_0 a), \bar{W}_1 a]$$

$$e_i = [1 - \bar{W}_0], [-\bar{W}_1 + \bar{W}_0 a], [-\bar{W}_1 a] \quad (11.16)$$

dır. Yanılığı enerjisi ise (11.13) denklemlerinden,

$$E = [1 - \bar{W}_0]^2 + [-\bar{W}_1 - \bar{W}_0 a]^2 + [-\bar{W}_1 a]^2$$

$$E = 1 - 2\bar{W}_0 + \bar{W}_0^2 + \bar{W}_1^2 + 2\bar{W}_0\bar{W}_1 a + \bar{W}_0^2 a^2 + \bar{W}_1^2 a^2$$

$$E = 1 - 2\bar{W}_0 + (1 + a^2)\bar{W}_0^2 + 2\bar{W}_0\bar{W}_1 a + (1 + a^2)\bar{W}_1^2$$

(11.17)

elde edilir. (11.13) denklemlerinden görüldüğü gibi yanılığı enerjisi tümüyle süzgeç katsayılarına bağlıdır. Kısaltma amacıyla (11.17) de  $a_0=(1+a^2)$  olarak gösterilir.

$$E = 1 - 2\bar{W}_0 + \bar{W}_0^2 a_0 + 2\bar{W}_0\bar{W}_1 a + \bar{W}_1^2 a_0$$

(11.18)

Yanılığı enerjisinin, parametrelere göre türevleri sıfıra eşitlenerek

yanılığı enerjisi en küçük yapılır.

$$\frac{\partial E}{\partial W_n} = 0 \quad n = 0,1,2,\dots$$

$$\frac{\partial E}{\partial W_0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial E}{\partial W_1} = 0 \quad (11.19)$$

$$\frac{\partial E}{\partial W_0} = 0 \rightarrow a_0 \bar{W}_0 + a \bar{W}_1 = 1 \quad (11.20)$$

$$\frac{\partial E}{\partial W_1} = 0 \rightarrow a \bar{W}_0 + a_0 \bar{W}_1 = 0 \quad (11.21)$$

Son iki denklem determinantlar kullanılarak çözümlür.

$$a_0 \bar{W}_0 + a \bar{W}_1 = 1$$

$$a_0 \bar{W}_0 + a_0 \bar{W}_1 = 0$$

**Not**

$$\begin{matrix} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dizey normunda yazılıp determinant kullanılarak çözümlürse

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

dir.

---

$$\bar{W}_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & a_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a \\ a & a_0 \end{vmatrix}} = \frac{a_0}{a_0^2 - a^2}$$

$$\bar{W}_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a \\ a & a_0 \end{vmatrix}} = \frac{-a}{a_0^2 - a^2}$$

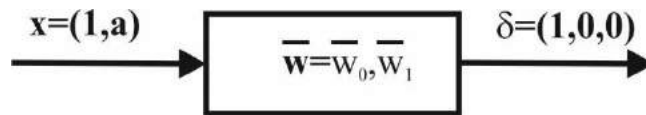
$a_0=1+a^2$  yerine konursa

$$\bar{W}_0 = \frac{1+a^2}{1+a^2+a^4}, \quad \bar{W}_1 = -\frac{a}{1+a^2+a^4}$$

En küçük yanılğı içeren süzgeç katsayıları

$$\bar{W}_i = \left[ \frac{1+a^2}{1+a^2+a^4}, -\frac{a}{1+a^2+a^4} \right] \quad (11.22)$$

olarak bulunur. Buraya dek yapılanlar şekil 11.6 da görölmektedir.



**Şekil 11.6**  $x=(1,a)$  giriş dalgacığını iğneciğe çeviren, minimum yanılğı enerjisine sahip ters dizge

(11.22) denkleminde sürekli,  $|\overline{W}_0| > |\overline{W}_1|$  dir. Bu nedenle de “ $W_i$ “ en küçük gecikmelidir.

Çözüm aşamasında, yapılan en küçük yanılğı bulunmak istenirse, (11.22) denklemi ile verilen katsayılar (11.17) eşitliğinde yerine konmalıdır.

$$E_{\min} = 1 - 2 \frac{1+a^2}{1+a^2+a^4} + (1+a^2) \left( \frac{1+a^2}{1+a^2+a^4} \right) + 2 \frac{1+a^2}{1+a^2+a^4} - \left( \frac{-a}{1+a^2+a^4} \right) a + (1+a^2) \left( \frac{-a}{1+a^2+a^4} \right)^2$$

$$E_{\min} = \frac{a^4}{1+a^2+a^4} \quad (11.23)$$

Buraya dek, en küçük gecikmeli, bir giriş dalgacığını iğnecik halinde bir çıktıya dönüştüren TS ve optimum süzgeç katsayıları ile yanılğuları hesaplanmıştır. Bunlar toplu halde Çizelge 11.1 de verilmiştir.

### Örnek 11.1

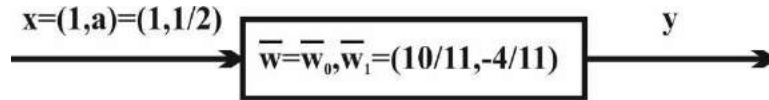
Şekil 11.7 de verilen dalgacığın TS çıkışını ve yanılğı enerjisini hesaplayınız.

### Çözüm





**Çizelge 11.1 Ters dizge ve optimum dizge katsayılarının karşılaştırılması**



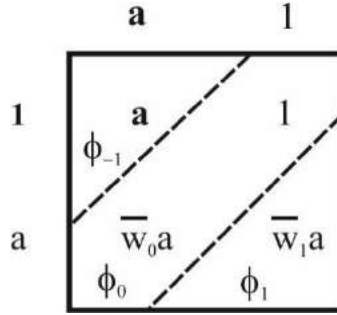
**Şekil 11.7** Örneğe ait giriş dalgacığı ve TS katsayıları

#### **11.4.2 Özilişki yöntemi ile TS katsayılarının oluşturulması (dalga biçimi TS katsayılarının saptanması)**

Bölüm 11.4.1 de verilen  $x=(1+a)$  dalgacığının özilişkisi  $(a, a^2+1, a)$  dır (şekil 11.8). Sıfır kaymada  $(a^2+1)$ , bir kaymada ise  $(a)$  dır. Eğer özilişki “ $\phi$ ” ile gösterilirse,

$$\phi_0 = 1+a^2, \quad \phi_1 = a$$

dır. Bu koşulda, (11.17) denkleminde görülen “ $1+a^2$ ” ve “ $a$ ” terimleri doğrudan doğruya sıfır ve bir kaymadaki özilişki değerleridir.



**Şekil 11.8**  $x=(1,a)$  dalgacığının özilişkisi

Özilişki kullanılarak (11.20) ve (11.21) yeniden yazılır.

$$\phi_0 \bar{w}_0 + \phi_1 \bar{w}_1 = 1 \quad (11.24)$$

$$\phi_1 \bar{w}_0 + \phi_0 \bar{w}_1 = 0$$

(11.24) ile (11.20) ve (11.21) denklem sistemlerinin çözümü aynıdır. (11.24) denklemleri dizey olarak gösterilirse;

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 \\ \phi_1 & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_0 \\ \bar{w}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.25)$$

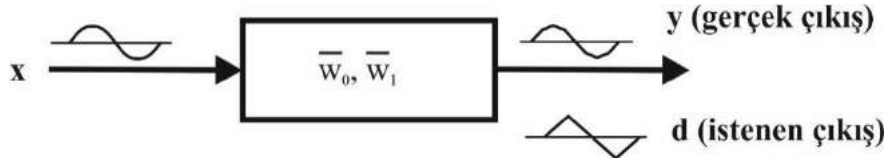
elde edilir.

Ters evrişim işleminde, süzgeç çıktısı olan gerçek sonuç ile, istenen sonuç arasında farklılık vardır. Örneğin bir sinüs izini, üçgen dalga çıkışına dönüştürecek TS katsayıları oluşturulsun. TS katsayıları ile sinüs giriş izi evriştirildiğinde elde edilen gerçek çıktı, istenen çıktıdan mutlaka farklıdır (şekil 11.9).

Gerçek çıkış ile istenen çıkış arasındaki fark yanılğı enerjisini verir.

$$y_t = x_t * \bar{w}_t = \sum_{\tau=0}^{n-1} x_\tau \bar{w}_{t-\tau} \quad (11.26)$$

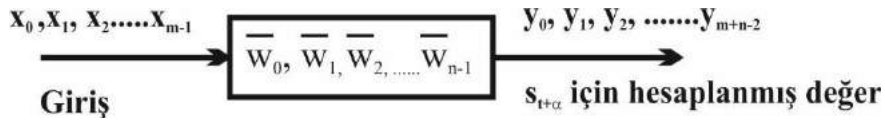
$$E = \sum_{t=0}^m (d_t - y_t)^2 \quad (11.27)$$



**Şekil 11.9** istenen ve gerçek çıkış



(11.26) denklemindeki parametreler şekil 11.10 da verilmektedir. Eğer TS katsayıları uzun ise (n-1 adet) kurulacak dizeler oldukça büyük olur. Kuşkusuz ki uzun TS katsayıları kullanıldıkça yanılgi enerjisi küçülür. Ancak hem yanılgi enerjisinin küçüklüğü, hem de TS katsayılarının ekonomik uzunluğu seçilerek optimum bir çözüm bulunmalıdır. Başka bir deyişle yanılgi enerjisi en küçük yapılacak diye çok uzun katsayılar kullanmak doğru değildir. Uzun katsayılar için (11.25) denklemi geliştirilip genelleştirilebilir.



Şekil 11.10 11.26 bağıntısıyla verilen, yanılgi hesaplanmasında kullanılan, parametreler.

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 & \dots & \phi_{n-1} \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \dots & \phi_{n-2} \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_{n-3} \\ \phi_3 & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \dots & \phi_{n-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \phi_{n-1} & \phi_{n-2} & \phi_{n-3} & \phi_{n-4} & \phi_{n-5} & \dots & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_0 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{w}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{n-1} \end{bmatrix} \quad (11.28)$$

(11.28) denklemini 3 üyeden oluşur.

1. Eşitliğin sol tarafında yer alan “nxn” boyutlu bir kare dizey bulunmaktadır. Kare dizey, aşırı bakışiktır ve Toeplitz dizeyi adını alır. Çeşitli gecikmelerdeki, giriş sinyalinin (x) özilişkisidir.
2. Kare dizey ile eşitlik arasında kalan (nx1) boyutlu “w” katsayılarından oluşan kolon ise, saptanması istenen TS katsayılarıdır. (11.28) denkleminin çözümünden bu süzgeç katsayıları bulunur.

3. Eşitliğin sağ tarafında ise  $n \times 1$  boyutlu bir kolon dizey vardır. Bu kolon dizey istenen çıkışla, girdi verisi olan " $x_t$ " nin çapraz ilişkisinden elde edilir.

### **Toeplitz dizeyinin özellikleri**

" $n \times n$ " boyutundan oluşan Toeplitz dizeyi aşırı bakışıktır. Aşırı bakışık olması bilgisayar belleğinde az yer tutması açısından yararlıdır. Dizeye dikkat edilirse, yalnızca ilk satır hesaplanarak tüm dizey kolaylıkla kurulabilir. Bu dizey aynı zamanda Wiener-Hopf tümlev denkleminin sayısal biçimidir. (11.28) denkleminin çözümü Levinson algoritması ile yapılır (Bkz Ek C).

Verilen çözümde, süzgeç çıkışında istenen dalga biçimi tanımlandığı için "DALGA BİÇİMİ TERS EVRİŞİM" denir.

---

**Not:** Eşitliğin sağ tarafındaki "g" kolonundaki çapraz ilişkide kayma sıfır alınırsa iğnecik TS elde edilir.

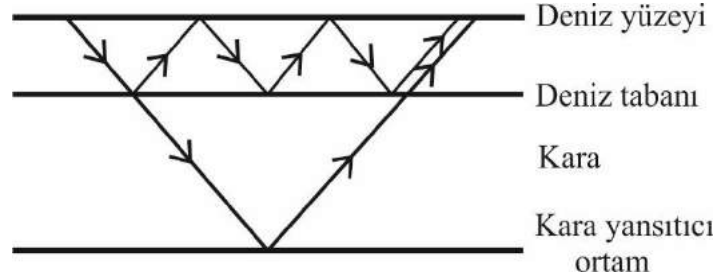
---

### **11.4.3 Önceden kestirmeli ters evrişim**

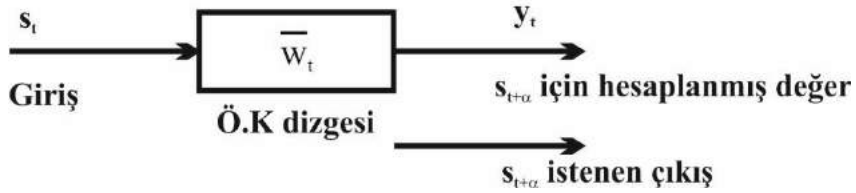
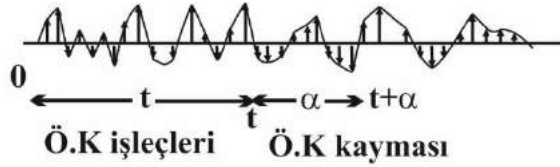
Önceden kestirmeli ters evrişim; bir zaman veya uzay dizisinin geçmişteki değerlerinden yararlanarak gelecekteki değerinin kestirilmesi işlemidir. Jeofizikte; bir ekstrapolasyon (dış değer bulma) yöntemi olarak kabul edilebilir. Gelişigüzel olaylardan kaynaklanan gelişigüzel verilerin geçmişine bakarak gelecekteki kestirimin yapılması olanaksızdır. Örneğin, kayıt edilen bir jeofizik verinin gürültü kısmı önceden kestirilemez. Çünkü gürültünün, saptanabilen belirli bir dönemi yoktur. Önceden kestirmeli ters evrişim ancak, veri içinde önemli bir olayın sürekli olarak yer alması durumunda kullanılır. Bilindiği gibi dönemsel (periyodik) bileşenler, belirli bir süre içinde yinelenen, art arda gelen olaylardır. Sismik yöntemde katman sınırlarında bir kaç kez yansımaya uğrayıp yüzeye gelen ve sonradan yiten dalgalar örnek olarak verilebilir. Benzer olay denizde yapılan sismik çalışmalarda görülür.

Dalga, su ile karanın serbest yüzeyi arasında bir kaç kez yansyarak kayıçya ulaşır (şekil 11.11). Bunlar, dönemli dalgalardır ve reverberasyon olarak isimendirilir. Kayıtta sürekli ve düzenli olarak

görülen bu yinelemeli yansımaların giderilmesi gerekir. Bu işlem de Dereverberasyon olarak adlandırılır.



Şekil 11.11 Reverberasyon sorunu



Şekil 11.12 Ö.K. İşlemi ve dizgesi

Bir izin "t" anına kadar olan bölümünü kullanarak "alpha" zaman kadar sonraki değerleri (şekil 11.12) (11.28) dizeyinden bulunur. Burada "g" değerleri, giriş verisi ile istenen çıkışın çapraz ilişkisidir.

$$g_{\tau} = \sum_t d_t S_{t-\tau}$$

Son bağıntıda "d\_t" istenen çıkıştır ve "d\_t=S\_{t+alpha}" dır. Bu koşulda,yukarıdaki denklem

$$g_{\tau} = \sum_t S_{t+alpha} S_{t-\tau} = \sum_t S_t S_{t-(alpha+\tau)} \quad (11.29)$$

durumuna gelir. (11.28) denklemindeki “ $\phi$ ” dizeyi, girişin, çeşitli “ $\tau$ ” kaymalarındaki özilişkisidir.

$$\phi_\tau = \sum_t S_t S_{t-\tau}$$

Burada “ $\tau$ ” kayma miktarına önceden kestirme kayması olan “ $\alpha$ ” eklenirse yani “ $\tau = \tau + \alpha$ ” olursa,

$$\phi_{\alpha+\tau} = \sum_t S_t S_{t-(\alpha+\tau)} = g_\tau \quad (11.30)$$

elde edilir. (11.30) denklemini, önceden kestirmeli ters evrişimde çapraz ilişki kolonu üyelerinin “ $\alpha$ ” kadar ötelenmiş özilişki değerlerinden başka bir şey olmadığını gösterir. Böylece önceden kestirmeli ters evrişim bağıntısı:

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_{n-1} \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_{n-2} \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_{n-1} & \phi_{n-2} & \phi_{n-3} & \phi_{n-4} & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{W}_0 \\ \overline{W}_1 \\ \overline{W}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{W}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_{\alpha+1} \\ \phi_{\alpha+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{\alpha+n-1} \end{bmatrix} \quad (11.31)$$

olarak yazılabilir. (11.31) bağıntısı (11.28) e benzer şekilde Ek C de verilen algoritma yardımı ile çözülür.

(11.31) denkleminde “ $\alpha$ ” önkestirme kayması (gecikmesi) olarak isimlendirilir (şekil 11.12). Önkestirme kaymasını “ $\alpha = 1$ ” birim için inceleyelim. O zaman (11.31) eşitliği:

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_{n-1} \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_{n-2} \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_{n-1} & \phi_{n-2} & \phi_{n-3} & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{W}_0 \\ \overline{W}_1 \\ \overline{W}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{W}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n \end{bmatrix} \quad (11.32)$$

olarak yazılır. Bu bağıntıdaki eşitliğin sağ tarafındaki kolon düzey eşitliğin soluna geçirilir.

$$\begin{bmatrix} -\phi_1 \\ -\phi_2 \\ -\phi_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\phi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_{n-1} \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_{n-2} \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_{n-1} & \phi_{n-2} & \phi_{n-3} & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{W}_0 \\ \overline{W}_1 \\ \overline{W}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{W}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.33)$$

(11.33) denkleminde soldaki dizeyin üzerine bir satır eklenip ve "-" işaret TS katsayı vektörüne aktarılarak, normalleştirilmiş değerleri elde (bkz Ek 12A) edilir.

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_n \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_{n-1} \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_2 & \phi_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_n & \phi_{n-1} & \phi_{n-2} & \phi_{n-3} & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 \\ -\overline{W}_0 \\ -\overline{W}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\overline{W}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.34)$$

(11.34) denkleminde "n" adet normal denklem ile "n" adet de bilinmeyen ( $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ ) vardır. (11.34) te

$$v = \phi_0 - \phi_1 \overline{W}_0 - \phi_2 \overline{W}_1 - \dots - \phi_n \overline{W}_{n-1} \quad (11.35)$$

dir. (11.34) bağıntısı " $\alpha=1$ " birim gecikmeli bir önceden kestirmeli süzgecin, n+1 uzunluklu bir TS özdeş olduğunu gösterir. Bunun anlamı ise ayrımlılığın önceden kestirmeli ters evrişim işlemi ile arttırılabileceğidir. Böyle bir ters evrişimde en küçük yanılğı,

$$E_{\min} = \sum_t d_t^2 - \sum_t f_t g_t \quad (11.36)$$

dir. "n" uzunluklu ve "α=1" birim kaymalı ön kestirmeli süzgeç için;

$$d_t = S_{t+1} \quad (11.37.a)$$

$$\sum_t d_t^2 = \phi_0 \quad (11.37.b)$$

$$g_t = \phi_{t+1} \quad (11.37.c)$$

denklemleri yazılabilir. Böylece

$$E_{\min} = \phi_0 - (\phi_1 \bar{W}_0 + \phi_2 \bar{W}_1 + \dots + \phi_n \bar{W}_{n-1}) \quad (11.38)$$

elde edilir. Bu eşitlik (11.35) ile aynıdır. Öyleyse yanılıgı;

$$E_{\min} = V \quad (11.39)$$

olarak bulunur.

#### 11.4.4 İğnecikleştirme ters evrişimi

Bu tür ters süzgeçte, çıkışın iğnecik şeklinde (birim dürtü) olması istenir ( $d_t=1,0,0,0,\dots$ ). Bu amaçla oluşturulan ters evrişim katsayıları iğnecikleştirme TS ni oluşturur. Anılan işlem, iki tür yaklaşımla gerçekleştirilir.

##### 11.4.4.1. Dalga biçimi yaklaşımı ile iğnecikleştirme

(11.28) denkleminde sağ taraftaki kolon dizeyin ilk elemanı sıfırdan farklı, diğer elemanları sıfır olarak yazılırsa, elde edilecek süzgeç katsayıları iğnecikleştirme işlemini yapar. Kolon dizeyin ilk elemanının sıfırdan farklı, diğer elemanlarının sıfır olması, giriş verisi ile iğneciğin (1,0,0,...0) çapraz evrişiminden kaynaklanır.

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \dots \phi_n \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 \dots \phi_{n-1} \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 \dots \phi_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ \phi_{n-1} & \phi_{n-2} & \phi_{n-3} & \phi_{n-4} \dots \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{W}_0 \\ \bar{W}_1 \\ \bar{W}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{W}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.40)$$

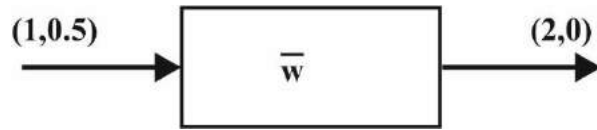
**b. Ön kestirme yaklaşımı ile içnecikleştirme**

(11.34) denkleminin sağ tarafı içnecik işlevine uygun yazılırsa ( $\alpha=1$  kayma için) içnecikleştirme yolu ile TS yapılır.

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \dots \phi_n \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 \dots \phi_{n-1} \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 \dots \phi_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ \phi_n & \phi_{n-1} & \phi_{n-2} & \phi_{n-3} \dots \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 \\ -\bar{W}_0 \\ -\bar{W}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{W}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.41)$$

**Örnek 11.2**

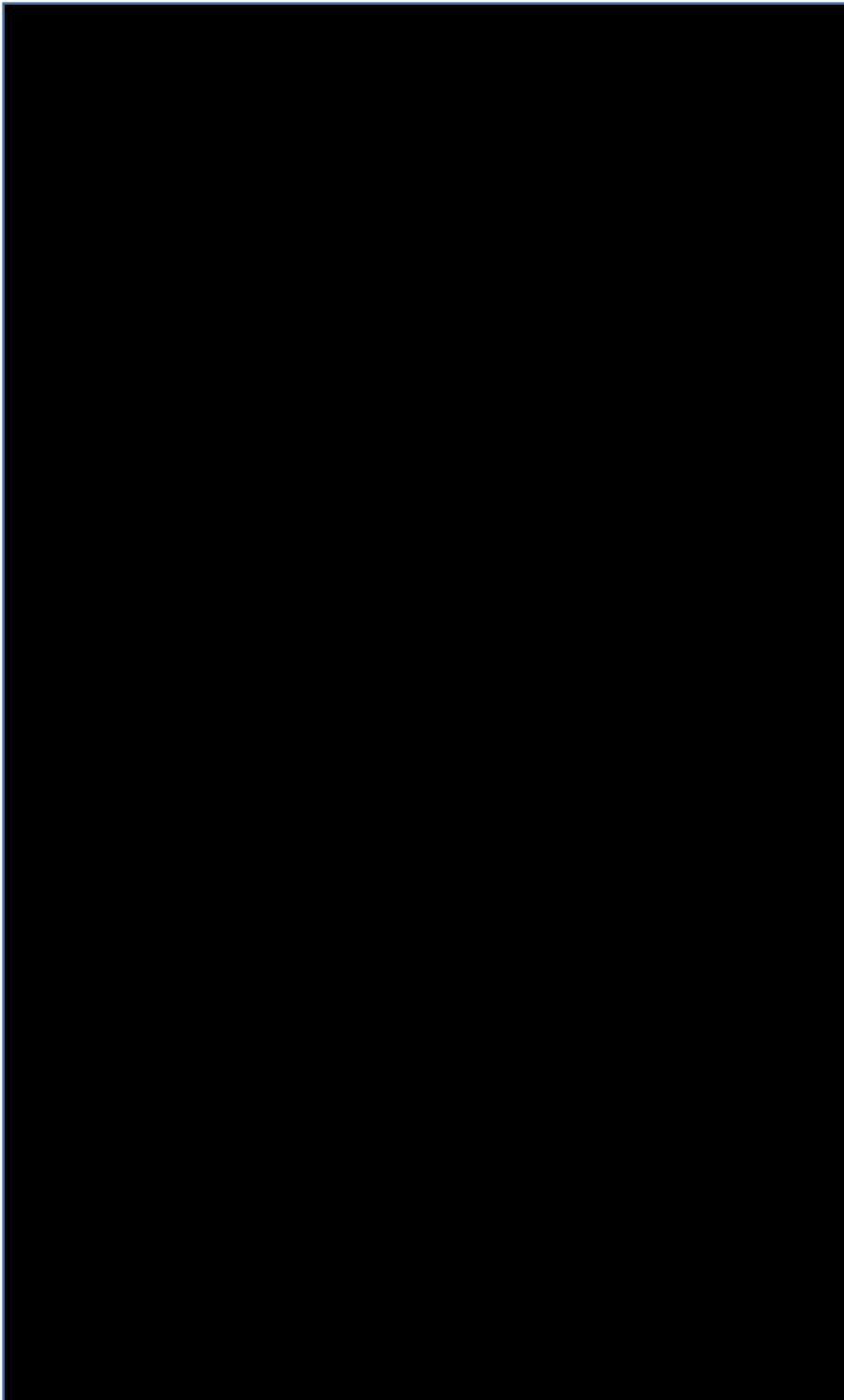
Şekil 11.13 te verilen dizgenin ters süzgeç katsayılarını özilişki yöntemi kullanarak bulunuz. Sonucu sınavınız.



Şekil 11.13 Verilen dizge

**Çözüm**

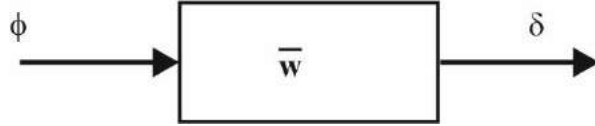






### Örnek 11.3

Dalga biçimli, bir ters süzgeçte, giriş dalgasının özilişkisini iğneciğe çeviren dizge katsayıları 1.9, -0.762 dir. Giriş dalgacığının özilişkisini yazınız.



### Çözüm

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 \\ \phi_1 & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_0 \\ \bar{w}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Çeşitli gecikmelerdeki giriş sinyalinin özilişkisi      TS. katsayıları      İstenen çıkış ile girişin çapraz ilişkisi

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 \\ \phi_1 & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.9 \\ -0.762 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1.9\phi_0 - 0.762\phi_1 = 1$$

$$\underline{-0.762\phi_0 + 1.9\phi_1 = 0}$$

$$\phi_0 = 0.25$$

$$\phi_1 = 0.627$$

Girişin özilişkisi    0.25,    0.627,    0.25

```

EK PR-1 LEVINSON ALGORİTMASI
C LEVINSON ALGORİTMASI KULLANILARAK TERS
C EVRİSİM
  DIMENSION X(200),Y(200),F(200),R(200),G(200,
  DIMENSION E(200),A(200),B(200)
  OPEN(UNIT=1,FILE='LEVO.DAT')
  OPEN(UNIT=2,FILE='LEVY.DAT')

C*****
C X : GİRİS VERİSİ
C Y : İSTENEN ÇIKIŞ
C R : ÖZİLİSKİ İSLEVİ
C G : CAPRAZ İLİSKİ İSLEVİ
C F : DİZGE KATSAYILARI
C E : SUZULMUS GERÇEK ÇIKTI
C *****
  READ(1,*)LX
  READ(1,*)(X(I),I=1,LX)
  READ(1,*)LY
  READ(1,*)(Y(I),I=1,LY)
C ***** ÖZİLİSKİNİN BULUNMASI *****
  WRITE(2,44)
44 FORMAT(/,'ÖZİLİSKİ')
  DO 10 I=1,LX
  SUM=0
  DO 20 I=J,LX
  K=I+J-1
  IF(K.GT.LX) GO TO 10
20 SUM=SUM+X(K)*X(J)
10 R(I)=SUM
  DO 99 I=1,LX
99 WRITE(2,22)I,R(I)
C ***** CAPRAZ İLİSKİNİN BULUNMASI *****
  WRITE(2,55)
55 FORMAT(/,'CAPRAZ İLİSKİ')
  DO 5 I=1,LX
  L=LX+1

```

```

5 A(J)=X(L-J)
  LL=LX+LY-1
  DO 35 I=1,LL
    SUM=0
    DO 41 J=1,LX
      K=I-J+1
      IF(K.LT.1) GO TO 35
      SUM=SUM+Y(K)*A(J)
41 CONTINUE
  G(I)=SUM
35 WRITE(2,22)I,G(I)
C ***** DIZGE KATSAYILARININ BULUNMASI (LEVINSON
C ALGORITMASI) *****
  WRITE(2,66)
66 FORMAT(/,'DIZGE KATSAYILARI')
  M=LX
  DO 73 I=M,LL
73 G(I-M+1)=G(I)
  F(1)=G(1)/R(1)
  A(1)=R(2)/R(1)
  DO 200 I=2,M
    GN=R(1)
    Z1=R(I+1)
    Z2=G(I)
    DO 300 J=2,I
      GN=GN-R(J)*A(J-1)
      Z1=Z1-R(J)*A(I-J+1)
300 Z2=Z2-R(J)*F(I-J+1)
  A(I)=Z1/GN
  F(I)=Z2/GN
  II=I-1
  DO 400 J=1,II
    B(J)=A(J)-A(I)*A(II-J+1)
400 F(J)=F(J)-A(I)*A(II-J+1)
  DO 500 J=1,II
500 A(J)=B(J)
200 CONTINUE

```

```

DO 33 I=1,LX
33 WRITE(2,22)I,F(I)
C ***** SUZULMUS VERI (GERCEK CIKIS) *****
WRITE(2,77)
77 FORMAT(/,'GERCEK CIKIS')
LL=LX+LX-1
DO 11 I=1,LL
SUM=0
DO 21 J=1,LY
K=I-J+1
IF(K.LT.1) GO TO 21
SUM=SUM+X(K)*F(J)
21 CONTINUE
E(I)=SUM
11 WRITE(2,22)I,E(I)
C ***** MINIMUM YANILGI *****
WRITE(2,88)
88 FORMAT(/,'MINIMUM YANILGI')
YANIL=0
DO 12 I=1,LL
12 YANIL=YANIL+(Y(I)-E(I))**2
WRITE(2,13)YANIL
13 FORMAT(3X,F12.6)
22 FORMAT(3X,I3,2X,F12.6)
STOP
END

```